ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 48

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/48/2

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С *N* ТИПАМИ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК В ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАДЕРЖКИ ЗАЯВОК НА ОРБИТЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-01-00277.

Рассматривается RQ-система с несколькими типами вызываемых заявок. Основным методом исследования является метод асимптотического анализа, который позволяет в предложенной RQ-системе найти вид предельного распределения числа заявок, поступивших в систему в условии большой задержки заявок на орбите. На основе найденного распределения построено дискретное распределение (гауссовская аппроксимация). Определены условия применимости полученной аппроксимации в зависимости от значений параметров, определяющих систему, на основе численных экспериментов.
Ключевые слова: RQ-система; вызываемые заявки; метод асимптотического анализа; предельное условие большой задержки; гауссовская аппроксимация.

RQ-системы характеризуются тем, что заявка, поступившая в систему, в случае занятости сервера остается в ней и пытается вновь занять обслуживающий прибор после некоторой случайной задержки на орбите. RQ-системы являются математическими моделями телекоммуникационных сетей связи, компьютерных сетей, систем в экономике и систем call-центров [1, 2]. В таких системах время простоя сервера должно быть уменьшено для повышения эффективности системы.

Мы рассматриваем системы, в которых оператор не только принимает вызовы извне, но и выполняет исходящие вызовы в режиме простоя. Например, в call-центрах операторы могут получать поступающие вызовы, но как только они имеют свободное время и находятся в режиме ожидания, они могут выполнять исходящие вызовы [3, 4]. Такие системы будем называть RQ-системами с вызываемыми заявками, или системами с двумя классами заявок.

В работах [5–7] рассматриваются марковские RQ-системы с вызываемыми заявками. Модель RQ-системы с двумя классами заявок и несколькими типами вызываемых заявок рассмотрена Сакураи и Фунг-Дуком [8]. Для этой модели получен численный алгоритм расчета стационарного распределения состояний системы.

В предложенной работе основным методом исследования является метод асимптотического анализа [9, 10], который позволяет в RQ-системе M/M/1/N с *N* типами вызываемых заявок найти вид предельного распределения числа поступивших заявок в системе в условии большой задержки заявок на орбите. На основе найденного распределения построено дискретное распределение (гауссовская аппроксимация), которое аппроксимирует дискретное распределение числа поступивших заявок в системе.

1. Описание математической модели и постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с несколькими типами вызываемых заявок, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ. Время обслуживания каждой поступившей заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_1. Если поступившая заявка застает прибор свободным, она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. Рассматривается система с N типами вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n. Время обслуживания вызванной заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n.

Обозначим $i(t)$ – число поступивших заявок в системе в момент времени t, без учета вызванной заявки, если она обслуживается на приборе. Процесс $k(t)$ определяет состояние прибора в момент времени t следующим образом: 0, если прибор свободен; 1, если прибор занят обслуживанием поступившей заявки; n, если прибор занят обслуживанием вызванной заявки типа n, где $n=\overline{2,N+1}$. Двумерный процесс $\{i(t), k(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем.

Введем обозначение $P\{i(t) = i, k(t) = k\} = P_k(i)$ – стационарная вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и в системе находится i поступивших заявок. Для распределения вероятностей $P_k(i)$ рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$
\begin{gathered}
-\left(\lambda+i\sigma+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)P_0(i)+\mu_1P_1(i+1)+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_nP_n(i)=0,\\
-(\lambda+\mu_1)P_1(i)+\lambda P_1(i-1)+\lambda P_0(i-1)+i\sigma P_0(i)=0,\\
-(\lambda+\mu_n)P_n(i)+\lambda P_n(i-1)+\alpha_nP_0(i)=0,\ n=\overline{2,N+1}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Введем частичные характеристические функции $H_k(u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_k(i),$ где $j=\sqrt{-1},\ \ k=\overline{0,N+1}.$ Тогда систему (1) перепишем в виде:

$$
\begin{gathered}
-\left(\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)H_0(u)+j\sigma H_0'(u)+\mu_1e^{-ju}H_1(u)+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_nH_n(u)=0,\\
-(\lambda+\mu_1)H_1(u)+\lambda e^{ju}H_1(u)+\lambda e^{ju}H_0(u)-j\sigma H_0'(u)=0,\\
-(\lambda+\mu_n)H_n(u)+\lambda e^{ju}H_n(u)+\alpha_nH_0(u)=0,\ n=\overline{2,N+1}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Суммируя уравнения системы (2), получим уравнение

$$
\lambda H_0(u)+(\lambda-\mu_1e^{-ju})H_1(u)+\lambda\sum_{n=2}^{N+1}H_n(u)=0.
\tag{3}
$$

Характеристическая функция $H(u)$ числа заявок для системы (2), (3) выражается через частичные характеристические функции $H_k(u)$ следующим равенством: $H(u)=\sum_{k=0}^{N+1}H_k(u).$ Аналитическое выражение для $H(u)$ представлено в следующей теореме.

Теорема 1. Характеристическая функция $H(u)$ числа поступивших заявок в RQ-системе M/M/1/N с вызываемыми заявками имеет следующий вид:

$$
H(u)=\frac{1}{1+\nu_1}\left(1+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\mu_n+\lambda(1-e^{ju})}\right)\left[\frac{1-\rho}{1-\rho e^{ju}}\right]^{\frac{\lambda}{\sigma}(1+\nu_2)+1}\prod_{n=2}^{N+1}\left[\frac{1-p_n}{1-p_ne^{ju}}\right]^{\frac{\alpha_n(\theta_n-\lambda)}{\sigma\theta_n}},
\tag{4}
$$

где $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu_1},\ \ \nu_1=\sum_{n=2}^{N+1}\dfrac{\alpha_n}{\mu_n},\ \ \nu_2=\sum_{n=2}^{N+1}\dfrac{\alpha_n}{\theta_n},\ \ p_n=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu_n},\ \ \theta_n=\lambda+\mu_n-\mu_1,\ \ n=\overline{2,N+1}.$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 необходимо второе и третье уравнения системы (2) разрешить относительно функций $H_1(u)$ и $H_n(u)$, $n=\overline{2,N+1}$ соответственно. Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (2), мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $H_0(u)$. Решая дифференциальное уравнение, получаем функцию $H_0(u)$ в явном виде с точностью до мультипликативной константы.

Подставляем $H_0(u)$ в выражения для функций $H_1(u)$ и $H_n(u)$, $n=\overline{2,N+1}$ и суммируем все полученные функции согласно равенству $H(u)=\sum_{k=0}^{N+1}H_k(u)$. Константу интегрирования определяем из условия нормировки $H(0) = 1$. Теорема доказана.

Применяя обратное преобразование Фурье к найденной характеристической функции (4), можно записать распределение вероятностей $P(i)$ в виде $P(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}H(u)du,\ \ i=\overline{0,\infty}$. Однако нахождение аналитического выражения этих интегралов вряд ли возможно, следовательно, целесообразно использовать методы численного интегрирования. Численные расчеты, в свою очередь, требуют больших затрат вычислительных ресурсов.

В настоящей работе на основе применения метода асимптотического анализа, ставится задача построения аналитической аппроксимации распределения $P(i)$ и с помощью численных экспериментов проведение анализа точности.

2. Асимптотика первого порядка

Решение системы (2), (3) найдем с помощью метода асимптотического анализа при условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$).

Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $i(t)$ – число поступивших заявок в RQ-системе с N типами вызываемых заявок, тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0}Me^{jwi(t)\sigma}=e^{jw\kappa_1}, \tag{5}$$

где

$$\kappa_1=\frac{\lambda\mu_1\nu+\lambda^2}{\mu_1-\lambda},\ \nu=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\mu_n}. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и сделаем в системе (4) следующие замены:

$$u = \varepsilon w,\ H_k(u) = F_k(w,\varepsilon),\ k=\overline{0,N+1},$$

получим следующую систему уравнений:

$$-\left(\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)F_0(w,\varepsilon)+j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu_1 e^{-jw\varepsilon}F_1(w,\varepsilon)+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n F_n(w,\varepsilon)=0,$$

$$-(\lambda+\mu_1)F_1(w,\varepsilon)+\lambda e^{jw\varepsilon}F_1(w,\varepsilon)+\lambda e^{jw\varepsilon}F_0(w,\varepsilon)-j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=0,$$

$$-(\lambda+\mu_n)F_n(w,\varepsilon)+\lambda F_n(w,\varepsilon)+\alpha_n F_0(w,\varepsilon)=0,\ n=\overline{2,N+1},$$

$$\lambda F_0(w,\varepsilon)+(\lambda-\mu_1 e^{-jw\varepsilon})F_1(w,\varepsilon)+\lambda\sum_{n=2}^{N+1}F_n(w,\varepsilon)=0. \tag{7}$$

