Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Институт проблем точной механики и управления РАН
Правительство Саратовской области

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Материалы Международной научной конференции

2–3 июля 2018 г.

Саратов

Саратов
Издательский центр «Наука»
2018

[6] *Bron C., Kerbosch J.* Algorithm 457: finding all cliques of an undirected graph // Communications of the ACM. — 1973. — Vol. 16, no. 9. — P. 575–579.

[7] *Tomita E., Tanaka A., Takahashi H.* The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments // Theoretical Computer Science. — 2006. — Vol. 363, Iss. 1. — P. 28–42.

[8] *Wilf H. S.* The number of maximal independent sets in a tree // SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods. — 1986. — Vol. 7, Iss. 1. — P. 125–130.

[9] DIMACS benchmark set. — URL: `http://iridia.ulb.ac.be/~fmascia/maximum_clique/DIMACS-benchmark`.

Асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с нетерпеливыми заявками

Выговская О. А.[1], Данилюк Е. Ю.[2], Моисеева С. П.[3]
[1]*osipovich.olga@bk.ru*, [2]*daniluc_elena@sibmail.com*, [3]*smoiseeva@mail.ru*
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия

Рассматривается многолинейная RQ-система с нетерпеливыми заявками M|M|N, время задержки заявок на орбите и время «терпеливости» заявок распределены экспоненциально. Исследуется процесс, описывающий число заявок на орбите в рассматриваемой системе массового обслуживания. Показано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид нормального распределения.

Ключевые слова: RQ-система, нетерпеливые заявки, асимптотический анализ

Введение

Использование моделей систем массового обслуживания с источником повторных вызовов, Retrial Queueing (RQ) System, актуально для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и др. [1–3]. Системы с отказами в обслуживании вызывают большой интерес у исследователей. Характерной чертой таких систем является наличие повторных обращений заявок, находящихся на орбите, к обслуживающему прибору спустя некоторое случайное время после неудачной попытки получить обслуживание. Такие ситуации могут быть вызваны не только отсутствием свободных серверов в моменты поступления заявок, но и некоторыми техническими причинами. В классических моделях RQ-систем предполагается один обслуживающий прибор, но реальные инфокоммуникационные системы, как правило, являются многолинейными с более чем одним обслуживающим прибором (оператором).

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему с блоком, состоящим из N обслуживающих приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, заставшая хотя бы один из N приборов свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Если все приборы заняты, то поступившая заявка переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему блоку с повторной попыткой получить обслуживание. Если хотя бы один из N приборов свободен, то заявка с орбиты занимает его на случайное время обслуживания, если же все заняты, то заявка мгновенно возвращается на орбиту для реализации следующей задержки случайной продолжительности. В то же время заявка, находящаяся на орбите, после случайного времени, имеющего экспоненциальное распределение с параметром α, покидает систему [4, 5].

2. Система уравнений Колмогорова

Пусть $i(t)$ — число заявок на орбите, а $k(t)$ определяет число занятых приборов в системе следующим образом

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если все приборы свободны;} \\ 1, & \text{если 1 прибор занят;} \\ 2, & \text{если 2 прибора заняты;} \\ \dots & \\ N, & \text{если все приборы заняты.} \end{cases}$$

Обозначим через $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k, i, t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k, $k = 0, 1, \dots, N$, и на орбите находится i заявок, $i = 0, 1, 2, \dots$. Причем процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Тогда ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите такой системы.

Для стационарного распределения вероятностей $\Pi_k(i) = \lim\limits_{t\to\infty} P(k,i,t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы запишем систему уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma + i\alpha)\,\Pi_0(i) + \mu\Pi_1(i) + (i+1)\alpha\Pi_0(i+1) = 0, \quad \text{если} \quad k=0, \\ -(\lambda + i\sigma + i\alpha + k\mu)\,\Pi_k(i) + \lambda\Pi_{k-1}(i) + (i+1)\sigma\Pi_{k-1}(i+1) + \\ \qquad + (i+1)\alpha\Pi_k(i+1) + (k+1)\mu\Pi_{k+1}(i) = 0, \quad \text{если} \quad k = 1,\ldots,N-1, \\ -(\lambda + i\alpha + N\mu)\,\Pi_N(i) + \lambda\Pi_{N-1}(i) + (i+1)\sigma\Pi_{N-1}(i+1) + \\ \qquad + (i+1)\alpha\Pi_N(i+1) + \lambda\Pi_N(i-1) = 0, \quad \text{если} \quad k=N. \end{cases} \tag{1}$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям $H_k(u) = \sum_i \exp^{jui}\Pi_k(i)$, где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Учитывая, что $H_k'(u) = j\sum_i i\exp^{jui}\Pi_k(i)$, система уравнений (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} j\left(\sigma + \alpha(1-\exp^{-ju})\right)H_0'(u) + \mu H_1(u) - \lambda H_0(u) = 0, \quad \text{если} \quad k=0, \\ j\left(\sigma + \alpha(1-\exp^{-ju})\right)H_k'(u) - \lambda H_{k-1}(u) - j\sigma\exp^{-ju}H_{k-1}'(u) - \\ \qquad - k\mu H_k(u) + (k+1)\mu H_{k+1}(u) = 0, \quad \text{если} \quad k=1,\ldots,N-1, \\ j\alpha\left(1-\exp^{-ju}\right)H_N'(u) + \lambda H_{N-1}(u) - j\sigma\exp^{-ju}H_{N-1}'(u) - \\ \qquad - \left(N\mu + \lambda(1-\exp^{ju})\right)H_N(u) = 0, \quad \text{если} \quad k=N. \end{cases} \tag{2}$$

Точное решение уравнения (2) в общем случае получить невозможно, но его можно решить при асимптотическом условии. В данной работе рассматривается асимптотическое условие долгой терпеливости, то есть при $\alpha \to 0$, и высокой загрузки системы.

3. Асимптотический анализ первого порядка

Введем обозначения $\alpha = \varepsilon$, $u = \varepsilon w$, $H_0(u) = \varepsilon^N F_0(w,\varepsilon)$, $H_1(u) = \varepsilon^{N-1}F_1(w,\varepsilon)$, $H_k(u) = \varepsilon^{N-k}F_k(w,\varepsilon)$, $\ldots$, $H_{N-1}(u) = \varepsilon F_{N-1}(w,\varepsilon)$, $H_N(u) = F_N(w,\varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$ — бесконечно малая величина. Тогда система уравнений (2) перепишется как

$$\begin{cases} j\left(\sigma + \varepsilon(1-\exp^{-j\varepsilon w})\right)\varepsilon^{N-1}F_0'(w,\varepsilon) + \mu\varepsilon^{N-1}F_1(w,\varepsilon) - \lambda\varepsilon^N F_0(w,\varepsilon) = 0, \quad \text{если} \quad k=0, \\ j\left(\sigma + \varepsilon(1-\exp^{-j\varepsilon w})\right)\varepsilon^{N-k-1}F_k'(w,\varepsilon) - \varepsilon^{N-k}(\lambda + k\mu)F_k(w,\varepsilon) - j\sigma\exp^{-j\varepsilon w}F_{k-1}'(w,\varepsilon) + \\ \qquad + (k+1)\mu\varepsilon^{N-k-1}F_{k+1}(w,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^{N-k}F_{k-1}(w,\varepsilon) = 0, \quad \text{если} \quad k=1,\ldots,N-1, \\ j\varepsilon\left(1-\exp^{-j\varepsilon w}\right)\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^{N-k-1}F_k'(w,\varepsilon) + \lambda\exp^{j\varepsilon w}\left(1-\exp^{-j\varepsilon w}\right)F_N(w,\varepsilon) + \\ \qquad + j\sigma\left(1-\exp^{-j\varepsilon w}\right)\sum\limits_{k=0}^{N-1}\varepsilon^{N-k-1}F_k'(w,\varepsilon) = 0, \quad \text{если} \quad k=N. \end{cases} \tag{3}$$

Совершив в (3) предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и обозначив $F_k(w) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_k(w,\varepsilon)$, получим

$$\begin{cases} j\alpha F_0'(w) = -\mu F_1(w), & \text{если} \quad k=0, \\ j\alpha F_k'(w) = -(k+1)\mu F_{k+1}(w), & \text{если} \quad k=1,\ldots,N-1, \\ -j\alpha F_{N-1}'(w) = jF_N'(w) + \lambda F_N(w), & \text{если} \quad k=N. \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) нетрудно показать, что $F_N(w) = \exp^{jw(\lambda - N\mu)}$.

Так как допредельная характеристическая функция $h(u)$ приближенно равна

$$h(u) = \sum_{k=0}^{N} H_k(u) = F_N\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon) \approx F_N\left(\frac{u}{\varepsilon}\right),$$

то асимптотическое приближение $h^{(1)}(u)$ первого порядка характеристической функции $h(u)$ можно записать в виде

$$h^{(1)}(u) = F_N\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = \exp\left\{\frac{ju}{\varepsilon}(\lambda - N\mu)\right\} = \exp\left\{ju\frac{\lambda - N\mu}{\alpha}\right\}.$$

4. Гауссовская аппроксимация

Аналогичным разделу (3) образом проведен асимптотический анализ второго порядка. Сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема. *Асимптотическая характеристическая функция второго порядка $h^{(2)}(u)$ для стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе M|M|N с нетерпеливыми заявками имеет вид*

$$h^{(2)}(u) = \exp\left\{ju\frac{\lambda - N\mu}{\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}\frac{u^2}{2}\right\}.$$

Вид функции $h^{(2)}(u)$ позволяет утверждать, что стационарное распределение числа заявок на орбите в RQ-системе M|M|N с конфликтами и нетерпеливыми заявками является асимптотически нормальным распределением.

Заключение

В работе проведено исследование многолинейной RQ-системы массового обслуживания с нетерпеливыми заявками. Показано, что распределение вероятностей числа заявок на орбите сходится к гауссовскому распределению в асимптотическом условии долгой терпеливости заявок и высокой загрузки системы.

Список литературы

[1] *Wilkinson R. I.* Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. — 1956. — Vol. 35, Iss. 2. — P. 421–514.

[2] *Artalejo J. R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. — Stockholm: Springer, 2008.

[3] *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. — London: Chapman & Hall, 1997.

[4] *Fedorova E., Voytikov K.* Retrial queue $M/G/1$ with impatient calls under heavy load condition // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. — Communications in Computer and Information Science. — 2017. — Vol. 800. — P. 347–357.

[5] *Данилюк Е. Ю.* Исследование однолинейной RQ-системы $M/M/1$ с конфликтами и нетерпеливыми заявками // Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (АРТСТ–2017): матер. Междунар. науч. конф. — М.: РУДН, 2017. — С. 101–106.

Программа для обработки цветометрических параметров тест-средств в химическом анализе

Габидулина М. К.[1], Говорухин В. А., Доронин С. Ю., Косырева И. В., Ли Е. П., Маракаева А. В., Такшаитова Э. И.

gabidulina.92@mail.ru[1]

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

Разработана программа для цветометрической обработки окрашенных зон твердых и жидких тест-средств на основе целлюлозных матриц и мицеллярно-насыщенных фаз неионных поверхностно-активных веществ.

Ключевые слова: тест-метод, тест-средство, аналитический сигнал, цветометрия, языки программирования php и JavaScript

Тест-системы — простые, портативные, легкие и дешевые аналитические средства и соответствующие экспрессные методики для обнаружения и определения веществ без существенной пробоподготовки, без использования сложных стационарных приборов, лабораторного оборудования, без самой лаборатории, без сложной обработки результатов, а также подготовленного персонала. В связи с широким распространением цифровой техники (сканеров, Web-камер, цифровых видеокамер, цифровых фотоаппаратов, смартфонов) и компьютерных программ обработки изображений (графических редакторов) представляет интерес изучение возможности применения этих устройств к задачам химического анализа объектов окружающей среды (ООС). Наиболее часто для обработки аналитического сигнала (окраска твердых и жидких тест-средств) применяют сканеры, цифровые фотоаппараты [1–5] и программу Adobe Photoshop, позволяющую получать значения интенсивностей цветовых параметров R, G, B, C, M, Y, K.

Нами разработана программа для математической обработки изображения на веб-платформе с использованием языков программирования (php и JavaScript) и разметки страницы html. Выбор данного «комплекса» был сделан по следующими причинам:

1) для начала работы с этой программой не требуется предварительного скачивания, установки на компьютер или какие-либо другие затраты времени, для работы требуется только устройство с доступом в Интернет;
2) достаточно запустить страницу программы в браузере, после чего загружается изображение для дальнейшей обработки и получения аналитического сигнала;
3) поскольку программа располагается на удаленном сервере, все вычисления и обработка выполняются на стороне сервера и не расходуют вычислительную мощность и батарею вашего устройства (если работа с программой происходит с планшета, телефона или ноутбука).

Кроме того, данный комплекс программ хорошо оптимизирован для работы как с новых браузеров, так и с устаревших версий (речь идет про JavaScript и html, т. к. только они работают на стороне клиента). Язык программирования php, выполняющий вычисления на стороне сервера, подходит для обработки тех объемов, что необходимы для цветометрической обработки аналитического сигнала в тест-методах химического анализа.

Алгоритм программы состоит из двух функций на стороне сервера и трех на стороне клиента: