

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ СО РАН им. В.Е. ЗУЕВА



НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР

**МАТЕРИАЛЫ
ДВЕНАДЦАТОЙ КОНФЕРЕНЦИИ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
4–8 июня 2018 г.**

*Мероприятие проведено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-20033)*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

References

1. Vasiliev V.A. A Truncated Estimation Method with Guaranteed Accuracy // Annals of Institute of Statistical Mathematics. 2014. № 66. P. 141–163.
2. Chernoff H. Sequential Analysis and Optimal Design. SIAM, Philadelphia, 1972.
3. Dogadova T.V., Vasiliev V.A. Adaptive prediction of stochastic differential equations with unknown parameters. Vestnik of Tomsk State University // J. Control Comput. Sci. 2017. Vol. 38. P. 17–23.
4. Dogadova T.V., Vasiliev V.A. On adaptive optimal prediction of Ornstein-Uhlenbeck process // Appl. Math. Sci. 2017. Vol. 11. P. 591–600.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ЦЕНОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ PSM

Ю.Г. Дмитриев¹, Ж.Н. Зенкова¹, А.Г. Зенков²

¹ Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

² Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия
zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

Метод PSM – Price Sensitivity Meter [1] – применяется в маркетинге для определения цены, максимально согласующейся с предпочтениями потребителей, однако его статистические свойства изучены весьма слабо. Метод базируется на опросе N представителей целевой аудитории, в результате чего формируется независимая четырехмерная выборка $(X_{k1}, X_{k2}, X_{k3}, X_{k4})$, $k = \overline{1, N}$, где для k -ого потребителя X_{k1} – минимальная приемлемая цена, X_{k2} – оптимальная цена, X_{k3} – высокая, но еще приемлемая цена, X_{k4} – слишком высокая цена. Далее для $j = \overline{1, 4}$ строятся эмпирические функции распределения (э.ф.р.) $\hat{F}_j(x) = \sum_{k=1}^N I_{[0, x)}(X_{kj})/N$, где $I_{[0, x)}(\cdot)$ – индикаторная функция, для $i = 1, 2$ $\hat{S}_i(x) = 1 - \hat{F}_i(x)$. В итоге координаты x пересечений $\hat{F}_j(x)$, $j = 3, 4$ и $\hat{S}_i(x)$, $i = 1, 2$ определяют результирующие ценовые значения $\hat{x}^{(ij)} = \left\{ \max \left\{ x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x) \right\}, x : \hat{S}_i(x+0) \leq \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x) \right\}$, которые являются оценками медиан $x_{0.5}^{(ij)}$ ф.р. $G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x))/2$.

Показано, что оценки медиан $\hat{x}_{0.5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$, являющиеся $(N+1)$ -ми порядковыми статистиками в объединенных выборках (X_{ki}, X_{kj}) , $k = \overline{1, N}$, имеют асимптотически нормальные распределения

$$L\left(\sqrt{N}\left(\hat{x}_{0.5}^{(ij)} - x_{0.5}^{(ij)}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N\left(0; v_{ij}^2\right) \quad (1)$$

где $v_{ij} = \sqrt{2F_{ij}\left(x_{0.5}^{(ij)}, x_{0.5}^{(ij)}\right)} / g_{ij}\left(x_{0.5}^{(ij)}\right)$, $F_{ij}(y, z)$ – совместная ф.р. случайных величин (с.в.) X_i и X_j для $i = 1, 2$ и $j = 3, 4$. При этом $F_{ij}(y, z) \neq F_i(y) \cdot F_j(z)$, т.к. для $i, j = \overline{1, 4}$, $i < j$, называемые потребителем цены $X_i < X_j$ не являются вообще говоря независимыми; $g_{ij}(x)$ – плотности ф.р. $G_{ij}(x)$, при этом предполагается, что для $m = \overline{1, 4}$ $\exists f_m(x)$ – плотности ф.р. $F_m(x)$ и $g_{ij}\left(x_{0.5}^{(ij)}\right) \neq 0$. Выражение (1) позволяет строить приближенные доверительные интервалы для $\hat{x}_{0.5}^{(ij)}$ с заданной доверительной вероятностью $\gamma \in (0, 1)$

$$X_{(N+1)}^{(ij)} - z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{v}_{ij} / \sqrt{N} \leq x_{0.5}^{(ij)} \leq X_{(N+1)}^{(ij)} + z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{v}_{ij} / \sqrt{N},$$

где $\hat{v}_{ij} = \sqrt{2\hat{F}_{ij}\left(\hat{x}_{0.5}^{(ij)}, \hat{x}_{0.5}^{(ij)}\right)} / \left(\hat{f}_i\left(\hat{x}_{0.5}^{(ij)}\right) + \hat{f}_j\left(\hat{x}_{0.5}^{(ij)}\right)\right)$ – оценка v_{ij} по объединенной выборке (X_{ki}, X_{kj}) , $k = \overline{1, N}$,

$z_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль уровня $(1+\gamma)/2$ стандартного нормального распределения, $\hat{g}_{ij}(x)$ – состоятельная оценка плотности в точке x .

