

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная научная конференция
студентов, аспирантов и молодых ученых
«Все грани математики и механики»**

(23–27 апреля 2019 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2019

Об эндоморфизмах p -группы ранга 3

Степанова А. Ю., Тимошенко Е. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Аннотация. В данной работе эндоморфизмы конечной p -группы ранга три представляются обобщенными (3×3) -матрицами, элементами которых являются подходящие классы вычетов. Для таких матриц мы вводим понятие определителя, свойства которого оказываются аналогичными свойствам определителей обычных матриц. Для одного из возможных частных случаев найден критерий обратимости обобщенной матрицы.

Ключевые слова: p -группа, матрица, определитель, кольцо обобщенных матриц, эндоморфизм.

Пусть $\mathbf{Z}$ – кольцо целых чисел, p – простое число. Кольцо классов вычетов по модулю p^m будем обозначать через $\mathbf{Z}_{p^m}$. Пусть $m \geq n \geq k > 0$ и $H = \mathbf{Z}_{p^m} \oplus \mathbf{Z}_{p^n} \oplus \mathbf{Z}_{p^k}$ (мы будем записывать элементы группы H в виде вектор-столбцов). Каждому эндоморфизму φ группы H поставим в соответствие ту единственную матрицу

$$N_{\varphi} = \begin{pmatrix} a_1 + p^m \mathbf{Z} & a_2 + p^n \mathbf{Z} & a_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b_1 + p^n \mathbf{Z} & b_2 + p^n \mathbf{Z} & b_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c_1 + p^k \mathbf{Z} & c_2 + p^k \mathbf{Z} & c_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

для которой

$$\varphi \begin{pmatrix} z_1 + p^m \mathbf{Z} \\ z_2 + p^n \mathbf{Z} \\ z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z_1 + p^{m-n} a_2 z_2 + p^{m-k} a_3 z_3 + p^m \mathbf{Z} \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + p^{n-k} b_3 z_3 + p^n \mathbf{Z} \\ c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

при любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$.

Пусть в дополнение к φ имеется эндоморфизм $\psi \in \text{End } H$

и

$$N_\psi = \begin{pmatrix} a'_1 + p^m \mathbf{Z} & a'_2 + p^n \mathbf{Z} & a'_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b'_1 + p^n \mathbf{Z} & b'_2 + p^n \mathbf{Z} & b'_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c'_1 + p^k \mathbf{Z} & c'_2 + p^k \mathbf{Z} & c'_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для удобства будем писать $\bar{\bar{x}} = x + p^m \mathbf{Z}$, $\bar{x} = x + p^n \mathbf{Z}$ и $\bar{x} = x + p^k \mathbf{Z}$ для всякого $x \in \mathbf{Z}$. Вычисляя для произвольных $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$ элемент

$$\varphi \left(\psi \begin{pmatrix} z_1 + p^m \mathbf{Z} \\ z_2 + p^n \mathbf{Z} \\ z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} a'_1 z_1 + p^{m-n} a'_2 z_2 + p^{m-k} a'_3 z_3 + p^m \mathbf{Z} \\ b'_1 z_1 + b'_2 z_2 + p^{n-k} b'_3 z_3 + p^n \mathbf{Z} \\ c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + c'_3 z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

получаем, что матрица $N_{\varphi\psi}$ равна

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1 a'_1 + s a_2 b'_1 + u a_3 c'_1} & \overline{a_1 a'_2 + a_2 b'_2 + t a_3 c'_2} & \overline{a_1 a'_3 + a_2 b'_3 + a_3 c'_3} \\ \overline{b_1 a'_1 + b_2 b'_1 + t b_3 c'_1} & \overline{s b_1 a'_2 + b_2 b'_2 + t b_3 c'_2} & \overline{s b_1 a'_3 + b_2 b'_3 + b_3 c'_3} \\ \overline{c_1 a'_1 + c_2 b'_1 + c_3 c'_1} & \overline{s c_1 a'_2 + c_2 b'_2 + c_3 c'_2} & \overline{u c_1 a'_3 + t c_2 b'_3 + c_3 c'_3} \end{pmatrix}$$

(здесь через s, t, u мы обозначили соответственно множители $p^{m-n}, p^{n-k}, p^{m-k}$).

$$\text{Пусть на множестве } R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{p^m} & \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^k} \\ \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^n} & \mathbf{Z}_{p^k} \\ \mathbf{Z}_{p^k} & \mathbf{Z}_{p^k} & \mathbf{Z}_{p^k} \end{pmatrix}, \text{ т.е. на}$$

множестве всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overrightarrow{a_2} & \overline{a_3} \\ \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} & \overline{b_3} \\ \overline{c_1} & \overline{c_2} & \overline{c_3} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{Z}$, введена операция умножения так, что произведением матрицы вида (1) на матрицу вида (2) служит матрица, совпадающая с указанной выше матрицей $N_{\varphi\psi}$; сложение на R зададим поэлементно. Тогда ввиду сказанного выше R превращается в кольцо, изоморфное кольцу $\text{End } H$. Единичный элемент кольца R имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overrightarrow{0} & \overrightarrow{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

(очевидно, что $AE = EA = A$ для всех $A \in R$).

Определение. *Определителем матрицы вида (3) назовем элемент*

$$|A| = \overline{a_1 b_2 c_3 - t a_1 b_3 c_2 - s a_2 b_1 c_3 + u(a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1)}$$

кольца $\mathbf{Z}_{p^k}$, где $s = p^{m-n}$, $t = p^{n-k}$, $u = p^{m-k}$.

Можно непосредственно проверить, что понятие определителя введено корректно, т.е. значение $|A|$ не зависит от выбора конкретных представителей a_i, b_i, c_i из соответствующих классов вычетов.

Если $m = n = k$, то R – это кольцо матриц, элементы которых принадлежат одному и тому же кольцу вычетов. Легко убедиться, что и операция умножения, и определитель в таком кольце R совпадают с обычными.

Предложение. *Для любых $A, A' \in R$ выполнено $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.*

Доказательство. Пусть A и A' совпадают с матрицами, задаваемыми формулами (1) и (2). Тогда

$$\begin{aligned}
|A| \cdot |A'| &= a_1 a'_1 b_2 b'_2 c_3 c'_3 + t^2 a_1 a'_1 b_3 b'_3 c_2 c'_2 + s^2 a_2 a'_2 b_1 b'_1 c_3 c'_3 - \\
&\quad - t(a_1 a'_1 b_2 b'_3 c_3 c'_2 + a_1 a'_1 b_3 b'_2 c_2 c'_3) \\
&\quad - s(a_1 a'_2 b_2 b'_1 c_3 c'_3 + a_2 a'_1 b_1 b'_2 c_3 c'_3) + \\
&\quad + u(a_1 a'_3 b_2 b'_1 c_3 c'_2 + a_1 a'_2 b_2 b'_3 c_3 c'_1 - a_1 a'_3 b_2 b'_2 c_3 c'_1 \\
&\quad + a_3 a'_1 b_1 b'_2 c_2 c'_3 + \\
&\quad + a_2 a'_1 b_3 b'_2 c_1 c'_3 - a_3 a'_1 b_2 b'_2 c_1 c'_3 + a_1 a'_2 b_3 b'_1 c_2 c'_3 + a_2 a'_1 b_1 b'_3 c_3 c'_2) \\
&\quad - \\
&\quad - ut(a_1 a'_3 b_3 b'_1 c_2 c'_2 + a_1 a'_2 b_3 b'_3 c_2 c'_1 - a_1 a'_3 b_3 b'_2 c_2 c'_1 \\
&\quad + a_3 a'_1 b_1 b'_3 c_2 c'_2 + \\
&\quad + a_2 a'_1 b_3 b'_3 c_1 c'_2 - a_3 a'_1 b_2 b'_3 c_1 c'_2) - us(a_2 a'_3 b_1 b'_1 c_3 c'_2 \\
&\quad + a_2 a'_2 b_1 b'_3 c_3 c'_1 - \\
&\quad - a_2 a'_3 b_1 b'_2 c_3 c'_1 + a_3 a'_2 b_1 b'_1 c_2 c'_3 + a_2 a'_2 b_3 b'_1 c_1 c'_3 - a_3 a'_2 b_2 b'_1 c_1 c'_3) \\
&\quad + \\
&\quad + u^2(a_3 a'_3 b_1 b'_1 c_2 c'_2 + a_3 a'_2 b_1 b'_3 c_2 c'_1 - a_3 a'_3 b_1 b'_2 c_2 c'_1 \\
&\quad + a_2 a'_3 b_3 b'_1 c_1 c'_2 + \\
&\quad + a_2 a'_2 b_3 b'_3 c_1 c'_1 - a_2 a'_3 b_3 b'_2 c_1 c'_1 - a_3 a'_3 b_2 b'_1 c_1 c'_2 - \\
&\quad - a_3 a'_2 b_2 b'_3 c_1 c'_1 + a_3 a'_3 b_2 b'_2 c_1 c'_1) + p^k \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Определитель $|AA'|$ равен выражению

