

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная научная конференция  
студентов, аспирантов и молодых ученых  
«Все грани математики и механики»**

(23–27 апреля 2019 г.)

**Сборник статей**

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск  
Издательский Дом Томского государственного университета  
2019

# **Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод с использованием некоторых модификаций модели Кенейла**

**Хуторная А.И., Михайлов М.Д.**

Томский государственный университет, Томск

e-mail: [anas-kh@yandex.ru](mailto:anas-kh@yandex.ru)

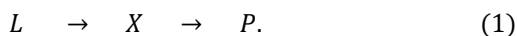
**Аннотация.** Рассматривается модель Кенейла и ее модификации с использованием биофильтра. Модели основаны на пищевой цепочке, состоящей из двух трофических уровней и субстрата.

Математически процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Для численной реализации используется неявный метод Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости. Численные расчеты представлены в виде графиков. Дается анализ полученных результатов.

**Ключевые слова:** биологическая очистка, субстрат, бактерии, микроорганизмы, простейшие, модель, аппроксимация, устойчивость, сходимость, неявная схема, биофильтр.

Очистка сточных вод играет важную роль в экологической сфере. Одним из важных ее этапов является биологическая очистка. Основой этого способа являются процессы жизнедеятельности микроорганизмов (активный ил), с помощью которых растворенные органические вещества потребляются микроорганизмами, причем часть их окисляется, а часть трансформируется в биомассу, в результате чего происходит очищение жидкости. Суть биологического этапа изложена в [1].

В [2] более подробно рассмотрена модель Кенейла, в которой процесс биологической очистки описывается следующей пищевой цепью:



субстрат бактерии простейшие

Для исследования устойчивости системы, описывающей данную модель (см. (1) в [2]), необходимо определить точки стационарного равновесия этой системы и линеаризовать ее. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$L = \dot{L} + \tilde{L}, X = \dot{X} + \tilde{X}, P = \dot{P} + \tilde{P},$$

где  $\dot{L}, \dot{X}, \dot{P}$  - малые величины,  $\tilde{L}, \tilde{X}, \tilde{P}$  - значения  $L, X, P$ , определяющие положение стационарного равновесия из условий:

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = \frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{d\tilde{P}}{dt} = 0.$$

Система (1) из [2] в линеаризованном виде имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{L}}{dt} = -\frac{\mu_{max}(\tilde{X}\tilde{L} + \tilde{L}\tilde{X})}{Y(K_L + \tilde{L})}, \\ \frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{\mu_{max}(\tilde{X}\tilde{L} + \tilde{L}\tilde{X})}{K_L + \tilde{L}} - \frac{f_{max}(\tilde{P}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{P})}{g(K_x + \tilde{X})}, \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} = \frac{f_{max}(\tilde{P}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{P})}{K_x + \tilde{X}}. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя полученные точки стационарного равновесия,  $\tilde{L} = 0$ ,  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{P} = 0$  в (2), имеем:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{L}}{dt} = 0, \\ \frac{d\tilde{X}}{dt} = 0, \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения  $\lambda_{1,2,3} = 0$ . Из этого следует устойчивость по Ляпунову [3].

Аппроксимируя систему (2) разностной схемой неявного метода Эйлера и подставляя точки стационарного равновесия, получим систему разностных уравнений. Корни характеристического уравнения матрицы перехода  $\lambda_{1,2,3} = 1$ . Поэтому неявный метод Эйлера абсолютно устойчив [4].

Погрешность, с которой разностная схема аппроксимирует модель Кенейла, исследована в [2]. Тогда, из теоремы Лакса [4] вытекает, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной.

В качестве дополнительного фактора очистки сточных вод можно подключить биофильтр. Для расчета изъятия органических загрязнений будет использоваться подход К.Н.

Королькова [5], в результате чего в уравнении, описывающим изменение скорости концентрации загрязнения  $L$ , появляется дополнительное слагаемое  $-kL$ , т.е.

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)} - kL \quad (4)$$

при условии, что масса органических веществ, адсорбированных активным илом, пропорциональна концентрации их в воде в момент времени  $t$ . Здесь  $k$  – константа скорости изъятия органических загрязнений.

Рассматривается высоконагружаемый биофильтр, параметр  $k$  выбирается на основании заданных характеристик в [5].