Предложенный подход был применен для расчета ценовых предпочтений $N=52$ потенциальных потребителей нового программного продукта рынка B2B. Значения $\hat{v}_{ij}$ рассчитывались с использованием ядерных оценок плотностей с гауссовым ядром. В итоге были получены следующие доверительные интервалы: с вероятностью $\gamma = 0.9$ минимально возможная цена $X_{0.5}^{(13)} \in (231.93; 282.07)$, максимально возможная цена $X_{0.5}^{(24)} \in (305.85; 330.15)$, оптимальная цена, позволяющая захватить большую долю рынка $X_{0.5}^{(14)} \in (271.58; 308.42)$, приемлемая, но подчеркивающая престижность и статусность товара цена

$X_{0.5}^{(23)} \in (292.27; 319.73)$ у.е./шт. Также доверительные интервалы моделировались с помощью бутстреп-метода с объемом бутстреп-выборки $M = 65\ 536$. В результате было получено, что с вероятностью $\gamma = 0.9$ $X_{0.5}^{(13)} \in (256.29; 261.31)$, $X_{0.5}^{(24)} \in (314.14; 316.88)$, $X_{0.5}^{(14)} \in (287.38; 292.37)$, $X_{0.5}^{(23)} \in (301.64; 304.79)$ у.е./шт.

Предприятию даны рекомендации по выбору ценовой стратегии при выводе нового товара на рынок.

Литература

1. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Влияние априорной информации на результаты метода ценообразования на товар-новинку PSM // Актуальные проблемы и перспективы развития государственной статистики в современных условиях : сб. материалов III Междунар. науч.-практ. конф. Т. 2. Саратов : Саратовстат, 2017. С. 66–68.

РЕКУРРЕНТНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ И НЕИЗВЕСТНЫМ ВХОДОМ*

К.С. Ким, В.И. Смагин

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия
kks93@rambler.ru, vsm@mail.tsu.ru

Задачи оптимального управления и оценивания для объектов с непрерывным временем и скачкообразными параметрами рассматривались в работах [1–4]. Аналогичные задачи для дискретных систем изучались в [5–7]. В настоящей работе рассмотрена задача синтеза оптимального экстраполятора для дискретного объекта со случайными скачкообразными параметрами с двумя состояниями и при наличии в объекте неизвестного входа.

Модель объекта описывается дискретным уравнением:

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + f(k) + q_\gamma(k), \quad x(0) = x_0,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, x_0 – случайный вектор $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$, $N_0 = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$; A_γ – заданная постоянная матрица; $f(k)$ – неизвестный вход; $\gamma = \gamma(k)$, $\gamma(k)$ – Марковская цепь с двумя дискретными состояниями γ_1, γ_2 ; $q_\gamma(k)$ – случайные ошибки наблюдений со следующими характеристиками $M\{q_\gamma(k)\} = 0$, $M\{q_\gamma(k)q_\gamma^T(k)\} = Q_\gamma \delta_{kj}$

Канал наблюдений имеет вид: $y = S_\gamma x(k) + v_\gamma(k)$, где $v_\gamma(k)$ – независимые гауссовские случайные последовательности с характеристиками: $M\{v_\gamma(k)\} = 0$, $M\{v_\gamma(k)v_\gamma^T(k)\} = V_\gamma \delta_{kj}$.

Требуется найти оценку состояния $\hat{x}(k)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J[0; T_f] = M\left\{\left[\sum_{k=0}^{T_f} \sum_{i=1}^2 p_i(k) e^T(k) R_\gamma e(k) + \sum_{i=1}^2 p_i(T_f) e^T(T_f) L_\gamma(T_f) e(T_f)\right] / \gamma(0) = \gamma_0\right\},$$

где $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, R_γ и $L_\gamma(T_f)$ – весовые матрицы, $p_i(k) = \sum_{j=1}^2 P_{ij} \cdot p_j(k)$, $p(0) = p_0$, где $P_{i,j}$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j за один такт времени.

Оценка $\hat{x}(k)$ строится с использованием экстраполятора Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + \hat{f}(k) + K(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x},$$

где $\hat{f}(k)$ – оценка неизвестного входа модели, рассчитанная с помощью метода МНК [8], $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$, предполагаются известными начальные дисперсии $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1,2}$.

Теорема: Если существуют положительно определенные матрицы N_i и L_i , являющиеся решением двухточечной краевой задачи:

$$N_i(k+1) = (A_i - KS_i)(p_{i,1}N_1(k) + p_{i,2}N_2(k))(A_i - KS_i)^T + Q_i + KV_iK^T, \quad N_i(0) = N_0.$$

$$L_i(k) = (A_i - KS_i)^T(p_{i,1}L_1(k+1) + p_{i,2}L_2(k+1))(A_i - KS_i) + R_i, \quad L_i(T_f) = L_{T,i}.$$

тогда вектор $\text{st}(K)$, составленный из строк матрицы K определится по формуле:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-08-00920.