ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2019 Теоретические основы прикладной дискретной математики № 43

УДК 519.113.3

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕРНУЛЛИ

М. С. Беспалов

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир, Россия

В пространстве дискретных периодических функций с условием нормировки (сумма значений отсчётов по периоду равна нулю) рассматриваются операции циклической свертки, конечной разности и дискретного преобразования Фурье. Приводится обзор свойств дискретных периодических функций Бернулли, выделенных в качестве основного объекта изучаемой структуры. Дискретные периодические функции Бернулли положительного порядка практически идентичны конструкции специальных чисел и многочленов, введённых М. С. Беспаловым и Н. М. Коробовым.

Ключевые слова: *дискретное преобразование Фурье, циклическая свертка, конечная разность, производящая функция, числа и многочлены Коробова.*

DOI 10.17223/20710410/43/2

BERNOULLI'S DISCRETE PERIODIC FUNCTIONS

M. S. Bespalov

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia

E-mail: bespalov@vlsu.ru

This paper is a survey of known and some new properties of the discrete periodic Bernoulli functions $b_n(j)$ of order n introduced by V. N. Malozemov and viewed as elements $x = x(0)x(1)\dots x(N-1) \in \mathbb{C}_0^N \subset \mathbb{C}^N$ with the normalization condition $\sum\limits_{k=0}^{N-1} x(k) = 0$. It is proved that the operator $\Delta : \mathbb{C}_0^N \to \mathbb{C}_0^N$ where $\Delta[x] = y = y(0)y(1)\dots y(N-1)$, $y(k) = x(k+1) - x(k)$, is a bijection and $\Delta[b_n] = b_{n-1}$. Moreover, according to Malozemov's result, the set of the discrete periodic Bernoulli functions is an infinite cyclic group relative to the cyclic convolution $x * y(s) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} x(j)y(s-j)$ with a neutral element b_0, and $b_n * b_m = b_{n+m}$. It is proved that either the set of $N-1$ cyclic shifts $x^{k\to}(j) = x(j-k)$ of any discrete periodic Bernoulli function or the set $\{b_m, b_{m+1}, \dots, b_{m+N-2}\}$ yields a basis of the space $\mathbb{C}_0^N$. The generating function $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ of a sequence of discrete periodic Bernoulli functions is calculated. Formulas $\sum\limits_{k=1}^{N-1} \sin^{2m}(\pi k/N)$, $m \in \mathbb{Z}$, for calculating the sums of even degrees of sinuses at equidistant nodes of a circle are found by means of these functions and the discrete Fourier transform. It has been established that a cyclic shift by 1 and the multiplication by $-N$ transform these functions of positive order into special polynomials $P_n(k)$, which were introduced by Bespalov and Korobov and have become popular as the Korobov polynomials of the first kind in the form $K_n(x) = n!P_n(x)$.

We have calculated the Korobov numbers $K_n = -n! \cdot N \cdot b_n(1)$ up to K_{13} and the Korobov polynomials up to $K_7(x)$ for any array size (parameter) N.

Keywords: *discrete Fourier transform, cyclic convolution,finite difference, generating function, Korobov numbers and Korobov polynomials.*

Введение

Дискретные периодические функции Бернулли (далее именуются как *сигналы Бернулли*) введены в [1] и изучались в отдельных докладах семинара «Дискретный гармонический анализ и геометрическое моделирование» [2]. Полученные для них результаты собраны в учебном пособии [3]. Представление B-сплайнов на сетке через сигналы Бернулли предложено в [4]. Конструкция сигналов Бернулли положительного порядка практически идентична конструкции специальных чисел и многочленов, введённых в [5, 6] и ставших популярными (после публикации работ А. В. Устинова [7, 8]) в виде чисел и многочленов Коробова. Предложенное в [1] название объясняется тем, что дискретные периодические функции Бернулли служат аналогом на сетке чисел и многочленов Бернулли.

Приведённый в данной работе обзор свойств сигналов Бернулли предваряется напоминанием свойств чисел и многочленов Бернулли, описанием пространства сигналов и операций в нём. В качестве практического применения сигналов Бернулли приведён способ вычисления через них тригонометрических сумм, в п. 6 указана связь сигналов Бернулли с позднее введёнными числами и многочленами Коробова.

1. Числа и многочлены Бернулли

Числа Бернулли B_k вычисляются по рекуррентной формуле

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k B_k = 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, с начальным условием $B_0 = 1$. В частности, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$. Все числа Бернулли с нечётными номерами, кроме B_1, равны нулю.

Многочлены Бернулли определяются через их разложение по степеням x, где участвуют числа Бернулли:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B_k x^{n-k}. \tag{2}$$

В частности, $B_0(x) \equiv 1$, $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$, $B_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$. Из (2) вытекает, что $B_n = B_n(0)$.

Приведём отдельные свойства многочленов Бернулли:

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad \text{— теорема дополнения;} \tag{3}$$

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B_k(y) x^{n-k} \quad \text{— теорема сложения аргументов;} \tag{4}$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x);$$

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0 \quad \text{— нормировка;} \tag{5}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad \text{— вычисление конечной разности.}$$

В последнее время более удобным считается [8] определение чисел и многочленов Бернулли через экспоненциальную производящую функцию:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n, \qquad \frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n.$$

2. Пространство сигналов

Основной класс *дискретных функций* — функции, заданные на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, то есть двусторонние последовательности. При цифровой обработке сигналов (ЦОС) рассматривают *дискретные периодические* (с периодом N: $x(k+N)=x(k)$) *функции*, которые для сокращения записи будем называть *сигналами*. Пространство (периодических) сигналов обозначим $\mathbb{C}^N$, выделяя основную часть сигнала $x\in\mathbb{C}^N$ вида $x=(x(0)\ x(1)\dots x(N-1))$.

Матрицу *прямого дискретного преобразования Фурье* (ДПФ) порядка N определим поэлементно (далее N фиксируем)

$$F=F_N=(\omega^{-kj})_{k,j=0}^{N-1}, \tag{6}$$

где $\omega=\omega_N=\exp(2\pi i/N)$. При ЦОС исходный сигнал x преобразуется линейным оператором (6) в выходной сигнал (*спектр Фурье* сигнала x): $y=x\cdot F$; перепишем его в развернутом виде

$$y(s)=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\omega^{-sj}, \tag{7}$$

откуда вытекает периодичность сигнала y.

Оператор *обратного дискретного преобразования Фурье* определяется комплексно-сопряжённой матрицей $\overline{F_N}$:

$$F^{-1}=\frac{1}{N}\cdot\overline{F_N}=\frac{1}{N}(\omega^{kj})_{k,j=0}^{N-1}\,. \tag{8}$$

Операторная запись для (7): $y=\mathcal{F}[x]$; для восстановления: $x=\mathcal{F}^{-1}[y]$.

Другие основные операции над $x,y\in\mathbb{C}^N$:

1) линейные операции — сложение сигналов и умножение на число;
2) умножение сигналов в виде покоординатного умножения

$$x\circ y=(x(0)\cdot y(0)\quad x(1)\cdot y(1)\ \dots\ x(N-1)\cdot y(N-1));$$

3) циклическая свертка

$$x*y\ (s)=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)y(s-j)\ , \quad s\in\mathbb{Z};$$

4) циклический сдвиг (вправо): $x^{k\to}(j)=x(j-k)$,
в частности, $x^{N\to}=x$, а $x^{N-1\to}=x^{\leftarrow}$ — операция обратного сдвига;
5) конечная разность Δ сигнала $x\in\mathbb{C}^N$:

$$\Delta[x](j)=x(j+1)-x(j).$$

Для второй операции использован известный [9] знак $\circ$ операции *умножения по Адамару* (покоординатного умножения) векторов.