Модель Кенейла с учетом биофильтра записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)} - kL, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X}, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичным способом исследованы вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости соответствующего численного метода, аппроксимирующего (5).

Результаты численных расчетов модели Кенейла без применения биофильтра и с применением его представлены на рис. 1 в виде графиков с различными константами  $k$ .

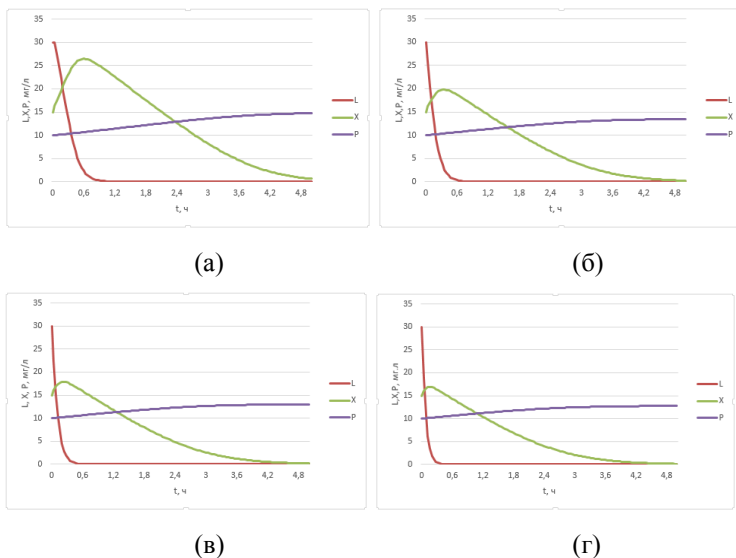


Рис. 1. Результаты численных расчетов модели Кенейла: (а) без использования биофильтра; (б, в, г) с использованием биофильтра; (б)  $k = 3.96$ ; (в)  $k = 8.5$ ; (г)  $k = 14.8$

Из графика видно, что очистка с помощью модели Кенейла (рис. 1 (а)) происходит за первые 2 ч. В случае применения биофильтра процесс очистки идет быстрее, причем скорость очищения зависит от величины  $k$ . Например, на рис. 1 (б) время очистки 1.4 ч, на рис. 1 (в) – 1 ч, на рис. 1 (г) – 0.73 ч.

В статье Кердса [6] рассматривается непрерывная система, в которой имеет место постоянный приток воды с некоторой концентрацией загрязнения  $L_0$ , а также отток жидкости, содержащей концентрации субстрата, бактерий и простейших. Считается, что скорость вливания сточных вод постоянна, так же, как и скорость вымывания. Объем реактора,

куда поступает загрязненная жидкость, постоянен и культура, заполняющая реактор и состоящая из субстрата, бактерий и простейших, хорошо размешивается. Кроме того, предполагается, что скорость разбавления в реакторе остается величиной постоянной и обозначается  $D$ .

С учетом вышеизложенных предположений, модель Кенейла можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)}, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - DX - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X} - DP, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0. \end{cases} \quad (6)$$

Результаты численного решения задачи (6), полученные с помощью неявного метода Эйлера, представлены на рис. 2.

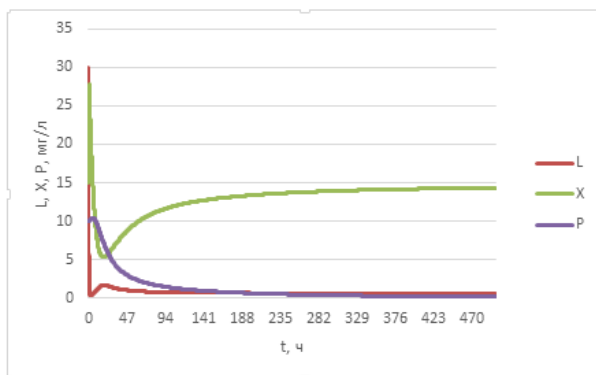


Рис. 2. Результаты численных расчетов задачи (6) без учета биофильтра

Процесс вливания и выливания некоторого объема жидкости с различными концентрациями  $L$ ,  $X$ ,  $P$  влияет на результат, полученный авторами ранее в [2]. На рис. 2 наблюдается падение концентрации простейших и субстрата до значений, близких к нулю. Концентрация бактерий возрастает приблизительно до 15 мг/л и устанавливается на одном уровне при  $t \approx 470$  ч.

