Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Институт проблем точной механики и управления РАН
Правительство Саратовской области

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Материалы Международной научной конференции

2–3 июля 2018 г.

Саратов

Саратов
Издательский центр «Наука»
2018

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5
МОУ «СОШ № 1» `http://school-saratov.my1.ru`	контрастные ошибки, к 5 объектам отсутствует альтернативный текст	управляется с клавиатуры	недопустимый язык документа	отсутствует метка формы, пустые ссылки
МАОУ «Гимназия № 3» `http://gymn3saratov.ru`	воспринимаемость очень хорошая	отсутствует структура заголовка	недопустимый язык документа	принцип надёжности в целом соблюдён
МОУ «СОШ № 6» `http://sarsosh6.ru`	контрастные ошибки	управляется с клавиатуры	принцип понятности в целом соблюдён	отсутствует метка формы
МАОУ «Гимназия № 1» `http://sargymn1.ru`	контрастные ошибки, к 2 объектам отсутствует альтернативный текст	пропущен уровень заголовка	недопустимый язык документа	элемент управления формой не имеет метки
МОУ «СОШ № 9» `http://school9saratov.my1.ru`	контрастные ошибки, к 9 объектам отсутствует альтернативный текст	имеется прокручиваемый текст, который пользователь не может остановить	недопустимый язык документа	отсутствует метка формы
МОУ «Восточно-Европейский лицей» `http://моувел.рф/`	воспринимаемость хорошая	управляется с клавиатуры	принцип понятности в целом соблюдён	отсутствуют метки формы
МОУ «СОШ № 5» `http://mou-school-5.ucoz.ru`	контрастные ошибки, к 19 объектам отсутствует альтернативный текст	управляется с клавиатуры	недопустимый язык документа	отсутствует метка формы, пустые ссылки
МОУ «Гимназия № 5» `http://gm5sar.ucoz.ru`	большое число контрастных ошибок, к 7 объектам отсутствует альтернативный текст	управляется с клавиатуры	недопустимый язык документа	отсутствует метка формы

Таким образом, сайты выбранных для исследования школ не соответствуют или частично соответствуют требованиям доступности пользователям с нарушениями зрения.

Список литературы

[1] Приказ Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 29.05.2014 г. № 785 «Об утверждении требований к структуре официального сайта образовательной организации в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и формату представления на нём информации». — URL: `https://rg.ru/2014/08/21/rosobrnadzor-dok.html`.

[2] Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 27.11.2017 г. № 1968 «О внесении изменений в требования к структуре официального сайта образовательной организации в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и формату представления на нем информации, утвержденные приказом Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 29 мая 2014 г. № 785». — URL: `https://rg.ru/2017/12/28/minobr-prikaz1968-site-dok.html`.

[3] Национальный стандарт Российской Федерации ГОСТ Р 52872–2012 — Интернет-ресурсы. Требования доступности для инвалидов по зрению. — М.: Стандартинформ, 2014.

[4] WAVE. Web accessibility evaluation tool. — URL: `http://wave.webaim.org/`.

Гауссовская аппроксимация распределения вероятностей объемов занятых ресурсов в неоднородной бесконечнолинейной системе массового обслуживания с входящим MMPP-потоком

Галилейская А. А.[1], Лисовская Е. Ю.[2], Моисеева С. П.[3]

[1]*lusta.nastya@mail.ru*, [2]*ekaterina_lisovs@mail.ru*, [3]*smoiseeva@mail.ru*

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

Проведено исследование неоднородной ресурсной СМО с неограниченным числом приборов. Показано, что совместное распределение вероятности суммарного объема занятого ресурса каждого типа сходится к многомерному гауссовскому распределению в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, неоднородные системы, неограниченное число приборов, асимптотический анализ, условие растущей интенсивности, MMPP-поток

Введение

Одна из модификаций систем массового обслуживания (СМО) — системы с неоднородными приборами, которые применяются для описания процессов в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах. Как правило, в качестве математических моделей таких процессов используются системы с непуассоновскими входящими потоками.

Особенность таких систем наиболее часто встречается в практических задачах и заключается в том, что требования приходят поодиночке и независимо друг от друга, но они имеют абсолютно разную природу и соответственно требуют совершенно разного обслуживания. Такие ситуации моделируются с помощью неоднородных (гетерогенных) СМО с ординарными входящими потоками разнотипных заявок. К СМО с разнотипным обслуживанием обращаются в своих работах Ю. Дудовская и О. Якубович [1], А. Зейфман [2].

Необходимым для таких моделей является введение различных параметров обслуживания и различных законов обслуживания наряду с ненадежностью серверов, которые оказывают существенное влияние на функционирование системы и, таким образом, это играет важную роль в практическом моделировании компьютерных и коммуникационных систем.

В данной работе рассматривается неоднородная ресурсная система массового облуживания с непуассоновским входящим потоком и неэкспоненциальным обслуживанием, где каждому поступающему требованию необходимо для обслуживания предоставление некоторого количества ресурса [3–5].

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания MMPP$^{(\nu)}$|GI$^{(n)}$|∞ с n типами неоднородных (в смысле скорости обслуживания) [6] обслуживающих приборов, на вход которой поступает MMPP-поток разнотипных заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\boldsymbol{Q} = \|q_{\nu k}\|$, $\nu, k = 1, \ldots, K$, диагональной матрицей условных интенсивностей $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$.

Дисциплина обслуживания определяется следуюшим образом. Заявка, поступающая в систему, с вероятностью p_i $(i = 1, \ldots, n)$ требует для обслуживания случайное количество некоторого ресурса соответствующего типа с функцией распределения $G_i(\nu)$ и обслуживается в течение случайного времени, имеющего функцию распределения $B_i(\tau)$. Вероятности p_i удовлетворяют условию нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пусть $V_i(t)$ — суммарный объем занятого ресурса i-го типа в системе в момент времени t. Поставим задачу нахождения характеристик n-мерного случайного процесса $\{V_1(t), \ldots, V_n(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским, поэтому для его исследования применим метод динамического просеивания.

2. Метод динамического просеивания

Пусть имеется набор функций $S_i(t)$, значения которых лежат в диапазоне $[0, 1]$ и обладают свойством $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i(t) \leqslant 1$ для любых t. Событие входящего потока может просеяться только в один из n просеянных потоков, либо не просеяться ни в один. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$ сформирует событие i-го потока $S_i(t) = 1 - B_i(T - t)$, то есть к некоторому фиксированному моменту времени T заявка будет обслуживаться и занимать ресурс i-го типа. Из условия нормировки, вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$ не сформирует событие ни в одном из просеянных потоков:

$$S_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} S_i(t),$$

т. е. к моменту времени T заявка закончит обслуживание, покинет систему и освободит занимаемый ресурс.

Обозначим $W_i(t)$ — суммарный объем занятого ресурса «просеянными» в i-й поток заявками до момента t, тогда $\boldsymbol{W}(t) = \{W_1(t), \ldots, W_n(t)\}$.

Нетрудно показать, что для исследуемого процесса $\{\boldsymbol{V}(t)\}$ справедливо:

$$P\{\boldsymbol{V}(T) < \boldsymbol{x}\} = P\{\boldsymbol{W}(T) < \boldsymbol{x}\}, \tag{1}$$

для любых $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Отметим, что неравенства $\boldsymbol{V}(T) < \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{W}(T) < \boldsymbol{x}$ подразумевают поэлементное сравнение, т. е. например $P\{V_1(T) < x_1\} = P\{W_1(T) < x_1\}$ и т. д. Равенство (1) будем называть основной формулой метода динамического просеивания для неоднородных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Для марковизации полученного n-мерного процесса $\{\boldsymbol{W}(t)\}$ добавим компоненту $k(t)$.

3. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Введем обозначение распределения вероятностей марковского процесса $\{k(t), \boldsymbol{W}(t)\}$:

$$P\{k(t) = k, \boldsymbol{W}(t) < \boldsymbol{w}\} = P(k, \boldsymbol{w}, t), \quad k = \overline{1, K}, \quad w_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$P(k, \boldsymbol{w}, t+\Delta t) = P(k, \boldsymbol{w}, t)(1-\lambda_k \Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) + P(k, \boldsymbol{w}, t)\lambda_k \Delta t\left(1-\sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)\right) + \\ + \lambda_k \Delta t \sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)\int_0^{w_i} P(k, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}_i, t)\, dG_i(y) + \sum_{\nu\neq k} q_{\nu k}\Delta t P(\nu, \boldsymbol{w}, t) + o(\Delta t),$$

где $\boldsymbol{y}_i$ — вектор, все элементы которого равны 0 за исключением i-го, который равен y.

Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k, \boldsymbol{w}, t)}{\partial t} = -\lambda_k \sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t) P(k, \boldsymbol{w}, t) + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)\int_0^{w_i} P(k, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}_i, t)\, dG_i(y) + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu, \boldsymbol{w}, t),$$

с начальным условием

$$P(k, \boldsymbol{w}, t) = \begin{cases} r(k), & \text{если } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Характеристические функции

Введем частичные характеристические функции вида:

$$h(k, \boldsymbol{v}, t) = \int_0^{\infty} e^{jv_1 w_1}\ldots \int_0^{\infty} e^{jv_n w_n} P(k, d\boldsymbol{w}, t).$$

Можно записать следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial h(k, \boldsymbol{v}, t)}{\partial t} = \sum_{\nu} q_{\nu k} h(\nu, \boldsymbol{v}, t) + \lambda_k h(k, \boldsymbol{v}, t)\sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)(G_i^*(v_i)-1), \quad k = \overline{1, K},$$

где $G_i^*(v) = \int\limits_0^{\infty} e^{jvy} dG_i(y)$.

Запишем полученную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, t)\left[\boldsymbol{\Lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)(G_i^*(v_i)-1) + \boldsymbol{Q}\right], \tag{2}$$

с начальным условием $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, t_0) = \boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, t) = [\boldsymbol{h}(1, \boldsymbol{v}, t), \ldots, \boldsymbol{h}(K, \boldsymbol{v}, t)]$, $\boldsymbol{r} = [r(1), r(2), \ldots, r(K)]$, здесь и далее $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор-столбец.

5. Гауссовская аппроксимация

Точное решение уравнения (2) в общем случае получить невозможно, но его можно решить при асимптотическом условии. В данной работе рассматривается асимптотическое условие растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний управляющей цепи Маркова. Подставим в уравнение (2) $\boldsymbol{\Lambda} = N\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ и $\boldsymbol{Q} = N\bar{\boldsymbol{Q}}$, где $N\to\infty$ — некоторый параметр. Тогда можно записать:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, t)\left[\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)(G_i^*(v_i)-1) + \bar{\boldsymbol{Q}}\right].$$

Теорема 1. *Асимптотическое совместное стационарное распределение вероятностей n-мерного процесса суммарных объемов занятого ресурса каждого типа в системе $MMPP^{(\nu)}|GI^{(n)}|\infty$ при условии растущей интенсивности входящего потока является n-мерным гауссовским распределением вероятностей с параметрами:*

— *вектором математических ожиданий*

$$\boldsymbol{a} = N\lambda[a_1^{(1)}b_1 \;\; a_1^{(2)}b_2 \;\; \ldots \;\; a_1^{(n)}b_n],$$

где $b_i = p_i\int\limits_0^{\infty}(1-B_i(\tau))\, d\tau$;

— *ковариационной матрицей*

$$\boldsymbol{K} = N(\lambda \boldsymbol{K}^{(1)} + \varkappa \boldsymbol{K}^{(2)}),$$

где

$$\boldsymbol{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)}b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{(2)}b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_2^{(n)}b_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)}a_1^{(1)}K_{11}^{(2)} & a_1^{(1)}a_1^{(2)}K_{12}^{(2)} & \dots & a_1^{(1)}a_1^{(n)}K_{1n}^{(2)} \\ a_1^{(2)}a_1^{(1)}K_{21}^{(2)} & a_1^{(2)}a_1^{(2)}K_{22}^{(2)} & \dots & a_1^{(2)}a_1^{(n)}K_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)}a_1^{(1)}K_{n1}^{(2)} & a_1^{(n)}a_1^{(2)}K_{n2}^{(2)} & \dots & a_1^{(n)}a_1^{(n)}K_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$K_{ij}^{(2)} = p_i p_j \int\limits_0^\infty (1 - B_i(\tau))(1 - B_j(\tau))\,d\tau,$$

$$\lambda = \boldsymbol{r}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{e}, \quad \varkappa = 2\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{e},$$

вектор-строка $\boldsymbol{r}$ определяется системой:

$$\begin{cases} \boldsymbol{rQ} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{re} = 1, \end{cases}$$

вектор-строка $\boldsymbol{g}$ удовлетворяет системе линейных матричных уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}\bar{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{r}(\lambda \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{\Lambda}}), \\ \boldsymbol{ge} = C, \end{cases}$$

$\boldsymbol{I}$ — диагональная единичная матрица, $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ — первый и второй начальные моменты случайных величин с функцией распределения вероятностей $G_i(y)$.

Заключение

В работе проведено исследование неоднородной ресурсной СМО с неограниченным числом приборов. Показано, что совместное распределение вероятности суммарного объема занятого ресурса каждого типа сходится к многомерному гауссовскому распределению в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока.

Список литературы

[1] *Dudovskaya Y., Yakubovich O.* Open exponential networks with multimode strategies of the service and different types of customers // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN–2013): proc. of the Internat. Conf. — Moscow: JSC «Technosfera», 2013. — P. 382–385.

[2] *Zeifman A., Korotysheva A., Satin Y.* On a queueing model with group services // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks: proc. of the Internat. conf. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. — P. 198–205.

[3] *Галилейская А. А., Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П.* Исследование многофазной ресурсной СМО с MMPP входящим потоком // Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (APTCT— 2017): материалы молодежной научной школы. — М.: РУДН, 2017. — С. 80–82.

[4] *Наумов В. А., Самуйлов К. Е.* О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — № 3. — С. 60–64.

[5] *Тихоненко О. М.* Определение характеристик суммарного объема требований в однолинейных системах обслуживания с абсолютным приоритетом — Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 8. — С. 181–188.

[6] *Ефросинин Д. В.* Методы анализа управляемых динамических систем: дис... доктора физ.-мат. наук: 05.13.01. — Москва, РУДН. — 2013.