Строки матриц F, $\overline{F}$ называются [10] *дискретными экспоненциальными функциями* (ДЭФ). Основную ДЭФ обозначим $r = (1\ \omega\ \omega^2\ \ldots \omega^{N-1})$. Остальные ДЭФ (в матричной форме) следующие:

$$r^{2\circ} = r \circ r,\ r^{3\circ} = r^{2\circ} \circ r,\ r^{4\circ}, \ldots, r^{N-1\circ},\ r^{N\circ} = r^{0\circ},$$

где знак операции в показателе принято опускать. В матрице (6) ДЭФ следуют в порядке $r^0, r^{N-1}, r^{N-2}, \ldots, r^2, r$, а в матрице (8) — по возрастанию степени. Вместо обозначения $r^{0\circ}$ будем использовать символ $\mathbf{1}$ для *основного постоянного сигнала*: $\mathbf{1} = (11\ldots1)$. К основным сигналам относят *единичный импульс* $\delta = \delta_N = (1000\ldots0)$.

Двуместные операции $\circ$ и $*$ коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны, в пространстве $\mathbb{C}^N$ обладают нейтральными элементами $\mathbf{1}$ и δ соответственно. Приведённые операции линейны.

В пространстве $\mathbb{C}^N$ введём норму $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2}$.

Утверждение 1. В обозначениях $X = \mathcal{F}[x]$, $Y = \mathcal{F}[y]$ имеем

$$\mathcal{F}[x * y] = X \circ Y, \qquad N\mathcal{F}[x \circ y] = X * Y;$$

выполняется равенство Парсеваля

$$N\|x\|^2 = \|X\|^2.$$

Это утверждение (см. доказательство в [3]) и следующие две леммы легко проверяются.

Далее рассмотрим подпространство $\mathbb{C}_0^N$ пространства $\mathbb{C}^N$, состоящее из сигналов $x \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих *условию нормировки* (аналог (5)):

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) = 0. \tag{9}$$

Лемма 1. Приведённые операции, за исключением умножения сигналов $\circ$ и ДПФ, замкнуты в пространстве $\mathbb{C}_0^N$.

Лемма 2. В структуре $(\mathbb{C}_0^N; *)$ единственный нейтральный элемент $\left(\delta - \frac{1}{N}\mathbf{1}\right)$.

Лемма 3. Если $b \in \mathbb{C}_0^N$, то решение $x \in \mathbb{C}_0^N$ разностного уравнения $\Delta[x] = b$ единственно.

Доказательство. Приведём алгоритм вычисления $x \in \mathbb{C}_0^N$. Полагаем $x(0) = C$, не определяя пока C. Уравнение $\Delta[x] = b$ перепишем в виде $x(j) = x(j-1) + b(j-1)$, откуда вытекает, что $x(j) = C + b(0) + b(1) + \ldots + b(j-1)$ для j от 1 до $N-1$. По условию нормировки (9) составляем уравнение

$$NC + \sum_{j=0}^{N-2} (N-j-1)b(j) = 0, \tag{10}$$

позволяющее однозначно вычислить C, через которое восстанавливаем все отсчёты сигнала x. ■

Итак, в классе сигналов $\mathbb{C}_0^N$ определена обратная к операции вычисления конечной разности операция $\Delta^{-1} : \mathbb{C}_0^N \to \mathbb{C}_0^N$.

Выделим возможные специальные виды сигналов класса $\mathbb{C}_0^N$. Сигнал x назовём *симметричным* с центром в m и обозначим $x \in S(m)$, если $x(m-k) = x(m+k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, если $x(m-k) = x(m+k+1)$, то $x \in S(m+1/2)$. Сигнал x назовём *антисимметричным* с центром в m и обозначим $x \in AS(m)$, если $x(m-k) = -x(m+k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, $x \in AS(m+1/2)$, если имеем $x(m-k) = -x(m+k+1)$.

За счёт периодичности сигнала его центры повторяются через $N/2$: $x \in S(m)$ влечёт $x \in S(m \pm N/2)$ и т. д.

Утверждение 2. Пусть $x \in \mathbb{C}_0^N$, $t = n/2$ при $n \in \mathbb{Z}$.
Если $x \in S(t)$, то $\Delta[x] \in AS\,(t-1/2)$, $\Delta^{-1}[x] \in AS\,(t+1/2)$.
Если $x \in AS(t)$, то $\Delta[x] \in S\,(t-1/2)$, $\Delta^{-1}[x] \in S\,(t+1/2)$.

Доказательство, которое можно провести проверкой всех восьми случаев отдельно (хотя явно выписаны четыре случая, помним, что t может быть целым или дробным), продемонстрируем на примере одного из более сложных случаев.

Пусть $x \in S(0)$, $y = \Delta^{-1}[x]$. Предложим $y(0) = -x(0)/2$ как вариант начального значения. Формула $y(j+1) = y(j) + x(j)$ из леммы 3 допускает обращение в виде $y(j-1) = y(j) - x(j-1)$. По этим формулам: $y(k) = x(0)/2 + x(1) + x(2) + \ldots + x(k-1)$, $y(1-k) = -y(k)$ при $k = 2, 3, \ldots, (N+1)/2$ и $y(1) = x(0)/2$, что влечёт $y \in AS(1/2)$. Осталось доказать справедливость условия нормировки (9) для построенного y, что означает верность выбора начального значения $y(0)$.

Если N чётное, то условие (9) выполняется автоматически. Пусть N нечётное. Получили, что

$$y\left((N+1)/2\right) = x(0)/2 + x(1) + x(2) + \ldots + x\left((N+1)/2 - 1\right) \tag{11}$$

и $y((N+1)/2) = -y(1-(N+1)/2)$. По условию периодичности $y((N+1)/2) = y(1-(N+1)/2)$. Значит, должно быть $y((N+1)/2) = 0$. Проверим — так ли это? При $x \in S(0)$ имеем $x \in S(N/2)$, что влечёт $y((N+1)/2) = x(N-1) + \ldots + x((N+1)/2) + x(N)/2$ из (11). Сложим эти два представления: $2y(N+1)/2) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} x(k) = 0$ по условию $x \in \mathbb{C}_0^N$.

Ввиду периодичности считаем, что доказан случай

$$x \in S(m) \Rightarrow \Delta^{-1}[x] \in AS\,(m+1/2)\,.$$

3. Сигналы Бернулли

Основным представителем класса $\mathbb{C}_0^N$ служат *дискретные периодические функции Бернулли* [3, с. 171] порядка s, координаты которых определяются равенством

$$b_s(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-s} \cdot \omega^{kj}, \qquad s, j \in \mathbb{Z},\ \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right). \tag{12}$$

Будем называть их короче — *сигналами Бернулли* порядка s (периода N, где N считаем фиксированным). В частности, начальный сигнал Бернулли (для наглядности добавили разделительные запятые)

$$b_0 = \delta - \frac{1}{N}\mathbf{1} = \frac{1}{N}\left(N-1, -1, -1, \ldots, -1\right).$$

По свойствам корней N-й степени из единицы

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kj} = 0 \quad \text{при всех } 1 \leqslant j < N, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kN} = N \tag{13}$$

проверяется указанный вид b_0, принадлежность всех ДЭФ (кроме $\mathbf{1}$) пространству $\mathbb{C}_0^N$ и следующая лемма.

Лемма 4. Для сигналов Бернулли любого целого порядка $b_s \in \mathbb{C}_0^N$.

Лемма 5. Для сигналов Бернулли $b_s = \Delta[b_{s+1}]$ и $b_{s+1} = \Delta^{-1}[b_s]$.

Доказательство. Вычислим координаты сигнала

$$\Delta[b_{s+1}](j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega^k - 1)^{-(s+1)}\omega^{k(j+1)} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega^k - 1)^{-(s+1)}\omega^{kj} =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega^k - 1)^{-(s+1)}\omega^{kj}(\omega^k - 1) = b_s(j).$$

По лемме 3 получаем второе утверждение леммы 5. ∎

Замечание 1. В качестве альтернативного определения сигналов Бернулли можно предложить формулу $b_0 = \delta - \frac{1}{N}\mathbf{1}$ для сигнала Бернулли нулевого порядка и соотношения леммы 5.

