

УДК 535.3

Н.Н. КОНОБЕЕВА, М.Б. БЕЛОНЕНКО

ZITTERBEWEGUNG В AdS-ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ КОСМИЧЕСКОЙ СТРУНЫ*

Рассмотрен Zitterbewegung (ZB)-эффект, индуцируемый в AdS (anti-de Sitter)-пространстве-времени космической струной. Вблизи космической струны эффекты кривизны играют главенствующую роль. ZB-эффект был рассчитан на основе уравнения Дирака в кривом пространстве-времени. Получено выражение для тока. Проанализирована его эволюция и зависимость от удаления от горизонта событий.

Ключевые слова: космическая струна, дрожащее движение, пространство анти-де Ситтера.

Введение

Интерес к AdS-пространству-времени обусловлен несколькими причинами.

Первоначально это было связано с основными вопросами квантования полей для изогнутых пространств. Отсутствие глобальной гиперболичности и наличие как регулярных, так и нерегулярных мод порождает ряд новых явлений, не имеющих аналогов в квантовой теории поля в объеме Минковского [1].

В качестве второй причины можно назвать тот факт, что AdS-пространство-время является основным состоянием в супергравитации и теориях Калуцы – Клейна. Геометрия AdS играет решающую роль в двух популярных направлениях теоретической физики – AdS/CFT-соответствие [2] и мировой сценарий Брейна [3].

С другой стороны, не меньший интерес вызывают космические струны, которые можно определить как простейшие модели пространства-времени с топологическими дефектами [4]. Они имеют ряд косвенных подтверждений, таких, как гамма-всплески [5], гравитационные волны [6] и космические лучи с высокой энергией [7].

Гравитационные эффекты космической струны на фоне AdS-пространства-времени рассмотрены в [8]. Изученные в работах [9] поляризационные эффекты вакуума для квантовых полей для геометрии космической струны в пространстве-времени Минковского были обобщены на случай искривленного пространства-времени. Так, квантовые эффекты для скалярных и фермионных полей в пространстве-времени AdS были рассмотрены в [10]. Между тем часть квантовых эффектов осталась вне внимания исследователей. Прежде всего, это относится к эффекту Zitterbewegung (дрожащее движение) в пространстве-времени космической струны.

Эффект ZB [11, 12] может наблюдаться в любой системе, в описании которой оператор скорости не коммутирует с гамильтонианом. Стоит отметить, что при рассмотрении ZB-эффекта в кривом пространстве-времени возникает ряд технических трудностей, которые связаны с незамкнутостью системы операторных уравнений. Для решения этих сложностей предлагается переход к картине Шредингера [13], в которой зависимыми от времени являются волновые функции, а не операторы.

1. Основные уравнения

Метрика космической струны имеет вид [14]

$$ds^2 = e^{-2y/a} (-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2) + dy^2, \quad (1)$$

где $r \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi/q]$, $(t, y) \in (-\infty; \infty)$. Точки (r, ϕ, z) и $(r, \phi + 2\pi/q, z)$ должны быть определены. Параметр a связан с космологической постоянной и скаляром Риччи; $q > 1$ означает наличие космической струны.

Используя координату Пуанкаре $z = ae^{y/a}$, можно переписать метрику (1) в виде

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание № 2.852.2017/4.6).

$$ds^2 = (a/z)^2 (-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2). \quad (2)$$

Уравнение Дирака тогда принимает следующий вид:

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m \right] \Psi = 0. \quad (3)$$

Здесь γ^μ – матрицы Дирака в кривом пространстве-времени; Γ_μ – спинорные связности, которые определяются матрицами Дирака для плоского пространства-времени:

$$\gamma^\mu = e_{(a)}^\mu \gamma^{(a)}, \Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu;\mu}. \quad (4)$$

Точка с запятой означает ковариантную производную; $e_{(a)}^\mu$ – тетрадный базис, который удовлетворяет соотношению $e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu}^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}$, где η^{ab} – метрический тензор Минковского. Матрицы Дирака для плоского пространства имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma^{(0)} &= -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(a)} = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & -\sigma_a \end{pmatrix}, \\ I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5)$$

где σ_a – матрицы Паули, причем они подчиняются алгебре Клиффорда.