$$\begin{aligned}
&(a_1 a'_1 + s a_2 b'_1 + u a_3 c'_1)(s b_1 a'_2 + b_2 b'_2 + t b_3 c'_2)(u c_1 a'_3 + t c_2 b'_3 \\
&\quad + c_3 c'_3) + \\
&\quad + u(a_1 a'_3 + a_2 b'_3 + a_3 c'_3)(b_1 a'_1 + b_2 b'_1 \\
&\quad + t b_3 c'_1)(s c_1 a'_2 + c_2 b'_2 + c_3 c'_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u(a_1a'_2 + a_2b'_2 + ta_3c'_2)(sb_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3c'_3)(c_1a'_1 + c_2b'_1 \\
& \quad + c_3c'_1) - \\
& - u(a_1a'_3 + a_2b'_3 + a_3c'_3)(sb_1a'_2 + b_2b'_2 + tb_3c'_2)(c_1a'_1 + c_2b'_1 \\
& \quad + c_3c'_1) - \\
& - t(a_1a'_1 + sa_2b'_1 + ua_3c'_1)(sb_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3c'_3)(sc_1a'_2 + \\
& \quad + c_2b'_2 + c_3c'_2) - s(a_1a'_2 + a_2b'_2 + ta_3c'_2)(b_1a'_1 + \\
& \quad + b_2b'_1 + tb_3c'_1)(uc_1a'_3 + tc_2b'_3 + c_3c'_3) + p^k \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

После приведения подобных получаем, что $|AA'| = |A| \cdot |A'|$. ■

Теорема. Пусть $m > n = k > 0$. Для матрицы вида (3) эквивалентны следующие условия:

- 1) Числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p ;
- 2) $|A|$ – обратимый элемент в $\mathbf{Z}_{p^n}$;
- 3) A – обратимый элемент в R .

Если эти условия выполнены, то матрица

$$\begin{aligned}
& B = \\
& \left(\begin{array}{ccc} \overline{G(1 - p^{m-n}FM)} & \overline{F(a_3c_2 - a_2c_3)} & \overline{F(a_2b_3 - a_3b_2)} \\ \overline{F(b_3c_1 - b_1c_3)} & \overline{F(a_1c_3 - p^{m-n}a_3c_1)} & \overline{F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3)} \\ \overline{F(b_1c_2 - b_2c_1)} & \overline{F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2)} & \overline{F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)} \end{array} \right) \\
& ,
\end{aligned}$$

где $M = a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3$, $G + p^m \mathbf{Z} =$

$(a_1 + p^m \mathbf{Z})^{-1}$, $F + p^n \mathbf{Z} = |A|^{-1}$, является обратной для A .

Доказательство. Заметим, что $|A| = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M + p^n \mathbf{Z}$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p , тогда справедливо равенство $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2, p) = 1$. Так

как $m > n$, то получаем, что $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M, p) = 1$. Это означает, что элемент $|A|$ обратим в $\mathbf{Z}_p^n$.

2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что элемент $|A|$ является обратимым, т.е. выполнено $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M, p) = 1$. Так как $m > n$, то можно заключить, что $\text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2, p) = 1$. Следовательно, числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p .

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть матрица A обратима, тогда существует матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = E$. Так как $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 + p^n\mathbf{Z}$, то $|A^{-1}|$ – элемент, обратный к $|A|$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть выполнено условие 2) и $F + p^n\mathbf{Z} = |A|^{-1}$. Так как справедлива импликация 2) $\Rightarrow$ 1), то число a_1 не делится на p и, значит, элемент $a_1 + p^m\mathbf{Z}$ является обратимым в $\mathbf{Z}_p^m$, т.е. существует элемент $G + p^m\mathbf{Z} = (a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1}$. Поскольку $m > n$, то справедливо равенство $G + p^n\mathbf{Z} = (a_1 + p^n\mathbf{Z})^{-1}$. Убедимся, что матрица B обратна к матрице A . Для этого мы обозначим $\delta = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^{m-n}M$ и рассмотрим матрицу $D = AB$ и ее элементы d_{ij} :