Следствие 1. Для сдвига сигнала Бернулли верно $b_s^{\leftarrow} = b_s + b_{s-1}$.

Доказательство. В координатах доказанная формула $b_{s-1} = \Delta[b_s]$ выглядит так: $b_{s-1}(j) = b_s(j+1) - b_s(j)$ или $b_s(j+1) = b_s(j) + b_{s-1}(j)$. ∎

Следствие 2. Отсчёты всех сигналов Бернулли вещественные. Более того, отсчёты всех сигналов Бернулли отрицательного порядка и координаты векторов $N^{k+1} \cdot b_k$ при неотрицательных k — целые числа.

Доказательство. Имеем $b_{-1} = \Delta[b_0] = (-1\ 0\ 0 \ldots\ 0\ 0\ 1)$. Так как отсчёты b_{-1} целые, то по лемме 5 получаем, что отсчёты каждого следующего сигнала Бернулли отрицательного порядка целые.

Координаты вектора $N \cdot b_0 = N\delta - \mathbf{1}$ суть целые числа. Для сигналов Бернулли следующих (больших) порядков, согласно формуле $b_{s+1} = \Delta^{-1}[b_s]$, вычисляем координаты по алгоритму леммы 3, решая при этом уравнение (10) для C и накапливая множитель N в знаменателе. ∎

Утверждение 3. При $k \leqslant N$ имеет место следующее представление для сдвигов сигнала Бернулли: $b_{s+k}^{k\leftarrow} = \sum_{m=0}^{k} \mathrm{C}_k^m b_{s+m}$. В частности, при $k = N$ получаем аналог формулы (1), который справедлив лишь для N, равного размеру сетки:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{C}_N^m b_{s+m} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Применив формулу $b_{s+1}^{\leftarrow} = b_{s+1} + b_s$ следствия 1 трижды, получаем базу индукции

$$b_{s+2}^{2\leftarrow} = b_{s+2}^{\leftarrow} + b_{s+1}^{\leftarrow} = b_{s+2} + b_{s+1} + b_{s+1} + b_s.$$

Аналогично доказываем индуктивный переход от $k-1$ к случаю k:

$$b^{k\leftarrow}_{s+k}=b^{(k-1)\leftarrow}_{s+1+k-1}+b^{(k-1)\leftarrow}_{s+k-1}=\sum_{m=0}^{k-1}\mathrm{C}^m_{k-1}b_{s+1+m}+\sum_{m=0}^{k-1}\mathrm{C}^m_{k-1}b_{s+m}=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{C}^{j-1}_{k-1}b_{s+j}+\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{C}^{j}_{k-1}b_{s+j}=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}^{j}_{k}b_{s+j},$$

где применили известное свойство биномиальных коэффициентов

$$\mathrm{C}^{j-1}_{k-1}+\mathrm{C}^{j}_{k-1}=\mathrm{C}^{j}_{k}. \tag{15}$$

Формула (14) вытекает из равенства $b^{N\leftarrow}=b$ для $b\in\mathbb{C}^N$. ■

Замечание 2. Формулу (14) при небольших N можно использовать как следующий рекуррентный способ вычисления значений сигналов Бернулли:

$$b_s=-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\mathrm{C}^{k+1}_{N}b_{s-k}.$$

В частности, $b_s=-\dfrac{1}{2}b_{s-1}$ при $N=2$, $b_s=-b_{s-1}-\dfrac{1}{3}b_{s-2}$ при $N=3$ и т. д.

Следствие 3 (теорема сложения аргументов, аналог (4)). При $k\geqslant 0$ верно

$$b_n(j+k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{C}^{l}_{k}b_{n-l}(j).$$

Замечание 3. В следствии 2 приведено утверждение о целочисленности отсчётов сигналов $N^{k+1}b_k$, которое довольно грубое. Анализ биномиальных коэффициентов в соотношении линейной зависимости (14) позволяет получить следующее утверждение:

Если $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где p_j, $j=1,\ldots,k,$ — простые числа, $n\geqslant 0$, то отсчёты сигналов

$$Np_1^{[\frac{n}{p_1-1}]}p_2^{[\frac{n}{p_2-1}]}\ldots p_k^{[\frac{n}{p_k-1}]}b_n$$

целочисленные. Доказательство не приводим из-за его громоздкости.

Лемма 6. Дискретное преобразование Фурье сигналов Бернулли имеет вид

$$\mathcal{F}[b_n](0)=0,\quad \mathcal{F}[b_n](j)=(\omega^j-1)^{-n}\quad\text{при } j=1,2,\ldots,N-1,$$

что короче записывается при $n\in\mathbb{N}$ двумя формулами:

$$\mathcal{F}[b_{-n}]=(r-\mathbf{1})^n\quad\text{и условно } \mathcal{F}[b_n]=(r-\mathbf{1})^{-n}.$$

Доказательство. По лемме 4 имеем $\mathcal{F}[b_n](0)=0$. Для остальных отсчётов

$$\mathcal{F}[b_n](j)=\sum_{s=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega^k-1)^{-n}\omega^{ks}\omega^{-sj}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega^k-1)^{-n}\sum_{s=0}^{N-1}\omega^{(k-j)s}.$$

Применяя (13), получаем $\mathcal{F}[b_n](j)=(\omega^j-1)^{-n}$. ■

Следующее свойство сигналов Бернулли первым, по-видимому, отметил В. Н. Малоземов.

Теорема 1. Циклическая свертка сигналов Бернулли равна соответствующему сигналу Бернулли:

$$b_n * b_m = b_{n+m}.$$

Доказательство. Первый способ — проверяем непосредственно:

$$(b_n * b_m)(j) = \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} \omega^{sk} \sum_{l=1}^{N-1} (\omega^l - 1)^{-m} \omega^{(j-s)l} =$$
$$= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} \sum_{l=1}^{N-1} (\omega^l - 1)^{-m} \omega^{jl} \sum_{s=0}^{N-1} \omega^{s(k-l)}.$$

Продолжаем по формуле (13):

$$(b_n * b_m)(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} (\omega^k - 1)^{-m} \omega^{jk} = b_{n+m}(j).$$

Второй способ — через ДПФ. По утверждению 1 и лемме 6 с учётом того, что нулевой отсчёт всех спектров Фурье равен нулю, получаем

$$\mathcal{F}[b_n * b_m] = \mathcal{F}[b_n] \circ \mathcal{F}[b_m] = (r - \mathbf{1})^{-n} \circ (r - \mathbf{1})^{-m} = \mathcal{F}[b_{n+m}].$$

Теорема доказана. ■

Есть третий (более длинный) способ доказательства через итерации операторов Δ и Δ^{-1}. Его укажем в виде следствия теоремы.

Следствие 4. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ конечная разность всех порядков и её обращение для $x \in \mathbb{C}_0^N$ представима как

$$\Delta^m[x] = b_{-m} * x.$$

Эту формулу можно переписать в виде $x = \Delta^m[x] * b_m$, полученным в [1] и применённым в [4] для анализа B-сплайнов.

Следствие 5. Сигнал Бернулли любого порядка есть соответствующая степень образующего сигнала b_1:

$$b_n = b_1^{n*}, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 7 (аналог теоремы дополнения (3)). Для сигналов Бернулли верно

$$b_m(m - j) = (-1)^m b_m(j).$$

Доказательство. По определению (12) и условию $\omega^N = 1$ имеем

$$b_m(m - j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-m} \omega^{k(m-j)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^{-k})^{-m} \omega^{-kj} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^{N-k})^{-m} \omega^{(N-k)j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^k)^{-m} \omega^{kj} = (-1)^m b_m(j).$$

Лемма доказана. ■

Из утверждения 2 вытекает

Утверждение 4 (свойство симметрии, антисимметрии). Сигнал Бернулли чётного порядка симметричен, нечётного — антисимметричен:

$$b_{2m} \in S(m), \quad b_{2m+1} \in AS\,(m+1/2)\,.$$

Следствие 6. Для отдельных отсчётов верно $b_1(0) = -\dfrac{N-1}{2N}$ и $b_1(1) = \dfrac{N-1}{2N}$. Для остальных отсчётов $b_1(1+k) = \dfrac{N-1-2k}{2N}$.

Доказательство. Имеем $b_0 \in S(0)$, $b_1 \in AS(1/2)$, $b_0(0) = \dfrac{N-1}{N}$; обозначим $2C = \dfrac{N-1}{N}$. Тогда $b_1(0) = -C$ и $b_1(1) = C$; далее по лемме 3. ■

При $1 \leqslant k < N$ следующая формула для b_{-k} даёт явный вид начальных отрицательных сигналов Бернулли в виде сдвинутого набора биномиальных коэффициентов с чередующимися знаками. Её частные случаи:

$$b_{-1} = (-1\;0\;0\ldots\;0\;0\;1), \quad b_{-2} = (1\;0\;0\ldots\;0\;0\;1\;\;-2),$$
$$b_{-3} = (-1\;0\;\ldots\;0\;1\;\;-3\;3), \quad b_{-4} = (1\;0\;\ldots\;0\;1\;\;-4\;6\;\;-4) \quad \text{и т. д.}$$

Утверждение 5. Для сигналов Бернулли отрицательного порядка имеет место

$$b_{-k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mathrm{C}_k^j \delta^{(k-j)\leftarrow}; \tag{16}$$

$$\|b_{-k}\|^2 = \frac{4^k(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{17}$$

Доказательство. Следствие 1 влечёт базу индукции для (16):

$$b_{-1} = b_0^{\leftarrow} - b_0 = \delta^{\leftarrow} - \delta - \frac{1}{N}(\mathbf{1}^{\leftarrow} - \mathbf{1}) = \delta^{\leftarrow} - \delta, \quad b_{-2} = b_{-1}^{\leftarrow} - b_{-1} = \delta^{2\leftarrow} - 2\delta^{\leftarrow} + \delta.$$

Индуктивный переход (во второй сумме заменяем $s = j+1$, переобозначаем символом j и применяем (15)):

$$b_{-k} = b_{-k+1}^{\leftarrow} - b_{-k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \mathrm{C}_{k-1}^j \delta^{(k-j)\leftarrow} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \mathrm{C}_{k-1}^j \delta^{(k-1-j)\leftarrow} =$$
$$= \delta^{k\leftarrow} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (\mathrm{C}_{k-1}^j + \mathrm{C}_{k-1}^{j-1}) \delta^{(k-j)\leftarrow} + (-1)^k \delta = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mathrm{C}_k^j \delta^{(k-j)\leftarrow}.$$

Из (16) вытекает приведённый явный вид сигналов и квадрат нормы:

$$\|b_{-k}\|^2 = \sum_{j=0}^{k} \left(\mathrm{C}_k^j\right)^2.$$

По тождеству Вандермонда [11, с. 27]

$$\sum_{j=0}^{k} \left(\mathrm{C}_k^j\right)^2 = \mathrm{C}_{2k}^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(2k)!!(2k-1)!!}{(k!)(k!)} = \frac{2^k(2k-1)!!}{k!} = \frac{4^k(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Утверждение доказано. ■

Следствие 7. Набор из $N-1$ сигналов Бернулли подряд идущих порядков составляет базис пространства $\mathbb{C}_0^N$.

Доказательство. Подпространство $\mathbb{C}_0^N$ N-мерного пространства $\mathbb{C}^N$ имеет размерность $N-1$. Если отсчёты с номером 0 временно удалим, как допускающие восстановление по свойству нормировки (9), то заметим, что векторы $b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-N+1}$ линейно независимы, как обладающие диагональной структурой. Значит, они составляют базис пространства $\mathbb{C}_0^N$. По формуле (14) линейной зависимости этот базис можно сдвигать на одну позицию в любую сторону. ■

Замечание 4. Очевидно, что для любого $x \in \mathbb{C}_0^N$ полный набор его сдвигов линейно зависим: $\sum\limits_{k=0}^{N-1} x^{k\to} = 0$. Зато набор из $(N-1)$-го сдвига любого сигнала Бернулли составляет базис пространства $\mathbb{C}_0^N$. Для сигнала Бернулли порядка -1 это легко проверяется, а далее доказывается по лемме 3.

Рассмотрим простейшие частные случаи сигналов Бернулли.

Случай $N=2$. Пространство $\mathbb{C}_0^2$ одномерно и при всех целых s

$$b_s = \frac{(-1)^s}{2^{s+1}}\,(1\ \ -1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^s b_0.$$

Случай $N=3$. Пространство $\mathbb{C}_0^3$ двумерно с базисом

$$b_0 = \frac{1}{3}(2\ \ -1\ \ -1) \quad \text{и} \quad b_{-1} = (-1\ 0\ 1)$$

и соотношением $b_{k+2} = -\dfrac{1}{3} b_k^{\to}$.

Случай $N=4$. Хотя пространство $\mathbb{C}_0^4$ трёхмерно, сигналы Бернулли группируются не по тройкам, а по парам (чётные и нечётные порядки), а именно (отделили координаты запятыми):

$$b_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+2}}\left(2^{s+1}+1,\ \ -1,\ \ -2^{s+1}+1,\ \ -1\right)^{s\to},$$

$$b_{2s-1} = \frac{(-1)^{s-1}}{2^{2s+1}}\left(2^s+1,\ \ 2^s-1,\ \ -2^s+1,\ \ -2^s-1\right)^{s\to}.$$

Для остальных N общих формул представления всех сигналов Бернулли нет.

По теореме 1 в кольце $(\mathbb{C}_0^N; +, *)$ легко вычисляется обратный элемент к сигналам Бернулли. Для произвольного обратимого $x \in \mathbb{C}_0^N$ есть две стандартные схемы вычисления обратного, то есть такого $y \in \mathbb{C}_0^N$, что $x * y = b_0$. Один приём «в лоб» методом неопределённых коэффициентов — составление и решение системы N-го порядка. С использованием циркулянтной матрицы $C(x)$ для сигнала x (её определение см. в [9, с. 40]) уравнение записывается в матричном виде $y \cdot C(x) = b_0$.

Второй приём покажем на примере сигнала $x = (1, 0, 3, -4)$. Вычислим ДПФ от него: $X = \mathcal{F}[x] = (0, -2-4i, 8, -2+4i)$. Найдём Y, такой, что $X \circ Y = \mathbf{1} - \delta = (0, 1, 1, 1)$: $Y = \left(0, \dfrac{-1+2i}{10}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{-1-2i}{10}\right)$. Через обратное ДПФ от Y найдём искомый $y = \dfrac{1}{160}(-3, -21, 13, 11)$.

Предложим третий приём. Произвольный $x \in \mathbb{C}_0^N$ легко раскладывается по базису $\{b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-N+1}\}$. В случае $x = (1, 0, 3, -4)$ имеем $x = 2b_{-1} + 3b_{-2}$. Искомый $y \in \mathbb{C}_0^4$, такой, что $x * y = b_0$, будем искать в сдвинутом базисе в виде $y = \alpha b_1 + \beta b_0 + \gamma b_{-1}$. По линейности циклической свертки и теореме 1 имеем

$$x * y = 2\alpha b_0 + (3\alpha + 2\beta) b_{-1} + (3\beta + 2\gamma) b_{-2} + 3\gamma b_{-3}.$$

Здесь на помощь приходит соотношение (14) линейной зависимости, которое добавим с некоторым неопределённым коэффициентом s:

$$x * y = b_0 + s(4b_0 + 6b_{-1} + 4b_{-2} + b_{-3}).$$

Приравняв коэффициенты, получаем систему, которая решается последовательно:

$$\gamma = \frac{s}{3},\ \beta = \frac{10}{9}s,\ \alpha = \frac{34}{27}s,\ s = -\frac{27}{40} \quad \to \quad \alpha = -\frac{17}{20},\ \beta = -\frac{3}{4},\ \gamma = -\frac{9}{40}.$$

При $N \geqslant 5$ первые два приёма слишком сложны для использования без привлечения компьютера, а с помощью третьего можно решать и вручную.

