ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 46

УДК 519.872.1
DOI: 10.17223/19988605/46/8

В.А. Наумов, К.Е. Самуйлов

УСЛОВИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАРКОВСКИХ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.882.2017/4.6).

Рассматриваются марковские ресурсные системы массового обслуживания с потерями. Получены необходимые и достаточные условия мультипликативности стационарного распределения состояния системы и объемов занятых заявками ресурсов.

Ключевые слова: ресурсные системы массового обслуживания; марковский процесс; мультипликативность стационарного распределения; марковский поступающий поток.

В классических системах массового обслуживания (СМО) приборы и места ожидания играют роль ресурсов, необходимых для обслуживания заявок. В ресурсных СМО (РСМО) кроме приборов и мест ожидания заявкам могут потребоваться некоторые дополнительные ресурсы. Это может быть некоторый случайный объем ресурса, занимаемый на время ожидания начала обслуживания, либо на время обслуживания, либо на все время пребывания заявки в системе. Объемы доступных заявкам ресурсов обычно ограничены, и в РСМО с потерями поступившая заявка теряется, если у системы недостаточно свободных ресурсов. Такая модель хорошо подходит для анализа различных технических систем, и к настоящему времени опубликовано большое количество работ, анализирующих РСМО (см. обзоры [1, 2]). В подавляющем большинстве опубликованных случаев стационарное распределение процесса, описывающего состояние системы и объемы занятых заявками ресурсов, обладает свойством мультипликативности. Возникает естественный вопрос выяснения условий, при которых мультипликативность стационарного распределения имеет место.

В настоящей работе рассматривается марковская модель РСМО с потерями, являющаяся частным случаем общей модели [3], и анализируются условия мультипликативности стационарного распределения описывающего ее случайного процесса. В следующем разделе описывается поведение общей РСМО с потерями. В разделе 2 рассматривается марковская модель СМО с неограниченными ресурсами, а в разделе 3 – марковская модель СМО с ограниченными ресурсами. В разделе 4 получены условия мультипликативности стационарного распределения состояния системы и занятых заявками ресурсов. В качестве примера в разделе 5 исследуется стационарное распределение РСМО MAP/M/L/0 с марковским поступающим потоком и экспоненциально распределенной длительностью обслуживания.

Жирные строчные буквы обозначают векторы, а жирные прописные буквы – матрицы. Запись $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ означает, что $x_m \le y_m$ для всех m, и $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ означает, что по крайней мере для одной компоненты m выполняется строгое неравенство $x_m > y_m$. Для вектора, каждая m-я компонента которого является минимумом из чисел x_m и y_m, принято обозначение $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. $\mathbb{R}_+$ обозначает множество неотрицательных действительных чисел.

1. Описание ресурсной СМО

Рассмотрим СМО, которую можно описать некоторым случайным процессом $X(t)$ с пространством состояний $\mathcal{X}$, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. Будем считать,

что процесс $X(t)$ достаточно детально описывает систему и для любого ее состояния $i \in \mathcal{X}$ всегда можно определить число заявок, находящихся в системе, которое обозначим $\theta(i)$. Емкость СМО обозначим L, так что число заявок в системе никогда не превосходит L. Предположим также, что система открыта, т.е. в нее поступают и из нее уходят заявки, причем поодиночке, а не группами. Обозначим $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ моменты поступления заявок и $0 < d_1 < d_2 < \ldots$ моменты ухода заявок из системы.

Пусть система располагает ограниченным объемом неделимых ресурсов M типов. Обозначим через ρ_m общий объем ресурса типа m, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_M)$, и через $\mathbf{r}_n = (r_{n,1}, r_{n,2}, \ldots, r_{n,M})$ – вектор объемов ресурсов, необходимых n-й заявке. Все находящиеся в системе заявки перенумерованы. Если система примет поступившую в момент a_n заявку, то ей будет присвоен некоторый номер φ_n из интервала $1 \le \varphi_n \le k+1$, где $k = \theta(X(a_n - 0))$ – число заявок в системе. Номера заявок, имевших до этого номера $\varphi_n, \varphi_n + 1, \ldots, k$, будут увеличены на единицу. В момент d_n ухода заявки из системы ее покинет заявка с некоторым номером ψ_n из интервала $1 \le \psi_n \le k$, $k = \theta(X(d_n - 0))$, и номера заявок, имевших до этого номера $\psi_n + 1, \psi_n + 2, \ldots, k$, будут уменьшены на единицу. Например, при дисциплине обслуживания First In First Out номера поступивших и обслуженных заявок определяются равенствами $\varphi_n = \theta(X(a_n - 0)) + 1$ и $\psi_n = 1$, а для дисциплины обслуживания Last In First Out имеем $\varphi_n = \theta(X(a_n - 0)) + 1$ и $\psi_n = \theta(X(d_n - 0))$.

Информация о ресурсах, занятых в момент t, хранится в виде списка $\mathbf{s}(t) = (\mathbf{s}_1(t), \mathbf{s}_2(t), \ldots, \mathbf{s}_k(t))$ длины $k = \theta(X(t))$ из векторов $\mathbf{s}_i(t) \in \mathbb{R}_+^M$ объемов ресурсов, занимаемых заявкой с номером i. При этом будем писать: $\mathbf{s}(t) = \varnothing$, если $\theta(X(t)) = 0$. Список занятых ресурсов может изменяться только при поступлении и уходе заявок. Пусть перед поступлением некоторой заявки список занятых ресурсов имел вид: $\mathbf{s}(a_n - 0) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$. Если $k < L$ и $\mathbf{r}_n + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k \le \mathbf{r}$, то заявка принимается, ей присваивается некоторый номер φ_n и в список вставляется вектор ресурсов, выделенных этой заявке: $\mathbf{s}(a_n) = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\varphi_n - 1}, \mathbf{r}_n, \mathbf{x}_{\varphi_n}, \ldots, \mathbf{x}_k)$. В противном случае заявка теряется и список занятых ресурсов остается неизменным. Если перед уходом заявки с номером ψ_n список занятых ресурсов имел вид $\mathbf{s}(d_n - 0) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$, то после ее ухода из списка удаляется вектор занимаемых ею ресурсов, и он становится таким: $\mathbf{s}(d_n) = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\psi_n - 1}, \mathbf{x}_{\psi_n + 1}, \ldots, \mathbf{x}_k)$.

Моменты поступления заявок a_n и моменты их ухода d_n зависят от различных случайных внешних и внутренних факторов, определяющих динамику изменения состояний СМО. Мы будем считать, что описывающий систему процесс является марковским, а моменты поступлений и ухода заявок образуют марковские потоки вызовов [4]. Используемые здесь принципы построения марковских моделей СМО восходят к монографии [5]. Для того чтобы сформулировать условия мультипликативности стационарного распределения процесса, описывающего РСМО, мы рассмотрим сначала систему, объемы ресурсов которой неограничены и нехватка которых не может оказать влияния на поведение системы.

2. Случай неограниченных ресурсов

Рассмотрим систему с неограниченным объемом ресурсов. Предположим, что описывающий систему процесс $X(t)$ является однородным марковским процессом с конечным числом состояний. Разобьем множество его состояний $\mathcal{X}$ на непересекающиеся подмножества $\mathcal{X}_k = \{i \in \mathcal{X} \mid \theta(i) = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, L$, и обозначим l_k число элементов подмножества $\mathcal{X}_k$. Поскольку заявки поступают в систему и уходят из нее поодиночке, возможны переходы процесса $X(t)$ только между состояниями, либо принадлежащими какому-то одному подмножеству состояний $\mathcal{X}_k$, либо принадлежащими соседним

подмножествам. Переход из $\mathcal{X}_k$ в $\mathcal{X}_{k+1}$ происходит в момент поступления заявки, а переход из $\mathcal{X}_k$ в $\mathcal{X}_{k-1}$ – в момент ухода заявки из системы. Это означает, что матрица интенсивностей переходов $\mathbf{Q}$ процесса $X(t)$ является блочной трехдиагональной:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_0 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_{L-1} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_L & \mathbf{C}_L \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Блоки этой матрицы $\mathbf{A}_k = [a(i,j)]$, $i \in \mathcal{X}_k$, $j \in \mathcal{X}_{k+1}$, имеют размер $l_k \times l_{k+1}$ и образованы интенсивностями изменений состояний системы при поступлении заявок, блоки $\mathbf{B}_k = [b(i,j)]$, $i \in \mathcal{X}_k$, $j \in \mathcal{X}_{k-1}$, размера $l_k \times l_{k-1}$ образованы интенсивностями изменений состояний системы в моменты ухода заявок, внедиагональные элементы блоков $\mathbf{C}_k = [c(i,j)]$, $i, j \in \mathcal{X}_k$, размера $l_k \times l_k$ образованы интенсивностями изменений состояний системы, не связанными с поступлением или уходом заявок, а диагональные элементы матриц $\mathbf{C}_k$ даются равенствами $c(i,i) = -(a(i) + b(i) + c(i))$, $i \in \mathcal{X}_k$, где

$$a(i) = \begin{cases} \sum\limits_{j \in \mathcal{X}_{k+1}} a(i,j), & k < L, \\ 0, & k = L, \end{cases}, \quad b(i) = \begin{cases} \sum\limits_{j \in \mathcal{X}_{k-1}} b(i,j), & k > 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}, \quad c(i) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{X}_k \\ j \neq i}} c(i,j). \tag{2}$$

Заметим, что интенсивности переходов $a(i,j)$ и $b(i,j)$ можно выразить через переходные вероятности

$$a(i,j) = a(i)\alpha(i,j),\ \theta(j) = \theta(i) + 1, \qquad b(i,j) = b(i)\beta(i,j),\ \theta(j) = \theta(i) - 1, \tag{3}$$

где $\alpha(i,j)$ – вероятность того, что при поступлении заявки система перейдет из состояния i в состояние j, а $\beta(i,j)$ – вероятность того, что при уходе заявки система перейдет из состояния i в состояние j.

Будем считать, что все состояния процесса $X(t)$ сообщаются. Тогда матрица $\mathbf{Q}$ неразложима, и стационарное распределение $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, ..., \mathbf{q}_L)$ процесса $X(t)$ является единственным решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{q}_0\mathbf{C}_0 + \mathbf{q}_1\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{q}_k\mathbf{C}_k + \mathbf{q}_{k+1}\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{0},\ 1 \le k \le L-1, \quad \mathbf{q}_{L-1}\mathbf{A}_{L-1} + \mathbf{q}_L\mathbf{C}_L = \mathbf{0}, \tag{4}$$

удовлетворяющим нормировочному условию

$$\sum_{k=0}^{L} \mathbf{q}_k\mathbf{u}_k = 1. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{q}_k = (q(i)), i \in \mathcal{X}_k$, – векторы-строки стационарных вероятностей процесса $X(t)$, а $\mathbf{u}_k$ – векторы-столбцы длины l_k из единиц.

Кроме изменений состояний, описанных в этом разделе, состояния РСМО с ограниченными ресурсами могут также изменяться при потере заявки из-за нехватки ресурсов. При этом система остается в том же подмножестве состояний $\mathcal{X}_k$, в котором она была перед поступлением потерянной заявки. В следующем разделе мы рассмотрим такие системы более подробно.

3. Марковская модель ресурсной СМО

Рассмотрим теперь РСМО с ограниченными ресурсами. Обозначим через $\mathcal{S}_k = \{(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) \mid \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}_+^M,\ \mathbf{x}_1 + ... + \mathbf{x}_k \le \boldsymbol{\rho}\}$ множество списков ресурсов, занятых k заявками, и через $\mathcal{Y} = \{(i, \mathbf{x}) \mid i \in \mathcal{X}, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\theta(i)}\}$ – пространство состояний процесса $Y(t) = (X(t), \mathbf{s}(t))$. Предположим, что векторы запросов ресурсов $\mathbf{r}_n$, $n = 1, 2, ...$ независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $F(\mathbf{x})$, процесс $Y(t)$ является однородным марковским процессом, и рассмотрим переходные вероятности этого процесса:

$$P_{0,0}(t,i,j)=\mathrm{P}\{X(t)=j,\mathbf{s}(t)=\varnothing\,|\,X(0)=i,\mathbf{s}(0)=\varnothing\},\quad i,j\in\mathcal{X}_0;$$

$$P_{0,n}(t,i,j,\mathbf{w})=\mathrm{P}\{X(t)=j,\mathbf{s}(t)\le\mathbf{w}\,|\,X(0)=i,\mathbf{s}(0)=\varnothing\},\ i\in\mathcal{X}_0,\ j\in\mathcal{X}_n,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_n,\ 1\le n\le L;$$

$$P_{k,0}(t,i,j,\mathbf{v})=\mathrm{P}\{X(t)=j,\mathbf{s}(t)=\varnothing\,|\,X(0)=i,\mathbf{s}(0)=\mathbf{v}\},\ i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_0,\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\ 1\le k\le L;$$

$$P_{k,n}(t,i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathrm{P}\{X(t)=j,\mathbf{s}(t)\le\mathbf{w}\,|\,X(0)=i,\mathbf{s}(0)=\mathbf{v}\},\ j\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_n,\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\mathbf{w}\in\mathcal{S}_n,\ 1\le k,n\le L.$$

Процесс $Y(t)$ является скачкообразным марковским процессом [6]. Поскольку переходы процесса $X(t)$ возможны только либо внутри какого-то одного подмножества состояний $\mathcal{X}_k$, либо между соседним подмножествами, только следующие интенсивности переходов процесса $Y(t)$ отличны от нуля:

$$\gamma_0(i,j)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}(P_{0,0}(\varepsilon,i,j)-\delta_{i,j}),\ i,j\in\mathcal{X}_0; \tag{6}$$

$$\gamma_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}(P_{k,k}(\varepsilon,i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})-\delta_{i,j}H(\mathbf{w}-\mathbf{v})),\ i,j\in\mathcal{X}_k,\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{S}_k,\ 1\le k\le L; \tag{7}$$

$$\lambda_0(i,j,\mathbf{w})=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}P_{0,1}(\varepsilon,i,j,\mathbf{w}),\ i\in\mathcal{X}_0,\ j\in\mathcal{X}_1,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_1; \tag{8}$$

$$\lambda_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}P_{k,k+1}(\varepsilon,i,j,\mathbf{v},\mathbf{w}),\ i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_{k+1},\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_{k+1},\ 1\le k<L; \tag{9}$$

$$\mu_1(i,j,\mathbf{v})=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}P_{1,0}(\varepsilon,i,j,\mathbf{v}),\ i\in\mathcal{X}_1,\ j\in\mathcal{X}_0,\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_1; \tag{10}$$

$$\mu_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}P_{k,k-1}(\varepsilon,i,j,\mathbf{v},\mathbf{w}),\ i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_{k-1},\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_{k-1},\ 1<k\le L, \tag{11}$$

где $\delta_{i,j}=1$, если $i=j$, и $\delta_{i,j}=0$, если $i\ne j$, $H(\mathbf{x})=1$, если $\mathbf{0}\le\mathbf{x}$, и $H(\mathbf{x})=0$, если $\mathbf{0}\succ\mathbf{x}$.

Обозначим через $a_\varphi(i,j)$ интенсивность переходов процесса $X(t)$ из $i\in\mathcal{X}$ в $j\in\mathcal{X}$, $\theta(j)=\theta(i)+1$, при которых поступившая заявка получает номер φ, и через $b_\psi(i,j)$ – интенсивность переходов из i в j, $\theta(j)=\theta(i)-1$, сопровождающихся уходом из системы заявок с номером ψ. Эти интенсивности связаны с интенсивностями поступлений заявок $a(i,j)$ и интенсивностями ухода заявок $b(i,j)$ в матрице (1) следующими равенствами:

$$a(i,j)=\sum_{\varphi=1}^{\theta(j)}a_\varphi(i,j),\quad b(i,j)=\sum_{\psi=1}^{\theta(i)}b_\psi(i,j).$$

Кроме того, обозначим через $\gamma(i,j)$ условную вероятность того, что в момент поступления заявки система перейдет из состояния i в состояние j при условии, что поступившая заявка потеряна из-за нехватки ресурсов, и введем матрицы $\mathbf{\Pi}_k=[\pi(i,j)],i,j\in\mathcal{X}_k$, размера $l_k\times l_k$, $0\le k<L$, где $\pi(i,j)=a(i)\gamma(i,j)$.

Систему уравнений равновесия для стационарного распределение вероятностей процесса $Y(t)$ можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i\in\mathcal{X}_0}P(i)\gamma_0(i,j)+\sum_{i\in\mathcal{X}_1}P(i,\boldsymbol{\rho})\mu_1(i,j)=0,\ j\in\mathcal{X}_0; \tag{12}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{X}_0}P(i)\lambda_0(i,j,\mathbf{w})+\sum_{i\in\mathcal{X}_1}\int_{\mathcal{S}_1}P(i,d\mathbf{v})\gamma_1(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})+\sum_{i\in\mathcal{X}_2}\int_{\mathcal{S}_2}P(i,d\mathbf{v})\mu_1(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=0\ ,\quad j\in\mathcal{X}_1,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_1; \tag{13}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{X}_{k-1}}\int_{\mathcal{S}_{k-1}}P(i,d\mathbf{v})\lambda_{k-1}(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})+\sum_{i\in\mathcal{X}_k}\int_{\mathcal{S}_k}P(i,d\mathbf{v})\gamma_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})\sum_{i\in\mathcal{X}_{k+1}}\int_{\mathcal{S}_{k+1}}P(i,d\mathbf{v})\mu_{k+1}(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=0, \tag{14}$$

$$j\in\mathcal{X}_k,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_k,\ 1<k\le L;$$

$$\sum_{i\in\mathcal{X}_{L-1}}\int_{\mathcal{S}_{L-1}}P(i,d\mathbf{v})\lambda_{L-1}(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})+\sum_{i\in\mathcal{X}_L}\int_{\mathcal{S}_L}P(i,d\mathbf{v})\gamma_L(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w})=0,\quad j\in\mathcal{X}_L,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_L, \tag{15}$$

где интенсивности переходов процесса $Y(t)$ задаются следующими формулами:

$$\gamma_0(i,j)=c(i,j)+\pi(i,j)(1-F(\boldsymbol{\rho})),\quad i,j\in\mathcal{X}_0;$$

$$\gamma_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}-\mathbf{v})(c(i,j)+\pi(i,j)(1-F(\boldsymbol{\rho}-\sum_{n=1}^{k}\mathbf{v}_n))),\ i,j\in\mathcal{X}_k,\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{S}_k,\ 0<k<L;$$

$$\gamma_L(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}-\mathbf{v})c(i,j),\ i,j\in\mathcal{X}_L,\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{S}_L;\quad \lambda_0(i,j,\mathbf{w}) = a_1(i,j)F(\mathbf{w}),i\in\mathcal{X}_0,\ j\in\mathcal{X}_1,\mathbf{w}\in\mathcal{S}_1;$$

$$\lambda_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{\varphi=1}^{k+1} a_\varphi(i,j)F(\mathbf{w}_\varphi\wedge(\boldsymbol{\rho}-\sum_{n=1}^{k}\mathbf{v}_n))\left(\prod_{n=1}^{\varphi-1}H(\mathbf{w}_n-\mathbf{v}_n)\right)\left(\prod_{n=\varphi+1}^{k+1}H(\mathbf{w}_n-\mathbf{v}_{n-1})\right),$$

$$i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_{k+1},\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\ \mathbf{w}\in\mathcal{S}_{k+1},\ 0<k<L;\ \ \mu_1(i,j,\mathbf{v}) = b_1(i,j),\ i\in\mathcal{X}_1,\ j\in\mathcal{X}_0,\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_1;$$

$$\mu_k(i,j,\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{\psi=1}^{k} b_\psi(i,j)\left(\prod_{n=1}^{\psi-1}H(\mathbf{w}_n-\mathbf{v}_n)\right)\left(\prod_{n=\psi}^{k-1}H(\mathbf{w}_n-\mathbf{v}_{n+1})\right),i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_{k-1},\mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\mathbf{w}\in\mathcal{S}_{k-1},\ 1<k\le L.$$

4. Мультипликативность стационарного распределения

Нас будут интересовать условия, при которых стационарное совместное распределение состояния марковской РСМО и объемов, занимаемых заявками ресурсов

$$P(i) = \lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{X(t)=i\},\ i\in\mathcal{X}_0,\quad P(i,\mathbf{v}) = \lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{X(t)=i,\mathbf{s}(t)\le\mathbf{v}\},\quad i\in\mathcal{X}_k,\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\ 0<k\le L, \tag{16}$$

обладает свойством мультипликативности:

$$P(i) = cq(i),\ i\in\mathcal{X}_0,\qquad P(i,(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k)) = cq(i)F(\mathbf{v}_1)\cdots F(\mathbf{v}_k),\quad i\in\mathcal{X}_k,\ (\mathbf{v}_1,..,\mathbf{v}_k)\in\mathcal{S}_k,\ 0<k\le L. \tag{17}$$

Здесь $q(i),\ i\in\mathcal{X},$ – стационарные вероятности состояний системы с неограниченными ресурсами, являющиеся решением системы уравнений (7)–(9), c – нормировочная константа,

$$c^{-1} = \mathbf{q}_0\mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^{L}\mathbf{q}_k\mathbf{u}_k F^{*k}(\boldsymbol{\rho}), \tag{18}$$

$F^{*k}(\mathbf{x})$ есть k-кратная свертка функции распределения $F(\mathbf{x})$. Если стационарное распределение вероятностей процесса $Y(t)$ обладает свойством мультипликативности (17), то его можно легко найти, зная лишь стационарное распределение $q(i),\ i\in\mathcal{X},$ процесса $X(t)$ и функцию распределения объемов требуемых заявкам ресурсов $F(\mathbf{x})$. В следующей теореме даются условия мультипликативности стационарного распределения процесса $Y(t)$.

Теорема. Для того чтобы стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов занимаемых заявками ресурсов (16) имело вид (17), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий $F(\boldsymbol{\rho})=1$ или $\mathbf{q}_0\boldsymbol{\Pi}_0 = \mathbf{q}_1\mathbf{B}_1$ и, кроме того, чтобы для всех $k=1,2,...,L-1$ выполнялись либо равенства

$$\int\limits_{\substack{\mathbf{0}\le\mathbf{v}_i\le\mathbf{w}_i,\\ i=1,\ldots,k}} F(\boldsymbol{\rho}-\sum_{l=1}^{k}\mathbf{v}_l))F(d\mathbf{v}_1)\ldots F(d\mathbf{v}_k) = F(\mathbf{w}_1)\cdots F(\mathbf{w}_k),\quad (\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\in\mathcal{S}_k, \tag{19}$$

либо равенство $\mathbf{q}_k\boldsymbol{\Pi}_k = \mathbf{q}_{k+1}\mathbf{B}_{k+1}$.

Доказательство. Введем матрицы $\mathbf{A}_{k,\varphi} = [a_\varphi(i,j)],\ i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_{k+1},\ \varphi=1,2,...,k+1,$ и $\mathbf{B}_{k,\psi} = [b_\psi(i,j)],\ i\in\mathcal{X}_k,\ j\in\mathcal{X}_{k-1},\ \psi=1,2,...,k$, а также векторы-строки стационарных вероятностей $\mathbf{p}_0 = (P(i)),\ i\in\mathcal{X}_0,\ \mathbf{p}_k(\mathbf{v}) = (P(i,\mathbf{v})),\ i\in\mathcal{X}_k,\mathbf{v}\in\mathcal{S}_k,\ 0<k\le L,$ и запишем систему уравнений равновесия (12)–(15) в матричном виде:

$$\mathbf{p}_0\mathbf{C}_0 + (1-F(\boldsymbol{\rho})\mathbf{p}_0\boldsymbol{\Pi}_0 + \mathbf{p}_1(\boldsymbol{\rho})\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}; \tag{20}$$

$$F(\mathbf{w})\mathbf{p}_0\mathbf{A}_0 + \mathbf{p}_1(\mathbf{w})\mathbf{C}_1 + \int\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{v}\le\mathbf{w}}(1-F(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{v}))\mathbf{p}_1(d\mathbf{v})\boldsymbol{\Pi}_1 + \tag{21}$$

$$+\int\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{v}\le\mathbf{w}}\mathbf{p}_2(d\mathbf{v},\boldsymbol{\rho}-\mathbf{v})\mathbf{B}_{2,2} + \int\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{v}\le\mathbf{w}}\mathbf{p}_2(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{v},d\mathbf{v})\mathbf{B}_{2,1} = \mathbf{0},\qquad \mathbf{w}\in\mathcal{S}_1;$$

$$\sum_{\varphi=1}^{k}F(\mathbf{w}_\varphi)\mathbf{p}_{k-1}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_{\varphi-1},\mathbf{w}_{\varphi+1},\ldots,\mathbf{w}_k)\mathbf{A}_{k-1,\varphi} + \mathbf{p}_k(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\mathbf{C}_k + \tag{22}$$

$$+\int\limits_{\substack{\mathbf{0}\le\mathbf{v}_i\le\mathbf{w}_i,\\ i=1,\ldots,k}}(1-F(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{v}_1-\ldots-\mathbf{v}_k))\mathbf{p}_k(d\mathbf{v}_1,\ldots,d\mathbf{v}_k)\boldsymbol{\Pi}_k+$$

$$+\sum_{\psi=1}^{k+1}\int\limits_{\substack{\mathbf{0}\le\mathbf{v}_i\le\mathbf{w}_i,\\ i=1,\ldots,k}}\mathbf{p}_{k+1}(d\mathbf{v}_1,\ldots,d\mathbf{v}_{\psi-1},\ \boldsymbol{\rho}-\sum_{l=1}^{k}\mathbf{v}_l,\ d\mathbf{v}_\psi,\ldots,d\mathbf{v}_k)\mathbf{B}_{k+1,\psi}=\mathbf{0},\ \ (\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\in\boldsymbol{S}_k,\ 1<k<L;$$

$$\sum_{\varphi=1}^{L}F(\mathbf{w}_\varphi)\mathbf{p}_{L-1}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_{\varphi-1},\mathbf{w}_{\varphi+1},\ldots,\mathbf{w}_L)\mathbf{A}_{L-1,\varphi}+\mathbf{p}_L(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_L)\mathbf{C}_L=\mathbf{0},\ (\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_L)\in\boldsymbol{S}_L. \qquad (23)$$

Подставив вероятности (17) в равенства (20)–(23) и воспользовавшись уравнениями (4), исключим из полученных выражений векторы $\mathbf{q}_k\mathbf{C}_k$. В результате после некоторых элементарных преобразований получим, что для мультипликативности стационарного распределения процесса $Y(t)$ необходимо и достаточно выполнение равенств

$$(1-F(\boldsymbol{\rho}))(\mathbf{q}_0\boldsymbol{\Pi}_0-\mathbf{q}_1\mathbf{B}_1)=\mathbf{0},$$

$$\int\limits_{\substack{\mathbf{0}\le\mathbf{v}_i\le\mathbf{w}_i,\\ i=1,\ldots,k}}(1-F(\boldsymbol{\rho}-\sum_{l=1}^{k}\mathbf{v}_l))F(d\mathbf{v}_1)\ldots F(d\mathbf{v}_k)(\mathbf{q}_k\boldsymbol{\Pi}_k-\mathbf{q}_{k+1}\mathbf{B}_{k+1})=\mathbf{0},\ \ (\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\in\boldsymbol{S}_k,\ 1<k<L,$$

которые эквивалентны условиям теоремы. Что и требовалось доказать.

Следствие. Для того чтобы стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов занимаемых заявками ресурсов имело вид (17), при любой функции распределения $F(\mathbf{x})$ требуемых заявкам ресурсов необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\mathbf{q}_k\boldsymbol{\Pi}_k=\mathbf{q}_{k+1}\mathbf{B}_{k+1},\ \ k=0,1,...,L-1. \qquad (24)$$

Нетрудно проверить, что любая функция распределения $F(\mathbf{x})$, для которой $F(\frac{1}{L}\boldsymbol{\rho})=1$, удовлетворяет условиям теоремы. В этом случае любым L заявкам достаточно имеющихся ресурсов, и система фактически функционирует как РСМО с неограниченными ресурсами. Отметим также, что мультипликативные стационарные распределения не зависят от нумерации поступающих и уходящих заявок определяющей интенсивности $a_\varphi(i,j)$ и $b_\psi(i,j)$, а зависят лишь от суммарных интенсивностей $a(i,j)$ и $b(i,j)$ поступления и ухода заявок.

5. Пример – ресурсная система MAP/M/L/0

Известно, что стационарное распределение РСМО без мест ожидания M/M/L/0 с пуассоновским входящим потоком и экспоненциально распределенной длительностью обслуживания мультипликативно при любой совместной функции распределения объемов требуемых множественных ресурсов [7]. Результаты настоящей работы позволяют ответить на вопрос, а не обладает ли таким же свойством стационарное распределение РСМО MAP/M/L/0 с марковским поступающим потоком (MAP) [4].

Обозначим через $N(t)=\sup\{n\,|\,a_n\le t\}$ число заявок поступивших к системе за время t. Поступающий поток называется марковским, если для некоторого случайного процесса $\xi(t)$ с конечным пространством состояний $\mathcal{J}$ процесс $(\xi(t),N(t))$ является однородным марковским процессом, однородным по второй компоненте [8]. В этом случае для всех $i,j\in\mathcal{J}$, $n\ge k$ и $h,t>0$ мы имеем $\mathrm{P}\{\xi(h+t)=j,N(h+t)=n\,|\,\xi(h)=i,N(h)=k\}=P_{i,j}(n-k,t)$, и процесс $\xi(t)$, называемый фазовым процессом поступающего потока, также является однородным марковским процессом с переходными вероятностями $P_{i,j}(t)=\mathbb{P}\{\xi(h+t)=j\,|\,\xi(h)=i\}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{i,j}(n,t)$.

Для простого марковского поступающего потока, сокращенно называемого MC-потоком, вероятность поступления в интервале длины ε более одной заявки составляет $o(\varepsilon)$. MC-поток характеризуется двумя матрицами: $\mathbf{S}=[s_{i,j}],i,j\in\mathcal{J}$, и $\mathbf{R}=[r_{i,j}],i,j\in\mathcal{J}$, сумма которых $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{R}$ является

матрицей интенсивностей переходов фазового процесса $\xi(t)$, а элементы которых определяются равенствами [9]

$$s_{i,j} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(p_{i,j}(0,\varepsilon) - \delta_{i,j}), \quad r_{i,j} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} p_{i,j}(1,\varepsilon), i, j \in \mathcal{J} . \tag{25}$$

Будем считать, что матрица $\mathbf{A}$ неразложима, и обозначим через $\mathbf{p}$ вектор стационарного распределения состояний процесса $\xi(t)$.

Матрица интенсивностей переходов процесса, описывающего систему MAP/M/L/0 с поступающим МС-потоком, имеет вид (1) с блоками $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}$, $k = 0,1,...,L-1$; $\mathbf{B}_k = k\mu\mathbf{I}$, $k = 1,2,...,L$; $\mathbf{C}_k = \mathbf{S} - k\mu\mathbf{I}$, $k = 0,1,...,L-1$; $\mathbf{C}_L = \mathbf{A} - L\mu\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, μ – интенсивность обслуживания [10]. В момент потери заявки из-за нехватки ресурсов фазовый процесс меняет состояние в соответствии с матрицей интенсивностей переходов $\mathbf{R}$, но число заявок в системе при этом не меняется. Поэтому для матриц $\mathbf{\Pi}_k$, описывающих изменение состояний системы в момент потери заявки из-за нехватки ресурсов, справедливы равенства $\mathbf{\Pi}_k = \mathbf{R}$ для всех $k = 0,1,...,L-1$, и условие мультипликативности (24) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{q}_k\mathbf{R} = (k+1)\mu\mathbf{q}_{k+1}, \; k = 0,1,...,L-1.$$

Отсюда из равенств (7)–(9) вытекает, что условия (24) равносильны равенствам $\mathbf{q}_k\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $k = 0,1,...,L$. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ неразложима, решения этих уравнений имеют вид: $\mathbf{q}_k = c_k\mathbf{p}$, где c_k – некоторые константы. Однако такой вид стационарного распределения состояний СМО с оступающим простым марковским потоком возможен лишь в случае, когда поступающий поток является пуассоновским [9].

Таким образом стационарное распределение РСМО MAP/M/L/0 с поступающим простым марковским потоком обладает свойством мультипликативности лишь в случае, когда поступающий поток является пуассоновским. Поскольку такими потоками можно аппроксимировать любые случайные потоки [11], можно предположить, что это справедливо для произвольных поступающих потоков.

Заключение

В настоящей работе исследуются условия, при которых стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов занимаемых заявками ресурсов мультипликативно. Поскольку понятие марковской СМО довольно широко, мы сначала детально рассматриваем интенсивности переходов случайного процесса, описывающего рассматриваемые здесь РСМО, а затем анализируем условия мультипликативности их стационарных распределений. Наиболее просто проверяются условия, гарантирующие мультипликативность при любых функциях распределения векторов запрашиваемых заявками объемов ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12, вып. 3. С. 48–55.
2. Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Ресурсные системы массового обслуживания с произвольным обслуживанием // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 1. С. 54–61.
3. Наумов В.А., Самуйлов К.Е. О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами // Вестник РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2014. № 3. С. 60–64.
4. Basharin G., Naumov V., Samouylov K. On Markovian Modelling of Arrival Processes // Statistical Papers. URL: https://doi.org/10.1007/s00362-018-1042-9
5. Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шнепс М.А. Массовое обслуживание в телефонии. М. : Наука, 1968. 246 с.
6. Дынкин Е.Б. Скачкообразные марковские процессы // Теория вероятностей и ее применения. 1958. Т. 3, № 1. С. 41–60.
7. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Самуйлов А.К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2016. № 8. С. 125–135.

8. Ежов И.И., Скороход А.В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 1. С. 3–14; № 4. С. 679–692.
9. Наумов В.А. О независимой работе подсистем сложной системы // Труды 3-й Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания, Пущино-на-Оке, 1974 / ред. В.В. Гнеденко, Ю.И. Громак, Е.В.Чепурин. М. : Моск. гос. ун-т, 1976. Т. 2. С. 169–177.
10. Наумов В.А. Матричный аналог формулы Эрланга // Модели распределения информации и методы их анализа : труды 10-й Всесоюзной школы-семинара по теории телетрафика. М. : ВИНИТИ, 1988. С. 39–43.
11. Asmussen S., Koole G. Marked point processes as limits of Markovian arrival streams // Journal of Applied Probability. 1993. V. 30, is. 2. P. 365–372.

Поступила в редакцию 7 августа 2018 г.

Naumov V.A., Samouylov K.E. (2019) CONDITIONS FOR THE PRODUCT FORM OF THE STATIONARY PROBABILITY DISTRIBUTION OF MARKOVIAN RESOURCE LOSS SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 64–72

DOI: 10.17223/19988605/46/8

In classical queueing systems, servers and waiting places play the role of resources required for service of customers. In resource queuing systems in addition to servers and waiting places, customers may require some additional resources. This may be some random amount of resource occupied for the duration of the waiting time, service time, or residence time. In this paper, we consider Markovian resource queueing systems in which an arriving customer is lost if the system does not have enough available resources. First, the class of Markovian resource loss systems considered is described. Then, the necessary and sufficient conditions for the product form of the stationary probability distribution of the system state and the volumes of the resources occupied by the customers are derived. As an example, the results obtained are applied to the analysis of the stationary distribution of resource loss system MAP/M/L/0 with a Markovian arrival process and exponentially distributed service times. It is shown that for this system the stationary probability distribution has product form only if the arrival process is Poisson.

Keywords: resource queuing systems; Markov process; product form; stationary probability distribution; Markovian arrival process.

NAUMOV Valeriy Arent'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Research Director of the Service Innovation Research Institute, Helsinki, Finland).
E-mail: valeriy.naumov@pfu.fi

SAMOUYLOV Konstantin Evgen'evich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Director of the Institute of Applied Mathematics & Communications Technology, Russian Peoples Friendship University, Moscow, Russian Federation, and senior scientist of Federal Research Center "Computer Science and Control" (FRC CSC RAS)).
E-mail: samuylov-ke@rudn.ru

REFERENCES

1. Gorbunova, A.V., Naumov, V.A., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2018) Resource queuing systems as models of wireless communication systems. *Informatika i ee primeneniya – Informatics and Applications*. 12(3). pp. 48–55. (In Russian).
2. Gorbunova, A.V., Naumov, V.A., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2019) Resursnye sistemy massovogo obsluzhivaniya s proizvolnym obsluzhivaniem [Resource queuing systems with random service]. *Informatics and Applications*. 13(1). pp. 54–61. (In Russian).
3. Naumov, V.A. & Samouylov, K.E. (2014) On the Modeling of Queueing Systems with Multiple Resources. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika, informatika, fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 3. pp. 60–64. (In Russian).
4. Basharin, G., Naumov, V. & Samouylov, K. (2018) On Markovian Modelling of Arrival Processes. *Statistical Papers*. 59(4). pp. 1533–1540. DOI: 10.1007/s00362-018-1042-9
5. Basharin, G.P., Kharkevich, A.D. & Shneps, M.A. (1968) *Massovoe obsluzhivanie v telefonii* [Mass service in telephony]. Moscow: Nauka.
6. Dynkin, E.B. (1958) Discontinuous Markov Processes. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 3(1). pp. 38–57. (In Russian).
7. Naumov, V.A., Samouylov, K.E. & Samouylov, A.K. (2016) On the total amount of resources occupied by serviced customers. *Automation and Remote Control*. 77(8). pp. 1419–1427. DOI: 10.1134/S0005117916080087
8. Ezhov, I.I. & Skorokhod, A.V. (1969) Markovskie protsessy, odnorodnye po vtoroy komponente [Markov processes with homogeneous second component]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 14(1/1). pp. 1–13.
9. Naumov, V.A. (1976) O nezavisimoy rabote podsistem slozhnoy sistemy [On the independent work of subsystems of a complex system]. In: Gnedenko, B.V., Gromak, Yu. & Chepurin, E.V. (eds) *Trudy 3 shkoly-soveschaniya po teorii massovogo obsluzhivaniyay.*

Puschtschino-na-Oke [Proceedings of the 3rd All-Union School-Meeting on the Theory of Queuing, Pushchino-on-Oka]. Vol. 2. Moscow: Moscow State University. pp. 169–177.

10. Naumov, V.A. (1988) Matrichnyy analog formuly Erlanga [The matrix analogue of the Erlang formula]. In: *Modeli raspredeleniya informatsii i metody ikh analiza* [Information distribution models and methods for their analysis]. Moscow: VINITI. pp. 39–43 (in Russian).
11. Asmussen, S. & Koole, G. (1993) Marked point processes as limits of Markovian arrival streams. *Journal of Applied Probability*. 30(2). pp. 365–372. DOI: 10.2307/3214845