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= a_1G(1 - p^{m-n}FM) + p^{m-n}a_2F(b_3c_1 - b_1c_3) + \\
 &\quad + p^{m-n}a_3F(b_1c_2 - b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = \\
 &= (a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) + \\
 &\quad + (p^{m-n}F(a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) + p^m\mathbf{Z}) = \\
 &= (a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} \\
 &\quad + \\
 &\quad + (p^{m-n}FM + p^m\mathbf{Z}) = 1 + p^m\mathbf{Z};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{12} &= a_1 F(a_3 c_2 - a_2 c_3) + a_2 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
&\quad + a_3 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(a_1 c_2 a_3 - a_1 a_2 c_3 + a_1 a_2 c_3 - \\
&\quad - p^{m-n} c_1 a_2 a_3 + p^{m-n} c_1 a_2 a_3 - a_1 c_2 a_3) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{13} &= a_1 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\
&\quad + a_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(a_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 a_3 + p^{m-n} b_1 a_2 a_3 - \\
&\quad - a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 - p^{m-n} b_1 a_2 a_3) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{21} &= b_1 G(1 - p^{m-n} FM) + b_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + \\
&\quad + b_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^n \mathbf{Z} = b_1 G(1 - p^{m-n} FM) + \\
&\quad + F(c_1 b_2 b_3 - b_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 b_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
&\quad = b_1 G(1 - p^{m-n} FM + p^n \mathbf{Z}) \\
&\quad + b_1 F(c_2 b_3 - b_2 c_3)(a_1 + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= b_1 G(1 - p^{m-n} FM) + b_1 GF(a_1 c_2 b_3 - a_1 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
&= b_1 G - b_1 GF(a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + p^{m-n} M) + p^n \mathbf{Z} = \\
&= (b_1 G + p^n \mathbf{Z}) - b_1 G(F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= (b_1 G + p^n \mathbf{Z}) - b_1 G(\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= b_1 G(1 - 1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{22} &= p^{m-n} b_1 F(a_3 c_2 - a_2 c_3) + b_2 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
&\quad + b_3 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(p^{m-n} b_1 c_2 a_3 - p^{m-n} b_1 a_2 c_3 + \\
&\quad + a_1 b_2 c_3 - p^{m-n} c_1 b_2 a_3 + p^{m-n} c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3) + p^n \mathbf{Z} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = (\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}; \\
d_{23} &= p^{m-n} b_1 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\
&\quad + b_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(p^{m-n} b_1 a_2 b_3 - p^{m-n} b_1 b_2 a_3 + \\
&\quad + p^{m-n} b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - p^{m-n} b_1 a_2 b_3) + p^n \mathbf{Z} = 0 + \\
&\quad p^n \mathbf{Z}; \\
d_{31} &= c_1 G(1 - p^{m-n} FM) + c_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + \\
&\quad + c_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^n \mathbf{Z} = c_1 G(1 - p^{m-n} FM) + \\
&\quad + F(c_1 c_2 b_3 - b_1 c_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 - c_1 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
&= c_1 G(1 - p^{m-n} FM + p^n \mathbf{Z}) \\
&\quad + c_1 F(c_2 b_3 - b_2 c_3)(a_1 + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= c_1 G - c_1 GF(p^{m-n} M - a_1 c_2 b_3 + a_1 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
&= (c_1 G + p^n \mathbf{Z}) - c_1 G(F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= (c_1 G + p^n \mathbf{Z}) - c_1 G(\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = \\
&= c_1 G(1 - 1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d_{32} &= p^{m-n} c_1 F(a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_2 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
&\quad + c_3 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + p^n \mathbf{Z} \\
&\quad = F(p^{m-n} c_1 c_2 a_3 - p^{m-n} c_1 a_2 c_3 + \\
&\quad + a_1 c_2 c_3 - p^{m-n} c_1 c_2 a_3 + p^{m-n} c_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = 0 + \\
&\quad p^n \mathbf{Z}; \\
d_{33} &= p^{m-n} c_1 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\
&\quad + c_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p^{m-n}(a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3)) + p^n\mathbf{Z} = \\
& = (F + p^n\mathbf{Z})(\delta + p^n\mathbf{Z}) = 1 + p^n\mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Получаем, что $D = E$. Рассмотрим матрицу $D' = BA$ и ее элементы d'_{ij} :