Для космической струны, согласно [14], можно записать

$$e_{(a)}^\mu = \frac{z}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q\phi) & -\frac{\sin(q\phi)}{r} & 0 \\ 0 & \sin(q\phi) & \frac{\cos(q\phi)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из формул (4) – (6) получаем явное выражение для обобщенных матриц Дирака:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \frac{z}{a} \gamma^{(0)}, \quad \gamma^i = -i \frac{z}{a} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \\ \sigma^r &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\phi = -\frac{i}{r} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ -e^{-iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно формулам, приведенным выше, можно получить компоненты спинорной связности [14]:

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{2a} \gamma^{(3)} \gamma_\mu + \frac{(1-q)}{2} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \delta_\mu^\phi, \Gamma_z = 0. \quad (8)$$

Уравнение Дирака можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\sigma^l \partial_l - \frac{3}{2z} \sigma^z + \frac{1-q}{2r} \sigma^r - \frac{ma}{z} \right) \Psi_1 - iE \Psi_2 &= 0, \\ \left(\sigma^l \partial_l - \frac{3}{2z} \sigma^z + \frac{1-q}{2r} \sigma^r + \frac{ma}{z} \right) \Psi_2 - iE \Psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} e^{iEt}$.

Согласно (9), гамильтониан в матричной форме может быть записан как

$$H = \begin{pmatrix} \sigma^l \partial_l - \frac{3}{2z} \sigma^z + \frac{1-q}{2r} \sigma^r - \frac{ma}{z} & -iE \\ -iE & \sigma^l \partial_l - \frac{3}{2z} \sigma^z + \frac{1-q}{2r} \sigma^r + \frac{ma}{z} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Далее переходим к картине Шредингера:

$$\hat{r} = \hat{r}|_0, \quad |\Psi\rangle = |\Psi(t)\rangle, \quad (11)$$

что позволяет нам вычислить ток по формуле

$$j = \langle \Psi(t) | \dot{r} | \Psi(t) \rangle. \quad (12)$$

Так как $i\dot{\Psi} = H\Psi$ или в представлении собственных чисел $|\Psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha} e^{i\varepsilon_{\alpha} t} |\Psi(t)\rangle_{\alpha}|_0$, легко получаем формулу для тока:

$$j = -i \langle \Psi(t) | [r, H] | \Psi(t) \rangle.$$

В рассматриваемом случае космической струны соответствующие собственные функции есть [14]

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 e^{iqn_1 \phi} J_{\beta_1}(\lambda r) z^2 J_{\nu_2}(kz) \\ B_2 e^{iqn_2 \phi} J_{\beta_2}(\lambda r) z^2 J_{\nu_1}(kz) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$B_1 = \frac{i}{E} (kC_1 - \varepsilon_{n_1} \lambda C_2), \quad B_2 = \frac{i}{E} (\varepsilon_{n_1} \lambda C_1 + kC_2),$$

$$\nu_l = ma + 0.5(-1)^l, \quad n_2 = n_1 + 1,$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \varepsilon_{n_1} (\varepsilon_{n_1} = \text{sign}(n)), \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Окончательно выражение для тока принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} j(r, t) = \int dE e^{-\frac{(E-E_0)^2}{\Delta^2}} & \left(|C_1|^2 \left(e^{iq\phi} \Psi_2^*(E) \Psi_1(E) - e^{-iq\phi} \Psi_1^*(E) \Psi_2(E) \right) + \right. \\ & + C_1^* C_2 e^{-2iEt} \left(e^{iq\phi} \Psi_2^*(E) \Psi_1(-E) - e^{-iq\phi} \Psi_1^*(E) \Psi_2(-E) \right) + \\ & + C_1 C_2^* e^{2iEt} \left(e^{iq\phi} \Psi_2^*(-E) \Psi_1(-E) - e^{-iq\phi} \Psi_1^*(-E) \Psi_2(-E) \right) + \\ & \left. + |C_2|^2 \left(e^{iq\phi} \Psi_2^*(-E) \Psi_1(-E) - e^{-iq\phi} \Psi_1^*(-E) \Psi_2(-E) \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь Δ – ширина волнового пакета.

2. Обсуждение

Зависимость тока от времени, согласно (14), представлена на рис. 1.

Отметим, что величина колебаний тока при ZB-эффекте в приведенных графиках уменьшается при удалении от горизонта событий. Это можно объяснить следующим образом. Несмотря на то, что на больших расстояниях от горизонта событий эффекты, связанные с кривизной, уменьшаются, имеет место степенная зависимость поля частицы от расстояния в противоположность пространству Минковского, для которого массивные поля частицы, индуцированные струной, экспоненциально уменьшаются.

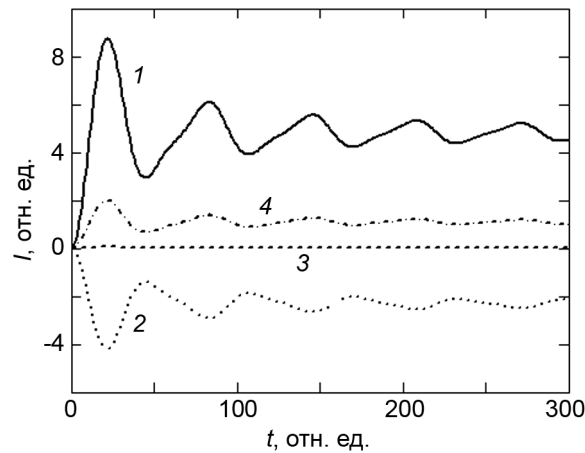


Рис. 1. Зависимость тока от времени: кр. 1 – $r = 2$ отн. ед.; кр. 2 – $r = 4$ отн. ед.; кр. 3 – $r = 6$ отн. ед.; кр. 4 – $r = 8$ отн. ед.

Зависимость тока от расстояния до горизонта событий является более сложной и представлена на рис. 2 для выбранного момента времени.

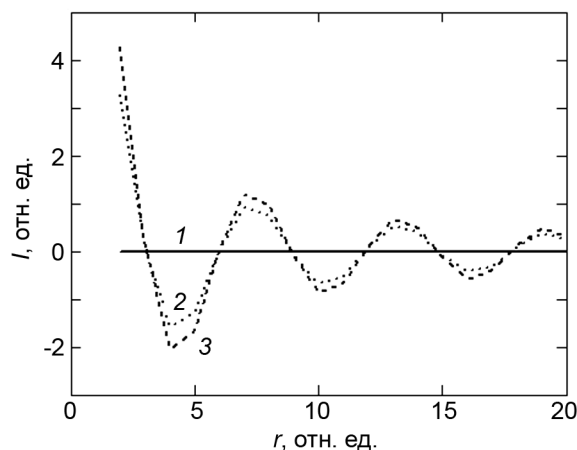


Рис. 2. Зависимость тока от r : кр. 1 – $t = 0$; кр. 2 – $t = 50$ отн. ед.; кр. 3 – $t = 100$ отн. ед.

В таком срезе наблюдается аналогичное поведение тока, а именно его уменьшение при удалении от горизонта событий.

Вследствие «дрожащего» движения в рассматриваемой системе имеют место два эффекта. Во-первых, излучение электромагнитного поля, обусловленное ускоренным движением электронов. Здесь можно говорить даже об экспериментальной проверке, если и детектировать фотоны, которые будет излучать электрон при прохождении вблизи него космической струны. А во-вторых, накопление заряда, возникающее из-за неоднородности тока по пространству. Учет этого накопления может оказать существенное влияние на динамику электронов при решении многочастичных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shao S.-H., Chen P., and Gu J. - A. // Phys. Rev. D. – 2010. – V. 81. – P. 084036.
2. Aharony O., Gubser S.S., Maldacena J., et al. // Phys. Rep. – 2000. – V. 323. – P. 183.
3. Brax P. and Van de Bruck C. // Classical Quantum Gravity. – 2003. – V. 20. – P. R201; Maartens R. and Koyama K. // Living Rev. Relativity. – 2010. – V. 13. – P. 5.
4. Polchinski J. // String Theory: From Gauge Interactions to Cosmology. – Netherlands: Springer, 2005.
5. Berezhinski V., Hnatyk B., and Vilenkin A. // Phys. Rev. D. – 2001. – V. 64. – P. 043004.
6. Damour T. and Vilenkin A. // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 85. – P. 3761.
7. Bhattacharjee P. and Sigl G. // Phys. Rep. – 2000. – V. 327. – P. 109.

8. Ballon Bayona C.A., Ferreira C.N., and Vasquez Otoyа V.J. // Class. Quantum Grav. – 2011. – V. 28. – P. 015011.
9. Bezerra de Mello E.R., Bezerra V.B., and Saharian A.A. // Phys. Lett. B. – 2007. – V. 645. – P. 245.
10. Bezerra de Mello E.R. and Saharian A.A. // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – V. 45. – P. 115402.
11. Zawadzki W. Optical Properties of Solids. – N.Y.: Gordon and Breach, 1970.
12. Schroedinger E. // Sitzunber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. – 1930. – V. 24. – P. 418.
13. Konobeeva N.N. and Belonenko M.B. // Physica B: Cond. Matt. – 2014. – V. 456. – P. 115.
14. Bezerra de Mello E.R., Figueiredo Medeiros E.R., and Saharian A.A. // Class. Quantum Grav. – 2013. – V. 30. – P. 175001.

Поступила в редакцию 08.10.18.

Волгоградский государственный университет, г. Волгоград, Россия

Конобеева Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., доцент каф. информационных систем и компьютерного моделирования, e-mail: yana_nn@volsu.ru;

Белоненко Михаил Борисович, д.ф.-м.н., профессор, e-mail: belonenko@volsu.ru.