Проверка устойчивости численного метода применительно к (6) осуществляется с помощью численного эксперимента с шагами  $\tau$  и  $\tau/2$ . Результаты расчетов представляются в виде двух графиков на рис.3. Анализ показывает, что результаты, полученные с шагами  $\tau$  и  $\tau/2$ , совпадают. Исследование вопросов аппроксимации и сходимости проводится аналогично [2].

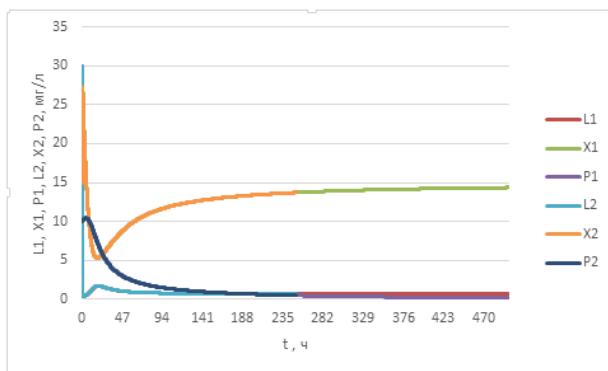


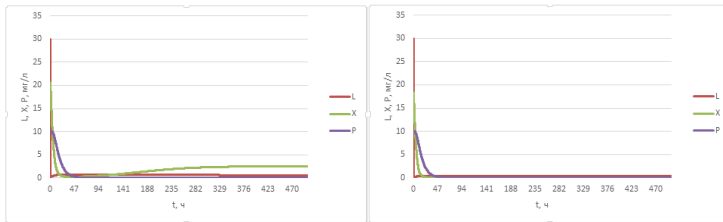
Рис. 3. Результаты численных расчетов задачи (6) с шагами  $\tau$  и  $\tau/2$

Рассмотрим применение биофильтра к задаче (6):



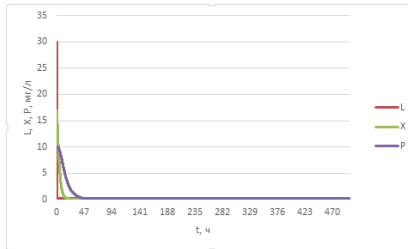
$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{\mu_{max}XL}{Y(K_L + L)} - kL, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{max}XL}{K_L + L} - DX - \frac{f_{max}XP}{g(K_x + X)}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{f_{max}XP}{K_x + X} - DP, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, P(0) = P^0, \end{cases} \quad (7)$$

Численные расчеты модели (7) осуществляются с помощью неявного метода Эйлера и представлены на рис. 4.



(а)

(б)



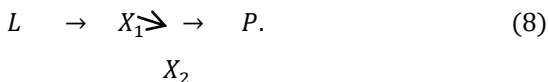
(в)

Рис. 4. Результаты численных расчетов (7) с биофильмом: (а)  $k=3.96$ ; (б)  $k=8.5$ ; (в)  $k=14.8$

В случае, представленном на рис. 4, концентрация загрязнения падает также, как и на рис. 2, а уровень, на котором останавливается L, становится ниже (рис. 2,  $L=0.628$  мг/л; рис. 4

(а),  $L=0.614$  мг/л; рис. 4 (б),  $L=0.348$  мг/л; рис. 4 (в),  $L=0.201$  мг/л). Концентрация простейшей Р быстрее принимает значения близкие к нулю с ростом константы  $k$  - скорости изъятия органических загрязнений. Концентрация бактерии X на рис. 4. (а) устанавливается на меньшем уровне, чем на рис. 2, а на рис 4. (б, в) падает до значений близких к нулю.

В [2] рассматривается модель, которая описывается следующей пищевой цепью:



Предполагается, что реснитчатая питается более эффективной бактерией ( $X_1$ ), удельная скорость роста которой  $f_{max}=0.43$  сут<sup>-1</sup>. Применяя биофильтр к данной задаче, получим:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = DL_0 - DL - \frac{\mu_{max1}X_1L}{Y(K_{L1} + L)} - \frac{\mu_{max2}X_2L}{Y(K_{L2} + L)} - kL, \\ \frac{dX_1}{dt} = \frac{\mu_{max1}X_1L}{K_{L1} + L} - DX_1 - \frac{f_{max1}X_1P}{Y(K_{X1} + X_1)}, \\ \frac{dX_2}{dt} = \frac{\mu_{max2}X_2L}{K_{L2} + L} - DX_2, \\ \frac{dP}{dt} = -DP + \frac{f_{max1}X_1P}{K_{X1} + X_1}, \\ L(0) = L^0, X_1(0) = X_1^0, X_2(0) = X_2^0, P(0) = P^0. \end{cases} \quad (9)$$

Задачу Коши (9) аппроксимируем разностной, с использованием неявного метода Эйлера. Проверка на устойчивость данного метода осуществляется с помощью численного эксперимента, аппроксимация и сходимость исследуются аналогично [2].

Результаты решения задачи, исследованной в [2] без использования биофильтра и задачи (9) при различных константах  $k$  представлены в виде графиков на рис. 5.

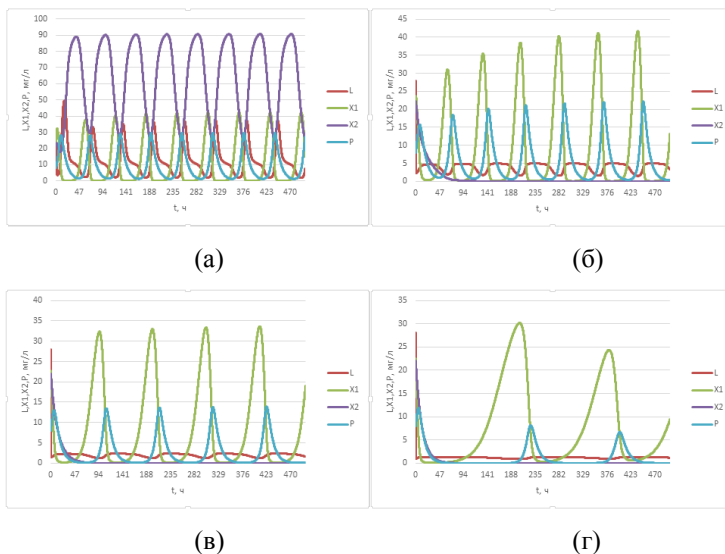


Рис. 5. Результаты численных расчетов модели, описываемой пищевой цепью (8): (а) без использования биофильтра; (б, в, г) с использованием биофильтра; (б)  $k = 3.96$ ; (в)  $k = 8.5$ ; (г)  $k = 14.8$

На рис. 5 (б-г) наблюдается уменьшение интенсивности колебания L после применения биофильтра. При увеличении константы  $k$ , значение концентрации L становится меньше и останавливается приблизительно на одном уровне, 1 мг/л (рис. 5. (г)), что говорит об эффективном применении биофильтра. Однако полной очистки не происходит.

**Выводы.** В работе рассматривается модель Кенейла и ее модификации с использованием и без использования биофильтра. Модели представляют собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для реализации моделей используется неявный метод Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости данного метода. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков, построенных в Excel.

Анализ результатов показывает, что применение биофильтра к моделям значительно ускоряет время падения концентрации до своего минимального значения, а также, что с увеличением константы скорости изъятия органических загрязнений  $k$ , уровень, на котором останавливается концентрация субстрата, с течением времени значительно ниже, чем без использования биофильтра.

## **Список литературы**

- [1] Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. - М.:Наука. - 1983. – С.156.
- [2] Михайлов М.Д. Хуторная А.И. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на основе модели Кенейла // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сборник статей. - Томск : Издательский Дом Томского государственного университета. - 2018. – С.101—109.

- [3] Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. – 2-е изд., под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2000. – С.348.
- [4] Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. - Томск: изд-во ТГУ. - 2007. - ч.2. – С.287.
- [5] Воронов Ю.В., Яковлев С.В. Биологические фильтры. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат. – 1982. – С.120.
- [6] Curds C.R. Computer simulations of some complex microbial food chains // Water Research. - 1974. - Vol.8, №10. - P.769—780.