В системе (7) сделаем предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Обозначив $F_k(w)=\lim_{\varepsilon\to 0}F_k(w,\varepsilon),\ k=\overline{0,N+1}$, получим

$$-\left(\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)F_0(w)+jF_0'(w)+\sum_{k=1}^{N+1}\mu_k F_k(w)=0,$$

$$-\mu_1 F_1(w)-jF_0'(w)+\lambda F_0(w)=0,$$

$$-\mu_n F_n(w)+\alpha_n F_0(w)=0,\ n=\overline{2,N+1},$$

$$\lambda F_0(w)-(\mu_1-\lambda)F_1(w)+\lambda\sum_{n=2}^{N+1}F_n(w)=0. \tag{8}$$

Будем искать решение системы уравнений (8) в следующем виде:

$$F_k(w) = r_k \Phi(w),\ k = \overline{0, N+1}, \tag{9}$$

где r_k – это вероятность того, что прибор находится в состоянии k.

$$-\left(\lambda + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n\right) r_0 + j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} r_0 + \sum_{k=1}^{N+1} \mu_k r_k = 0,$$

$$-\mu_1 r_1 - j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} r_0 + \lambda r_0 = 0,$$

$$-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0,\ n = \overline{2, N+1},$$

$$\lambda r_0 - (\mu_1 - \lambda) r_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} r_n = 0. \tag{10}$$

Так как отношение $j\dfrac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w, функция $\Phi(w)$ имеет следующий вид: $\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\}$, что соотносится с (5), где параметр κ_1 будет найден ниже. Систему (10) перепишем в виде:

$$-\left(\lambda + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n\right) r_0 - \kappa_1 r_0 + \sum_{k=1}^{N+1} \mu_k r_k = 0,$$

$$-\mu_1 r_1 + \kappa_1 r_0 + \lambda r_0 = 0,$$

$$-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0,\ n = \overline{2, N+1},$$

$$\lambda r_0 - (\mu_1 - \lambda) r_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} r_n = 0. \tag{11}$$

Запишем условие нормировки для распределения вероятностей состояний прибора: $\sum_{k=0}^{N+1} r_k = 1$. Выписывая 3 и 4 уравнения системы (11) совместно с условием нормировки, получим систему

$$-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0, n = \overline{2, N+1},$$

$$\lambda r_0 - (\mu_1 - \lambda) r_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} r_n = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{N+1} r_k = 1, \tag{12}$$

решение которой имеет вид: $r_0 = \dfrac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1(1+\nu)}$, $r_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}$, $r_n = \dfrac{\alpha_n(\mu_1 - \lambda)}{\mu_1 \mu_n (1+\nu)}$, $n = \overline{2, N+1}$, где $\nu = \sum_{n=2}^{N+1} \dfrac{\alpha_n}{\mu_n}$.

Подставляя полученное решение в систему (11) получаем значение параметра: $\kappa_1 = \dfrac{\lambda\nu\mu_1 + \lambda^2}{\mu_1 - \lambda}$. Теорема доказана.

Асимптотика первого порядка определяет среднее значение числа поступивших заявок в системе. Для более детального исследования процесса $i(t)$ следует рассмотреть асимптотику второго порядка.

3. Асимптотика второго порядка

Основной результат анализа асимптотики второго порядка представим в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть $i(t)$ – число поступивших заявок в RQ-системе с N типами вызываемых заявок, тогда имеет место предельное равенство:

$$\lim_{\sigma \to 0} M \exp\left\{ jw\sqrt{\sigma}\left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma} \right) \right\} = \exp\left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\}, \tag{13}$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\lambda\mu_1(\mu_1-\lambda)(\nu_1-\lambda\nu_2)+\lambda^2(\mu_1+\lambda\nu_1)}{(\mu_1-\lambda)^2},\ \ \nu_1=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\mu_n},\ \ \nu_2=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\mu_n^2}. \tag{14}$$

Доказательство. В системе (2), (3) сделаем следующие замены: $H_k(u)=\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}\right\}H_k^{(2)}(u),$ перепишем систему (14) в виде:

$$-\left(\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n+\kappa_1\right)H_0^{(2)}(u)+j\sigma\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}+\mu_1e^{-ju}H_1^{(2)}(u)+\sum_{n=2}^{N+1}H_n^{(2)}(u)=0,$$

$$-(\lambda+\mu_1)H_1^{(2)}(u)+\lambda e^{ju}H_1^{(2)}(u)+(\lambda e^{ju}+\kappa_1)H_0^{(2)}(u)-j\sigma\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}=0,$$

$$-(\lambda+\mu_n)H_n^{(2)}(u)+\lambda e^{ju}H_n^{(2)}(u)+\alpha_nH_0^{(2)}(u)=0,\ n=\overline{2,N+1},$$

$$\lambda H_0^{(2)}(u)+(\lambda-\mu_1e^{-ju})H_1^{(2)}(u)+\lambda\sum_{n=2}^{N+1}H_n^{(2)}(u)=0. \tag{15}$$

В предельном условии большой задержки на орбите обозначим $\sigma=\varepsilon^2$, введем следующие замены:

$$u=w\varepsilon,\ H_k^{(2)}(u)=F_k^{(2)}(w,\varepsilon),\ \ k=\overline{0,N+1},$$

в результате получим систему:

$$-\left(\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n+\kappa_1\right)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu_1e^{-jw\varepsilon}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\sum_{n=2}^{N+1}F_n^{(2)}(w,\varepsilon)=0,$$

$$-(\lambda+\mu_1)F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\lambda e^{jw\varepsilon}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+(\lambda e^{jw\varepsilon}+\kappa_1)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)-j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0,$$

$$-(\lambda+\mu_n)F_n^{(2)}(w,\varepsilon)+\lambda e^{jw\varepsilon}F_n^{(2)}(w,\varepsilon)+\alpha_nF_0^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\ \ n=\overline{2,N+1},$$

$$\lambda F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+(\lambda-\mu_1e^{-jw\varepsilon})F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\lambda\sum_{n=2}^{N+1}F_n^{(2)}(w,\varepsilon)=0. \tag{16}$$

Найдем решение системы (16) в следующем виде:

$$F_k^{(2)}(w,\varepsilon)=\Phi_2(w)\{r_k+jw\varepsilon f_k\}+o\left(\varepsilon^2\right),\ \ k=\overline{0,N+1}. \tag{17}$$

Подставляя разложение (17) в систему (16), учитывая (11) и выполняя несложные преобразования, получим

$$-\left(\kappa_1+\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)f_0+\sum_{k=1}^{N+1}\mu_kf_k=\mu_1r_1-\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}r_0,$$

$$(\kappa_1+\lambda)f_0-\mu_1f_1=-\lambda r_0-\lambda r_1+\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}r_0,$$

$$-\mu_nf_n+\alpha_nf_0=-\lambda r_n,\ \ n=\overline{2,N+1},$$

$$\lambda f_0-(\mu_1-\lambda)f_1+\lambda\sum_{n=2}^{N+1}f_n=-\mu_1r_1.$$

Из полученной системы можем сделать вывод, что выражение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w, следовательно, функцию $\Phi_2(w)$ можно представить в виде: $\Phi_2(w)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$ что соотносится с (13). Перепишем последнюю систему в виде:

$$-\left(\kappa_1+\lambda+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)f_0+\sum_{k=1}^{N+1}\mu_kf_k=\mu_1r_1+\kappa_2r_0,$$

$$(\kappa_1+\lambda) f_0-\mu_1 f_1=-\lambda r_0-\lambda r_1-\kappa_2 r_0,$$
$$-\mu_n f_n+\alpha_n f_0=-\lambda r_n,\ n=\overline{2,N+1},$$
$$\lambda f_0-(\mu_1-\lambda) f_1+\lambda\sum_{n=2}^{N+1} f_n=-\mu_1 r_1. \tag{18}$$