$$\begin{aligned}
d'_{11} &= a_1G(1 - p^{m-n}FM) + p^{m-n}b_1F(a_3c_2 - a_2c_3) + \\
& + p^{m-n}c_1F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^m\mathbf{Z} = (a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) - \\
& - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(G + p^m\mathbf{Z}) + \\
& + p^{m-n}F(a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + p^m\mathbf{Z}) = \\
& = (a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} - p^{m-n}FM(a_1 + p^m\mathbf{Z})(a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1} \\
& + \\
& + (p^{m-n}FM + p^m\mathbf{Z}) = 1 + p^m\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_{12} &= a_2G(1 - p^{m-n}FM) + b_2F(a_3c_2 - a_2c_3) + \\
& + c_2F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^n\mathbf{Z} = a_2G(1 - p^{m-n}FM) + \\
& + F(a_3b_2c_2 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2) + p^n\mathbf{Z} = \\
& = a_2G(1 - p^{m-n}FM + p^n\mathbf{Z}) - \\
& - a_2F(b_2c_3 - b_3c_2)(a_1 + p^n\mathbf{Z})(G + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = (a_2G + p^n\mathbf{Z}) - a_2GF(p^{m-n}M + a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = (a_2G + p^n\mathbf{Z}) - a_2G(F + p^n\mathbf{Z})(\delta + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = (a_2G + p^n\mathbf{Z}) - a_2G(\delta + p^n\mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n\mathbf{Z}) = \\
& = a_2G(1 - 1) + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z};
\end{aligned}$$

$$d'_{13} = a_3G(1 - p^{m-n}FM) + b_3F(a_3c_2 - a_2c_3) +$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 F(a_2 b_3 - a_3 b_2) + p^n \mathbf{Z} = a_3 G(1 - p^{m-n} FM) + \\
& + F(a_3 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_3 + a_2 b_3 c_3 - a_3 b_2 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
& = a_3 G(1 - p^{m-n} FM + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 F(b_2 c_3 - b_3 c_2)(a_1 + p^n \mathbf{Z})(G + p^n \mathbf{Z}) = (a_3 G + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 GF(p^{m-n} M + a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + p^n \mathbf{Z}) = (a_3 G + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 G(F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = (a_3 G + p^n \mathbf{Z}) - \\
& - a_3 G(\delta + p^n \mathbf{Z})^{-1}(\delta + p^n \mathbf{Z}) = a_3 G(1 - 1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{21} & = a_1 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_1 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
& + c_1 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 + a_1 b_1 c_3 - \\
& - p^{m-n} a_3 b_1 c_1 + p^{m-n} a_3 b_1 c_1 - a_1 b_3 c_1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{22} & = p^{m-n} a_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_2 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
& + c_2 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \\
& + p^{m-n}(a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2)) + p^n \mathbf{Z} = \\
& = (F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{23} & = p^{m-n} a_3 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_3 F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + \\
& + c_3 F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3) + p^n \mathbf{Z} \\
& = F(p^{m-n} a_3 b_3 c_1 - p^{m-n} a_3 b_1 c_3 + \\
& + a_1 b_3 c_3 - p^{m-n} a_3 b_3 c_1 + p^{m-n} a_3 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_3) + p^n \mathbf{Z} = \\
& 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{31} & = a_1 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_1 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
& = F(a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 + p^{m-n} a_2 b_1 c_1 - \\
& - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 - p^{m-n} a_2 b_1 c_1) + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{32} & = p^{m-n} a_2 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_2 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + \\
& + c_2 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} \\
& = F(p^{m-n} a_2 b_1 c_2 - p^{m-n} a_2 b_2 c_1 + \\
& + p^{m-n} a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 + a_1 b_2 c_2 - p^{m-n} a_2 b_1 c_2) + p^n \mathbf{Z} = \\
& 0 + p^n \mathbf{Z}; \\
d'_{33} & = p^{m-n} a_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_3 F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + \\
& + c_3 F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1) + p^n \mathbf{Z} = F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \\
& + p^{m-n} (a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3)) + p^n \mathbf{Z} = \\
& = (F + p^n \mathbf{Z})(\delta + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $D' = D = E$. Следовательно, B – матрица, обратная к матрице A .

Список литературы

- [1] Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО. - 2017.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. - 1974; 1977.