4. Производящая функция сигналов Бернулли

Производящей функцией последовательности $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется [11]

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Введём производящие функции для N отсчётов последовательности сигналов Бернулли (12) неотрицательного порядка:

$$\varphi_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s(k) x^s, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теорема 2. Производящая вектор-функция $\Phi(x) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} b_s x^s$ для всех отсчётов сигналов Бернулли неотрицательного порядка равна

$$\Phi(x) = \delta + \varphi(x; N) \left((1+x)^{N-1}, 1, (1+x), (1+x)^2, \ldots, (1+x)^{N-2}\right),$$

где $\varphi(x; N) = \dfrac{x}{1-(1+x)^N}$.

Доказательство. По формуле $b_s(k) = b_s(k-1) + b_{s-1}(k-1)$ из следствия 1 имеем

$$\varphi_k(x) = b_0(k) + \sum_{s=1}^{\infty} b_s(k) x^s = b_0(k) + \sum_{s=1}^{\infty} (b_s(k-1)x^s + b_{s-1}(k-1)x^s).$$

При $2 \leqslant k \leqslant N-1$ получим

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{N} + \sum_{s=1}^{\infty} b_s(k-1)x^s + x\sum_{s=0}^{\infty} b_s(k-1)x^s = \varphi_{k-1}(x) + x\varphi_{k-1}(x).$$

Небольшое отличие при $k = 1$ и $k = N$:

$$\varphi_1(x) = b_0(1) + \sum_{s=1}^{\infty} (b_s(0)x^s + b_{s-1}(0)x^s) = b_0(1) - b_0(0) + (1+x)\varphi_0(x),$$
$$\varphi_N(x) = b_0(N) - b_0(N-1) + (1+x)\varphi_{N-1}(x).$$

Получили формулы

$$\varphi_1(x) = -1 + (1+x)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \varphi_N(x) = 1 + (1+x)\varphi_{N-1}(x).$$

Выразим все рассмотренные производящие функции через одну:

$$\varphi_k(x) = (1+x)^{k-1}\varphi_1(x) \quad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant N-1,$$
$$\varphi_0(x) = \frac{1+\varphi_1(x)}{x+1}, \quad \varphi_0(x) = 1 + (1+x)^{N-1}\varphi_1(x).$$

Приравняв две последние, получим

$$\varphi(x;N) = \varphi_1(x) = \frac{x}{1-(1+x)^N}.$$

Теорема доказана. ■

Следствие 8. Отсчёт сигналов Бернулли с номером 1 порядков $s \geqslant 2$ как функция от размера сетки N есть многочлен нечётного порядка; гарантируется, что среди его корней присутствуют корни $N = \pm 1$.

Доказательство. Для $\varphi(x;N) = \varphi_1(x) = \dfrac{x}{1-(1+x)^N}$ вычислим

$$\varphi(x;-N) = \frac{x}{1-(1+x)^{-N}} = x - \varphi(x;N),$$

что влечёт первое утверждение. Более того, из доказательства следствия 2 вытекает наличие N в знаменателях всех отсчётов сигналов Бернулли положительного порядка.

Рассмотрим величины $-Nb_s(1)$ как чётные многочлены степени s от переменной N. Из условия $\varphi(x;1) = -1$ вытекает, что при $s \geqslant 2$ числа $N = \pm 1$ служат корнями этого многочлена. ■

5. Тригонометрические суммы

Через производящую функцию теоремы 2, взятую в виде $-N\varphi(x;N)$, в [5, 12] вычисляются суммы чётных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах окружности. В. Н. Малоземов в [2] предложил более красивое изложение этих результатов с распространением на положительные степени. Эти суммы имеют практическое применение [13].

Теорема 3. Суммы чётных степеней синусов в равноотстоящих узлах выражаются через нормы сигналов Бернулли ($s > 0$):

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s}\frac{\pi k}{N} = \frac{N}{4^s}\|b_{-s}\|^2, \qquad \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)} = 4^s N\|b_s\|^2.$$

В частности, при $s < N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s}\tfrac{\pi k}{N} = N\,\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}. \tag{18}$$

Сумма $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)}$ при натуральном s равна чётному многочлену от N степени $2s$, содержащему множитель (N^2-1). В качестве формулы для вычисления этих многочленов предлагается

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)} = \frac{4^s N}{(s!)^2} \lim_{z\to 1}\lim_{t\to 1} \frac{\partial^{2s}}{\partial z^s\,\partial t^s}\left(\frac{(z-1)(t-1)((zt)^N-1)}{(z^N-1)(t^N-1)(zt-1)}\right). \tag{19}$$

Доказательство. По равенству Парсеваля (утверждение 1) $N\|b_s\|^2 = \|\mathcal{F}[b_s]\|^2$. Правую часть вычислим согласно результатам леммы 6:

$$\|\mathcal{F}[b_s]\|^2 = \|(r-\mathbf{1})^{-s}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} |\omega^k - 1|^{-2s} = \sum_{k=1}^{N-1} |\omega^{k/2} - \omega^{-k/2}|^{-2s} \cdot |\omega|^{-sk}.$$

По формуле Эйлера $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ получим

$$\|\mathcal{F}[b_s]\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \left|2\sin\frac{\pi k}{N}\right|^{-2s}.$$

Далее считаем $s > 0$ и запишем две формулы:

$$N\|b_{-s}\|^2 = 4^s \sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s}\frac{\pi k}{N}, \qquad N\|b_s\|^2 = 4^{-s} \sum_{k=1}^{N-1} \sin^{-2s}\frac{\pi k}{N}.$$

Для первой из них по формуле (17) при $s < N$ получаем (18). Сигналы Бернулли положительного порядка восстанавливаются через производящую вектор-функцию теоремы 2: $b_s = \frac{1}{s!}\,(\Phi(x))^{(s)}\,|_{x=0}$, а для отдельных отсчётов

$$b_s(k) = \frac{1}{s!}\lim_{u\to 0}\left(\frac{d^s}{du^s}\varphi_k(u)\right) = \frac{1}{s!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{d^s}{dz^s}\frac{z^{k-1}(z-1)}{1-z^N}\right).$$

При вычислении квадрата нормы вместо нулевого отсчёта берем отсчёт с номером N:

$$\|b_s\|^2 = \left(\frac{1}{s!}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} \lim_{z\to 1}\lim_{t\to 1} \frac{\partial^{2s}}{\partial z^s\,\partial t^s}\left(\frac{z^{k-1}(z-1)t^{k-1}(t-1)}{(z^N-1)(t^N-1)}\right),$$

что равносильно (19).

Так как при замене N на $-N$ в правой части (19) ничего не меняется, эта функция чётная. К тому же эта функция является многочленом, что нетрудно проверить (в [5] это доказано для очень близкой конструкции). Один из корней этого многочлена $N = 1$, так как при $N = 1$ правая часть (19) обращается в нуль. Из чётности многочлена вытекает, что и $N = -1$ есть корень. ∎

Приведём частные случаи результатов теоремы 3:

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sin^2\frac{\pi k}{N} = \frac{N}{2} \text{ при } N \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{N-1}\sin^4\frac{\pi k}{N} = \frac{3N}{8} \text{ при } N \geqslant 3,$$
$$\sum_{k=1}^{N-1}\sin^6\frac{\pi k}{N} = \frac{5N}{16} \text{ при } N \geqslant 4, \quad \sum_{k=1}^{N-1}\sin^8\frac{\pi k}{N} = \frac{35N}{128} \text{ при } N \geqslant 5.$$

Из курса математического анализа известно [14, с. 434], что

$$\int_0^\pi \sin^{2s}x\,dx = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{2s+1}{2})}{\Gamma(s+1)} = \pi\,\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}. \tag{20}$$

Сравнивая (20) с формулой (18), замечаем, что для интеграла $\int_0^\pi \sin^{2s}x\,dx$ обе формулы прямоугольников (при $\Delta x = \pi/N$) точны при достаточном ($N \geqslant s+1$) числе узлов:

$$\Delta x\sum_{k=0}^{N-1}\sin^{2s}(k\Delta x) = \Delta x\sum_{k=1}^{N}\sin^{2s}(k\Delta x) = \int_0^\pi \sin^{2s}x\,dx.$$

Верны следующие частные случаи:

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2(\pi k/N)}=\frac{N^2-1}{3},\qquad \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^4(\pi k/N)}=\frac{(N^2-1)(N^2+11)}{45},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^6(\pi k/N)}=\frac{(N^2-1)(2N^4+23N^2+191)}{945},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^8(\pi k/N)}=\frac{(N^2-1)(3N^6+43N^4+337N^2+2497)}{14175},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^{10}(\pi k/N)}=\frac{(N^2-1)(2N^8+35N^6+321N^4+2125N^2+14797)}{93555}.$$

Из этого набора формул легко вычисляются сумммы чётных степеней котангенсов в равноотстоящих узлах, приведённые в [15] и востребованные в механике.

По алгоритму леммы 3 и формуле теоремы 3 составлена программа [16] вычисления $\sum\limits_{k=1}^{N-1}\dfrac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)}$ по произвольным заданным N и s.

6. Связь с числами и многочленами Коробова

При построении производящей функции в теореме 2 более удобный вид получается при рассмотрении обратного сдвига. Поэтому далее рассмотрим следующую последовательность дискретных периодических функций (называемых сигналами):

$$-N\cdot b_0^{\leftarrow},\ -N\cdot b_1^{\leftarrow},\ -N\cdot b_2^{\leftarrow},\ldots,-N\cdot b_s^{\leftarrow},\ldots$$

Будем использовать предложенные в [6] названия и обозначения:

— *специальные числа* P_s для начальных отсчётов этих сигналов:

$$P_s=-N\cdot b_s^{\leftarrow}(0)=-N\cdot b_s(1);$$

— *специальные многочлены* $P_s(k)$ для остальных отсчётов этих сигналов (за одним исключением: последняя координата начального сигнала выпадает из общей конструкции, $P_0(x)\equiv 1$):

$$P_s(k)=-N\cdot b_s(k+1),\quad k=0,1,\ldots,N-1.$$

Специальные числа P_s и специальные многочлены $P_s(x)$, а также производящие функции для них

$$\psi(u)=\sum_{s=0}^{\infty}P_s u^s,\quad \Psi(u,x)=\sum_{s=0}^{\infty}P_s(x)u^s$$

введены и вычислены в [5, 6]. В [5] обозначения другие. После естественного видоизменения эти специальные числа и многочлены приобрели вид *чисел Коробова* и *многочленов Коробова* первого рода [8]

$$K_s=s!P_s,\quad K_s(x)=s!P_s(x)$$

с теми же экспоненциальными (термин из [11]) производящими функциями

$$\psi(u)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{K_s}{s!}u^s,\quad \Psi(u,x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{K_s(x)}{s!}u^s.$$

Из теоремы 2 вытекает

Утверждение 6. Экспоненциальные производящие функции чисел и многочленов Коробова первого рода имеют следующий вид:

$$\psi(u) = \psi(u;N) = \frac{Nu}{(u+1)^N - 1}, \quad \Psi(u,x) = \Psi(u,x;N) = \frac{Nu(u+1)^x}{(u+1)^N - 1}.$$

Основной результат работы [5] сформулируем в принятых обозначениях, используя понятие *обобщённой степени* $k^{(s)} = k(k-1)\dots(k-s+1)$.

Теорема 4. Решение бесконечной (так как $s \in \mathbb{N}$) системы разностных уравнений

$$\Delta[P_s] = P_{s-1}$$

с условием нормировки $\sum\limits_{k=0}^{N-1} P_s(k) = 0$ и начальным условием $P_0(k) \equiv 1$ имеет следующий вид:

$$P_s(k) = P_0\frac{k^{(s)}}{s!} + P_1\frac{k^{(s-1)}}{(s-1)!} + \ldots + P_{s-1}\frac{k^{(1)}}{1!} + P_s. \tag{21}$$

Здесь специальные числа P_s имеют вид многочленов степени s от параметра N со старшим коэффициентом $B_s/s!$, где B_s — числа Бернулли. Начиная с $s = 2$, это чётные многочлены (то есть многочлены от N^2), для которых числа 1 и -1 служат корнями.

Рекуррентная формула для вычисления чисел P_s как многочленов от N имеет следующий вид:

$$P_0\frac{N^{(s+1)}}{(s+1)!} + P_1\frac{N^{(s)}}{s!} + \ldots + P_{s-1}\frac{N^{(2)}}{2!} + P_sN = 0. \tag{22}$$

Доказательство. По условию нормировки из соображений симметрии имеем $P_1(k) = k - \dfrac{N-1}{2}$, что можно представить в виде $P_1(k) = P_0k^{(1)} + P_1$, где $P_1 = -\dfrac{N-1}{2}$. Это база индукции для доказательства (21) и (22).

Предположим, что

$$P_{s-1}(k) = P_0\frac{k^{(s-1)}}{(s-1)!} + P_1\frac{k^{(s-2)}}{(s-2)!} + \ldots + P_{s-2}\frac{k^{(1)}}{1!} + P_{s-1}.$$

Так как $\Delta[k^{(n)}] = nk^{(n-1)}$, решение уравнения $\Delta[P_s] = P_{s-1}$, согласно лемме 3, имеет вид (21), где P_s пока не найдено. Ищем его методом прогонки:

$$P_s(0) = P_s, \quad P_s(1) = P_s + P_{s-1}, \quad P_s(2) = P_s + 2P_{s-1} + P_{s-2}, \ldots$$

Общий вид формулы для $0 \leqslant k \leqslant N-1$:

$$P_s(k) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j P_{s-j}.$$

По условию нормировки $\sum\limits_{k=0}^{N-1} P_s(k) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\sum\limits_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j P_{s-j} = 0$. Отделим старшее слагаемое и поменяем пределы суммирования:

$$NP_s + \sum_{j=1}^{N-1}\left(\sum_{i=j}^{N-1} \mathrm{C}_i^j\right) P_{s-j} = 0.$$

Согласно [11, задача 1.2], получили $\sum\limits_{j=1}^{N-1} \mathrm{C}_N^{j+1} P_{s-j} + NP_s = 0$. Запись этого выражения в виде многочлена от N приводит к (22).

Теперь рассмотрим специальные числа P_s как многочлены от N степени s, где старший коэффициент при N^s может оказаться нулём. Этот коэффициент найдём анализом старших слагаемых.

База индукции: $P_0 = B_0 = 1$, $P_1 = B_1 N + \mathrm{O}(N^{1-1})$, где $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ — числа Бернулли.

Индуктивное предположение: $P_k = \dfrac{B_k}{k!} n^k + \mathrm{O}(N^{k-1})$ при всех k от 1 до $n-1$. Так как формулу (22) анализируем для всех N, отмечаем, что с ростом N она обрывается на n:

$$P_n = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} \frac{N^{(j+1)}}{(j+1)!} P_{n-j}.$$

Следим только за старшим коэффициентом:

$$P_n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(N-1)^{(j)}}{(j+1)!} \left(\frac{B_{n-j}}{(n-j)!} N^{n-j} + \mathrm{O}(N^{n-j-1}) \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{-B_{n-j}}{(j+1)!(n-j)!} \right) N^n +$$

$$+\mathrm{O}(N^{n-1}) = \left(\frac{-1}{n!} \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(j+1)!(n-j)!} B_{n-j} \right) N^n + \mathrm{O}(N^{n-1}) = \frac{B_n}{n!} + \mathrm{O}(N^{n-1})$$

по свойству (1).

Чётность P_n как многочлена от N и наличие множителя (N^2-1) (при $n \geqslant 2$) доказаны в следствии 8. ■

В [12] отмечено, что решение данной системы разностных уравнений уже получено, найдены производящие функции для них и приведена формула (19) для тригонометрических сумм.

В [6] специальные числа P_s вводятся формулой (22) с начальным условием $P_0 = 1$, а специальные многочлены $P_s(x)$, для которых $P_s(k) = -Nb_s(k+1)$ на сетке, — формулой (21) с начальным условием $P_0(x) \equiv 1$, без мотивировки происхождения этих формул. В [8] предложен подход к определению P_s и $P_s(x)$ через производящие функции.

Утверждение 7. Три следующих способа определения специальных чисел P_s и специальных многочленов $P_s(x)$ (а следовательно, также чисел и многочленов Коробова первого рода) эквивалентны:

1) в виде решения системы разностных уравнений с нормировкой (9);
2) формулами (21), (22);
3) через производящие функции $\psi(u) = \dfrac{Nu}{(u+1)^N - 1}$ и $\Psi(u,x) = \dfrac{Nu(u+1)^x}{(u+1)^N - 1}$ соответственно.

Переходы $1 \to 2$, $1 \to 3$ доказаны в [5] (см. также теорему 4 и утверждение 6), переход $2 \to 3$ — в [6], а переход $3 \to 1$ — в [8].

Замечание 5. Существует четвёртый (рекуррентный) способ определения специальных многочленов $P_n(k)$ (от целочисленного аргумента k на сетке) с помощью формулы (14). Этот способ аналогичен формуле (22) для вычисления специальных чисел. Однако для него нужно слегка поправить определение $P_0(k)$: оставляем неизменным $P_0(k) = 1$ при $0 \leqslant k \leqslant N-2$ и изменяем один отсчёт $P_0(N-1) = 1-N$. За счёт этой поправки, которая не влияет на вычисление последующих многочленов $P_n(k)$, добились того, что и для начального многочлена верно условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_n(k) = 0. \tag{23}$$

Введение поправки позволяет определить и вычислять, применяя операцию Δ, «специальные многочлены отрицательного порядка» по аналогии с сигналами Бернулли. В качестве начальных данных предлагаемого четвёртого способа достаточно вычислить $N-2$ таких «многочленов», начиная от P_{-1} до $P_{-(N-2)}$. Формулы для вычисления их отсчётов, удовлетворяющих условию (23): $P_{-k}(j) = 0$ при $0 \leqslant j \leqslant N-k-2$, $P_{-k}(N-k-1+s) = (-1)^{s+1}N\mathrm{C}_k^s$ при $0 \leqslant s \leqslant k$.

Наличие величин, которые названы «многочленами», позволяет запустить процесс вычисления специальных многочленов по формуле

$$P_s(j) = -\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{C}_N^{k-1} P_{s-k}(j) = 0, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Приведём несколько начальных чисел Коробова, вычисленных по формуле (22) и соотношению $K_s = s!P_s$ (отметим, что в [6–8] вычисления выполнены до третьего порядка):

$$K_1 = -\frac{N-1}{2},\ K_2 = \frac{N^2-1}{6},\ K_3 = -\frac{N^2-1}{4},\ K_4 = -\frac{1}{30}(N^2-1)(N^2-19),$$
$$K_5 = \frac{(N^2-1)(N^2-9)}{4},\ K_6 = \frac{1}{84}(N^2-1)(2N^4-145N^2+863),$$
$$K_7 = -\frac{5}{24}(N^2-1)(N^2-25)(2N^2-11).$$

Следующие числа Коробова вычислены методом неопределённых коэффициентов с использованием результатов теоремы 4:

$$K_8 = -\frac{1}{90}(N^2-1)(3N^6-497N^4+9247N^2-33953),$$
$$K_9 = \frac{7}{20}(N^2-1)(N^2-49)(3N^4-50N^2+167),$$
$$K_{10} = \frac{5}{660}(N^2-1)(10N^8-2993N^6+114597N^4-1184767N^2+3250433),$$
$$K_{11} = -\frac{15}{8}(N^2-1)(N^2-9)(N^2-81)(2N^4-49N^2+173),$$
$$K_{12} = -\frac{N^2-1}{5460}(1382N^{10}-653818N^8+42418211N^6-845983589N^4+6117468907N^2-$$
$$-13695779093),$$
$$K_{13} = \frac{11}{840}(N^2-1)(N^2-121)(1382N^8-77096N^6+1336965N^4-8756954N^2+18382103).$$

Из наблюдения за видом чисел Коробова вытекает

Гипотеза 1.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{K_{2n+1}}{K_{2n}} = \frac{1-4n^2}{2}.$$

Если гипотеза верна, то нам известны старшие ненулевые коэффициенты всех чисел Коробова. В качестве упражнения можно попробовать методом неопределённых коэффициентов продолжить вычисления чисел Коробова, общий вид которых (при верности гипотезы) следующий:

$$K_{14} = \frac{7}{6}(N^2-1)T_{12}(N), \quad K_{15} = -\frac{455}{4}(N^2-1)(N^2-169)T_{10}(N),$$
$$K_{16} = \frac{-3617}{510}(N^2-1)T_{14}(N),\ K_{17} = \frac{3617}{4}(N^2-1)(N^2-9)(N^2-25)(N^2-225)T_8(N).$$

Здесь $T_n(N)$ — чётный многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, коэффициенты которого и следует вычислить. Для применения метода неопределённых коэффициентов предлагается таблица значений отдельных специальных чисел $P_n = K_n/n!$ в зависимости от размера сетки N.

n	N					
	2	3	4	5	6	7
14	$1/2^{14}$	$2/2187$	$-255/16384$	$8/125$	$71698571/35831808$	$445/49$
15	$-1/2^{15}$	$-1/2187$	$255/32768$	$-21/125$	$-71698571/71663616$	$357/49$
16	$1/2^{16}$	$1/6561$	$1/65536$	$76/625$	$-429909599/429981696$	$-948/49$
17	$-1/2^{17}$	0	$-513/131072$	0	$262143/131072$	$474/49$

Для вычисления K_{16} добавим недостающее значение $P_{16} = -6684671/2^{16}$ при $N = 8$. Приведем также вид начальных многочленов Коробова:

$$K_0(x) = 1,\ K_1(x) = x - \frac{N-1}{2},\ K_2(x) = x^2 - Nx + \frac{N^2-1}{6},$$
$$K_3(x) = x^3 - \frac{3(N+1)}{2}x^2 + \frac{N(N+3)}{2}x - \frac{N^2-1}{4},$$
$$K_4(x) = x^4 - (2N+4)x^3 + (N^2+6N+4)x^2 - 2N(N+2)x - \frac{(N^2-1)(N^2-19)}{30},$$
$$K_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}(N+3)x^4 + \frac{5}{3}(N^2+9N+11)x^3 - \frac{5}{2}(3N^2+11N+6)x^2 -$$
$$-\frac{1}{6}(N^4-55N^2-90N)x + \frac{1}{4}(N^2-1)(N^2-9),$$
$$K_6(x) = x^6 - 3(N+4)x^5 + \frac{5}{2}(N^2+12N+21)x^4 - 5(4N^2+21N+20)x^3 +$$
$$+\frac{1}{2}(-N^4+105N^2+300N+144)x^2 + (2N^4-50N^2-72N)x + K_6,$$
$$K_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}(N+5)x^6 + \frac{7}{2}(N^2+15N+34)x^5 - \frac{35}{4}(5N^2+34N+45)x^4 +$$
$$+\frac{7}{6}(-N^4+170N^2+675N+548)x^3 + \frac{7}{4}(5N^4-225N^2-548N-240)x^2 +$$
$$+\frac{1}{6}(N^6-119N^4+1918N^2+2520N)x + K_7.$$

По свойству многочленов Коробова первого рода $\Delta K_s(x) = sK_{s-1}(x)$ и числам Коробова $K_s = K_s(0)$ в качестве начальных условий вычисляется следующий общий вид старших коэффициентов многочленов Коробова первого рода:

$$K_n(x) = x^n - \frac{n(N+n-2)}{2}x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2\frac{2N^2+6(n-2)N+3n^2-13n+12}{12}x^{n-2} -$$
$$-\mathrm{C}_n^3\frac{(2n-4)N^2+(3n^2-13n+12)N+(n^3-7n^2+14n-8)}{8}x^{n-3} + \ldots$$

При фиксированном N численное значение чисел и многочленов Коробова на сетке удобнее вычислять не по этим формулам, а с помощью леммы 3 или формулы (24).

В [8] предложен метод вывода многочленов Бернулли из многочленов Коробова $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{K_n(Nx)}{N^n} = B_n(x)$.

Заключение

Дискретные периодические функции Бернулли служат естественным и достаточно удобным аппаратом при более подробном изложении теории дискретного преобразования Фурье. Поэтому не случайно на них практически одновременно и независимо друг от друга вышли проф. В. Н. Малоземов и автор работы. В рамках теории чисел дискретные периодические функции Бернулли представлены в виде многочленов Коробова и активно исследуются. Например, работа [17] в течение 2017 г. процитирована 5 раз. Кроме возможных приложений в технике, их востребованность обусловлена ещё и тем, что числа и многочлены Коробова служат одним из основных примеров для изложения теневого исчисления, развитого в работах Рота и его последователей [18]. В рамках теневого исчисления изучаются [8] также числа и многочлены Коробова второго рода, которые в данной работе не затрагиваются. Близким объектом служат многочлены Карлица.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бер М. Г., Малоземов В. Н.* Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1992. Т. 32. № 11. С. 1709–1719.
2. Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Ч. 2 / под ред. В. Н. Малоземова. СПб.: Изд-во ВВМ, 2014. 605 с.
3. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: Лань, 2012. 304 с.
4. *Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.
5. *Беспалов М. С.* Представление для сумм четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах // Изв. вузов. Математика. 1996. Т. 8 (411). С. 6–12.
6. *Коробов Н. М.* Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Математические записки. 1996. Т. 2. С. 77–89.
7. *Устинов А. В.* О формулах суммирования и интерполяции // Чебышевский сб. 2001. Т. 1. № 1. С. 52–71.
8. *Устинов А. В.* Полиномы Коробова и теневой анализ // Чебышевский сб. 2003. Т. 4. № 4(8). С. 137–152.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
10. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
11. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / под ред. К. А. Рыбникова. М.: Наука, 1982. 368 с.
12. *Беспалов М. С.* О производящих функциях для некоторых тригонометрических сумм // Научные исследования института — техническому и культурному прогрессу. Материалы XXV научн. конф. ВПИ. Ч. 1. Владимир: ВПИ, 1990. С. 40.
13. *Гузев М. А., Устинов А. В.* Механические характеристики модели молекулярной динамики и полиномы Коробова // Дальневост. матем. журн. 2016. Т. 16. № 2. С. 39–43.

14. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. II. М.: Наука, 1984. 640 с.
15. *Беспалов М. С.* Тригонометрические суммы для задач молекулярной динамики // Междунар. конф. по матем. теории управления и механике. Тез. докл. Суздаль, 7–11 июля 2017. Владимир: ООО «Аркаим», 2017. С. 36–37.
16. *Беспалов М. С., Панина Н. А.* Программа вычисления точного значения сумм четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах окружности. Зарегистрированная программа для ЭВМ. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2011616549 от 22 августа 2011 г.
17. *Долгий Д. В., Ким Д. С., Ким Т.* О полиномах Коробова первого рода // Матем. сб. 2017. Т. 206. № 1. С. 65–79.
18. *Roman S. M. and Rota G.-C.* The umbral calculus // Adv. Math. 1978. V. 27. P. 95–188.

REFERENCES

1. *Ber M. G. and Malozemov V. N.* The best formulas for approximate calculastion of a discrete Fourier transform. Comput. Math. and Math. Physics, 1992, vol. 32, no. 11. pp. 1533–1544.
2. Izbrannye glavy discretnogo garmonicheskogo analiza i geometricheskogo modelirovaniya. Ch. 2. [Selected Chapters of Discrete Harmonic Analysis and Geometric Modeling. P. 2]. Ed. V. N. Malozemov. St. Petersburg, VVM Publ., 2014. 605 p. (in Russian)
3. *Malozemov V. N. and Macharskiy S. M.* Osnovy discretnogo garmonicheskogo analiza [Basics of Discrete Harmonic Analysis]. St. Petersburg, Lane Publ., 2012. 304 p. (in Russian)
4. *Malozemov V. N. and Pevniy A. B.* Discrete periodic splines and their computational application. Comput. Math. and Math. Physics, 1998, vol. 38, no. 8. pp. 1181–1192.
5. *Bespalov M. S.* Representation for sums of even negative degrees of sines in equivdistant nodes. Russian Mathematics, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 4–10.
6. *Korobov N. M.* Special'nye polinomy i ikh prilojeniya [Special polynomials and its application]. Diofantovy Pribligeniya. Matematicheskie Zapiski, 1996, vol. 2, pp. 77–89. (in Russian)
7. *Ustinov A. V.* O formulakh summirovaniya i interpolyacii [On summation and interpolation formulas]. Chebyshevskii Sbornik, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 52–71. (in Russian)
8. *Ustinov A. V.* Polynomy Korobova i tenevoi analis [Polynomials of Korobov and umbral analysis]. Chebyshevskii Sbornik, 2003, vol. 4, no. 4(8), pp. 137–152. (in Russian)
9. *Horn R. A. and Johnson C. R.* Matrix Analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 1986. 662 p.
10. *Trakhman A. M., Trakhman V. A.* Osnovy teorii signalov na konechnikh intervalakh [Fundamentals of the Theory of Signals of Finite Intervals]. Moscow, Soviet Radio Publ., 1975. 208 p. (in Russian)
11. Kombinatorniy analis. Zadzchi i upragneniya [Combinatorial Analysis. Tasks and Exercises]. Ed. K. A. Rybnikov. Moscow, Nauka Publ., 1982. 368 p. (in Russian)
12. *Bespalov M. S.* O proizvodyachikh funkciyakh dlia nekotorikh trigonometricheskikh summ [On generating functions for same trigonometric sums]. Proc. XXV Sci. Conf. VPI. P. 1. Vladimir, VPI Publ., 1990, p. 40. (in Russian)
13. *Guzev M. A. and Ustinov A. V.* Mechanical characteristics of molecular dynamics model and Korobov polynomials. Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 39–43. (in Russian)
14. *Zorich V. A.* Matematicheskii analis [Mathematical Analysis]. P. 2. Moscow, Nauka Publ., 1984. 640 p. (in Russian)
15. *Bespalov M. S.* Trigonometricheskie summy dlia zadach molekuliarnoy dinamiki [Trigonometric sums for problems of molecular dynamics]., Intern. Conf. Math. Control Theory and Mechanics. Vladimir, Arcaim Publ., 2017, pp. 36–37. (in Russian)

16. *Bespalov M. S. and Panina N. A.* Program calculation exact value for sums of even negative degrees of sines in equivdistant nodes. Program for computation no. 2011616549. 22.08.2011.
17. *Dolgy D. V., Kim D. S., and Kim T.* Korobov polynomials of the first kind. Sb. Math. 2017, vol. 208, no. 1. pp. 60–74.
18. *Roman S. M. and Rota G.-C.* The umbral calculus. Adv. Math., 1978, vol. 27, pp. 95–188.