Подставляя значения вероятностей r_k в систему (18), получим следующие выражения для функций f_n:

$$f_1=\frac{\lambda(1+\nu_1)}{\mu_1-\lambda} f_0+\frac{\lambda^2\nu_2}{\mu_1(1+\nu_1)}+\frac{\lambda}{\mu_1-\lambda},\quad f_n=\frac{\alpha_n}{\mu_n} f_0+\frac{\lambda(\mu_1-\lambda)\alpha_n}{\mu_1\mu_n^2(1+\nu_1)},\ n=\overline{2,N+1},$$

где $\nu_1=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\mu_n}$, $\nu_2=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\mu_n^2}$. Подставляя эти выражения во второе уравнение системы (18), мы получим искомый параметр κ_2. Нужно отметить, что неизвестная величина f_0 уже не входит в выражение для κ_2, поэтому он однозначно определяется равенством

$$\kappa_2=\frac{\lambda\mu_1(\mu_1-\lambda)(\nu_1-\lambda\nu_2)+\lambda^2(\mu_1+\lambda\nu_1)}{(\mu_1-\lambda)^2}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа поступивших заявок в RQ-системе с несколькими типами вызываемых заявок является гауссовским с параметрами κ_1/σ и κ_2/σ, что позволяет для допредельного распределения $P(i)$ построить аппроксимацию, в частности аппроксимацию $P^{(2)}(i)$ вида

$$P^{(2)}(i) = (L(i + 0,5) - L(i - 0,5))(1 - L(-0,5))^{-1}, \tag{19}$$

где $L(x)$ – функция нормального распределения с параметрами κ_1/σ и κ_2/σ.

4. Точность аппроксимации

Точность аппроксимации $P^{(2)}(i)$ определим с помощью расстояния Колмогорова $\Delta_2=\max_{0\le i\le N}\left|\sum_{\nu=0}^{i}\left(P^{(2)}(\nu)-P(\nu)\right)\right|$, которое показывает разницу между распределением $P(i)$ и $P^{(2)}(i)$, где $P(i)$ получено с использованием обратного преобразования Фурье допредельной характеристической функции числа поступивших заявок в системе, найденного численно, а аппроксимация $P^{(2)}(i)$ построена на основе гауссовской аппроксимации.

Расстояние Колмогорова

	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,05$	$\sigma = 0,035$	$\sigma = 0,02$	$\sigma = 0,01$
Δ_2	0,063	0,036	0,027	0,025	0,022	0,02

Положим $N = 3$, $\lambda = 0,2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$. В табл. 1 приведены значения расстояния Колмогорова при заданном наборе параметров и различных значениях параметра σ.

Заключение

В предложенной работе рассмотрена RQ-система с N типами вызываемых заявок. Были найдены асимптотики первого и второго порядков числа поступивших заявок в системе в асимптотическом условии большой задержки на орбите. На основе полученных асимптотик построена гауссовская аппроксимация распределения вероятностей числа поступивших заявок в системе. Численные результаты показывают, что точность гауссовской аппроксимации растет с уменьшением параметра σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial queueing systems: a computational approach. Berlin : Springer, 2008. 320 p.
2. Falin G., Templeton J.G.C. Retrial queues. CRC Press, 1997. 320 p.
3. Bhulai S., Koole G. A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48 (8). P. 1434–1438.
4. Aguir S., Karaesmen F., Akşin O.Z., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance // OR Spectrum. 2004. V. 26 (3). P. 353–376.
5. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Markovian retrial queues with two-way communication // Journal of industrial and management optimization. 2012. V. 8 (4). P. 781–806.
6. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two-way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37 (4). P. 1811–1822.
7. Phung-Duc T., Rogiest W. Two-way communication retrial queues with balanced call blending // Lecture Notes in Computer Science. 2012. V. 7314. P. 16–31.
8. Sakurai H., Phung-Duc T. Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research. 2015. V. 23 (2). P. 466–492.
9. Nazarov A.A., Paul S.V., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. // 31th European Conference on Modelling and Simulation. 2017. P. 687–693.
10. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S. Heavy Outgoing Call Asymptotics for MMPP/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 28–41.

Поступила в редакцию 9 декабря 2018 г.

Nazarov A.A., Paul S.V., Lizyura O.D. (2019) ASYMPTOTIC ANALYSIS OF RETRIAL QUEUE WITH N TYPES OF OUTGOING CALLS UNDER LOW RATE OF RETRIALS CONDITION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 48. pp. 13–20

DOI: 10.17223/19988605/48/2

In this paper, we consider Markovian retrial queue with two-way communication and multiple types of outgoing calls, which could be used as a mathematical model of a call center operator. Incoming calls arrive at system according to a Poisson process with rate λ. Service times of incoming calls follow the exponential distribution with rate μ_1. Upon arrival, an incoming call either occupies the server if it is idle or joins an orbit if the server is busy. Incoming calls stay in orbit for exponentially distributed time with rate σ. From the orbit, an incoming call retries to occupy the server and behaves the same as a fresh incoming call.

On the other hand, the server makes outgoing calls after some exponentially distributed idle time. We assume that there are N types of outgoing calls whole durations follow N distinct distributions.

We consider a random process of the number of incoming calls at the system. The aim of the research is to derive an asymptotic stationary characteristic function of this process under the low rate of retrials condition and to find the parameters of the stationary distribution of this process. To use the asymptotic analysis method we have obtained the Kolmogorov equation system for probability distribution of a 2-dimentional random process of the number of incoming calls in the system and the state of the server. We have also converted the Kolmogorov equation system for probabilities to the Kolmogorov equation system for the partial characteristic functions.

We derived the explicit expression for the characteristic function of the number of incoming calls in the system and discovered that it is difficult to apply this result. We then extend the study to use the asymptotic analysis method under the low rate of retrials limit condition to research the model.

The first order asymptotic only defines the distribution of probabilities of the server state r_k and the mean value κ_1 of the random process of the number of incoming calls in the system. The second order asymptotic shows that the asymptotic probability distribution of the number of incoming calls in the system is Gaussian with the mean κ_1/σ and variance κ_2/σ.

Based on the obtained asymptotic, we have built the Gaussian approximation of the probability distribution of the number of incoming calls in the system. Our numerical results have revealed that the accuracy of Gaussian approximation increases while decreasing σ.

Keywords: retrial queue; outgoing calls; asymptotic analysis method; low rate of retrials condition; Gaussian approximation.

NAZAROV Anatoly Andreevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

PAUL Svetlana Vladimirovna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: paulsv82@mail.ru

LIZYURA Olga Dmitrievna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: oliztsu@mail.ru

REFERENCES

1. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial queueing systems: a computational approach*. Berlin: Springer.
2. Falin, G. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. CRC Press.
3. Bhulai, S. & Koole, G. (2003) A queueing model for call blending in call centers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 48(8). pp. 1434–1438. DOI: 10.1109/TAC.2003.815038
4. Aguir, S., Karaesmen, F., Akşin, O.Z., & Chauvet, F. (2004) The impact of retrials on call center performance. *OR Spectrum*. 26(3). pp. 353–376. DOI: 10.1007/s00291-004-0165-7
5. Artalejo, J. R. & Phung-Duc, T. (2012) Markovian retrial queues with two-way communication. *Journal of Industrial and Management Optimization*. 8(4). pp. 781–806. DOI: 10.3934/jimo.2012.8.781
6. Artalejo, J.R. & Phung-Duc, T. (2013) Single server retrial queues with two-way communication. *Applied Mathematical Modelling*. 37(4). pp. 1811–1822. DOI: 10.1016/j.apm.2012.04.022
7. Phung-Duc, T. & Rogiest, W. (2012) Two-way communication retrial queues with balanced call blending. *Lecture Notes in Computer Science*. 7314. pp. 16–31.
8. Sakurai, H. & Phung-Duc, T. (2015) Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls. *TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*. 23(2). pp. 466–492. DOI: 10.1007/s11750-014-0349-5
9. Nazarov, A.A., Paul, S.V. & Gudkova, I. (2017) Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. *31th European Conference on Modelling and Simulation*. pp. 687–693. DOI: 10.7148/2017-0687
10. Nazarov, A., Phung-Duc, T. & Paul, S. (2017) Heavy Outgoing Call Asymptotics for MMPP/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication. *Communications in Computer and Information Science*. 800. pp. 28–41. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_3