

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский университет дружбы народов
Российский фонд фундаментальных исследований
Математический Фонд Крыма

*Посвящается 100-летнему юбилею образования Таврического
университета в Крыму*

**Сборник материалов международной конференции
КРОМШ-2018**

XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по
спектральным и эволюционным задачам

Секции 4 - 9

Секция 4. Дифференциальные уравнения в частных производных

Секция 5. Теория управления, теория игр и экономическое поведение

Секция 6. Численный анализ и приближенные методы

Секция 7. Математическое моделирование

*Секция 8. Дискретная математика и информатика. Методика преподавания математики
в высшей школе и история математики*

*Секция 9. Теория вероятностей. Случайные процессы. Финансовая математика.
Математическая статистика.*



Симферополь
«Полипринт»
2018

УДК: 517.21

УЛУЧШЕННАЯ ПРОЦЕДУРА ВЫБОРА МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ФУНКЦИИ СНОСА В ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ

ПЕРЕЛЕВСКИЙ С. С., ПЧЕЛИНЦЕВ Е. А.

Томский Государственный Университет (Россия, Томск)

E-mail: evgen-pch@yandex.ru, slavaperelevskiy@mail.ru

В работе рассматривается задача робастного адаптивного непараметрического оценивания коэффициента сноса в диффузионных процессах. Предлагается адаптивная процедура выбора модели на основе улучшенных взвешенных оценок МНК. Установлено, что оценка имеет более высокую среднеквадратическую точность, чем оценка МНК. Получено точное оракульное неравенство для квадратического риска предложенной процедуры оценивания.

Ключевые слова: улучшенная оценка, стохастический процесс, среднеквадратичная точность, выбор модели, неравенство оракула.

IMPROVED PROCEDURE FOR THE SELECTION OF MODELS FOR ESTIMATING FUNCTIONS DRIFT IN DIFFUSION MODELS

PERELEVSKIY S. S., PCHELINTSEV E. A.

Tomsk State University (Russia, Tomsk)

In this paper, we consider the robust adaptive non parametric estimation problem for the drift coefficient in diffusion processes. An adaptive model selection procedure, based on the improved weighted least square estimates, is proposed. Sharp oracle inequalities for the robust risk have been obtained.

Keywords: improved estimation, stochastic diffusion process, mean-square accuracy, model selection, sharp oracle inequality.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство с фильтрацией, на котором задано стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида:

$$dy_t = S(y_t) dt + dw_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $(w_t)_{t \geq 0}$ – стандартный скалярный винеровский процесс, начальное значение y_0 некоторая заданная константа, и $S(\cdot) \in \Sigma_{L,N}$, $\Sigma_{L,N}$ определенная в [2], неизвестная функция. Задача состоит в том, чтобы оценить функцию $S(x)$, $x \in [a, b]$, по наблюдениям $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$, построить адаптивную оценку S^* коэффициента сноса S в (1). Для оценивания функции S в [1] предложена асимптотически эффективная процедура выбора модели на основе взвешенных оценок МНК. Поскольку неасимптотическое качество оценивания в непараметрических моделях, как правило, низкое, то актуальной является задача его улучшения. Для повышения точности оценивания в моделях с непрерывным временем в работах [3, 4] развит метод Джеймса-Стейна, суть которого заключается в построении специальной процедуры сжатия оценок МНК. В данной работе для оценивания функции S в (1) предлагается адаптивная улучшенная процедура выбора модели. Для квадратического риска построенной процедуры получено точное оракульное неравенство, позволяющее доказать ее эффективность.

Предлагается оценка функции S следующего вида

$$S_\lambda^*(x_l) = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \theta_{j,n}^* \phi_j(x_k) \mathbf{1}_\Gamma, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2)$$

и положим $a \leq x \leq b$

$$S_\lambda^*(x) = S_\lambda^*(x_1)_{\{a \leq x \leq x_k\}} + \sum_{k=2}^n S_\lambda^*(x_k)_{\{x_{k-1} < x \leq x_k\}}. \quad (3)$$

где $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, Γ – некоторое событие, такое что $\mathbf{P}(\bar{\Gamma}) \rightarrow 0$, при $T \rightarrow \infty$,

$$\theta_{j,n}^* = \left(1 - \frac{c(d)}{\|\hat{\theta}_n\|_{\{1 \leq j \leq d\}}} \right) \hat{\theta}_{j,n}, \quad c(d) = \frac{(d-1)\sigma_*^2 L(b-a)^{1/2}}{n(s^* + \sqrt{d}\sigma_*/n)}, \quad \|\hat{\theta}_n\|^2 = \sum_{j=1}^d \theta_{j,n}^2.$$

Величина ϵ_T , s^* определена в [2].

Теорема 1. Оценка (2) превосходит по среднеквадратической точности оценку МНК, т.е.

$$\sup_{S \in \Sigma_{L,N}} \Delta_n(S) < -c^2(d),$$

где

$$\Delta_n(S) := E_S \|S_\lambda^* - S\|_n^2 - E_S \|\widehat{S}_\lambda - S\|_n^2.$$

Теорема 2. Пусть $\Lambda \subset [0, 1]^n$ любое конечное множество. Тогда для некоторого $n \geq 3$ и $0 < \rho < 1/6$, процедура выбора модели S^* удовлетворяет следующему оракульному неравенству

$$E_S \|S^* - S\|_n^2 \leq \frac{1 + 6\rho}{1 - 6\rho} \min_{\lambda \in \Lambda} E_S \|S_\lambda^* - S\|_n^2 + \frac{\Psi_n(\rho)}{n},$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(\rho)/n = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models. *Journal of Nonparametric Statistics*. 2009. V. 21. No. 1. P. 1-16.
- [2] Galtchouk, L.I. and Pergamenshchikov, S.M. (2006) Asymptotically efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes // *Statistical Inference for Stochastic Processes*. **9**, 1-16.
- [3] Konev V., Pergamenshchikov S. and Pchelintsev E., Estimation of a Regression with the Pulse Type Noise from Discrete Data // *Theory Probab. Appl.* 2014. 58(3). 442-457.
- [4] Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // *Statistical Inference for Stochastic Processes*

УДК: 519.218.2

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА \mathbb{Z}^d С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ

ПЛАТОНОВА М. В., РЯДОВКИН К. С.

ПОМИ РАН, Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет (Россия, Санкт-Петербург)

E-mail: kryadovkin@gmail.com, mariyaplat@rambler.ru

Рассматривается модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем на решетке \mathbb{Z}^d с источниками ветвления, расположенными периодически на \mathbb{Z}^d . Исследуются спектральные свойства оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц в произвольной точке решетки. Для среднего числа частиц в фиксированной точке при $t \rightarrow \infty$ получен старший член асимптотики, а при выполнении дополнительного моментного условия получено асимптотическое разложение.

Ключевые слова: Ветвящееся случайное блуждание, периодическое возмущение, прямой интеграл, самосопряженный оператор, эволюционное уравнение.

BRANCHING RANDOM WALKS ON \mathbb{Z}^d WITH PERIODIC SOURCES OF THE BRANCHING

PLATONOVA MARIAA, RYADOVKIN KIRILL

PDMI RAN, Chebyshev Laboratory, St. Petersburg State University (Russia, St. Petersburg)

We consider a continuous-time branching random walk on \mathbb{Z}^d with birth and death of particles at a periodic set of points (the sources of branching). Spectral properties of an evolution operator of the mean number of particles are studied. We obtain the leading term of the asymptotics of the mean value of particle number. We also derive a representation of the mean value of particle number in a form of asymptotic series under some additional moment condition.

Keywords: branching random walk, periodic perturbation, direct integral, self-adjoint operator, evolutionary equation.

Рассматривается модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем на решетке \mathbb{Z}^d . Предполагается, что частицы эволюционируют независимо друг от друга, а источники ветвления расположены периодически. Мы считаем, что с частицей, находящейся в момент времени t в некоторой точке $v \in \mathbb{Z}^d$, независимо от остальных частиц в системе, может за время $[t, t + h)$ произойти одно из следующих событий: