

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/57/7

**В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик, Е.Р. Эйсмонт****КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЛИНИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК  
СВОБОДНОЙ ОТ НАГРУЗКИ ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА**

На основе представления об особой точке деформируемого тела в виде бесконечно малой частицы, получаемой в результате стягивания к ней элементарного объема, изучаются ограничения на параметры состояния в точках края поверхности соединения двухслойного цилиндра. Устанавливаются варианты возможных постановок задач механики деформируемого твердого тела. Выявляются критические сочетания геометрических и материальных параметров, приводящие к сингулярному характеру напряженного состояния в особых точках.

**Ключевые слова:** *особые точки, неклассические задачи, двухслойный цилиндр, температурная нагрузка.*

В настоящее время для исследования полей напряжений вблизи особых точек деформируемых тел (вершин клиньев, конусов, многогранников, точек края поверхностей соединения тел и т.п.) применяются два подхода. Первый из них (далее классический или асимптотический) разрабатывается авторами публикаций [1–17 и др.]. Классический подход характерен тем, что особая точка в нем исключается из области поиска решения. Это делается путем помещения в особую точку полюса криволинейной системы координат (полюс не может быть точкой области построения решения, так как в нем отсутствует однозначное соответствие между координатами и точкой тела). Исключение особой точки приводит к неадекватному определению напряжений в ее окрестности, так как при этом не рассматриваются условия непосредственно в особой точке. Кроме того, в данном случае отсутствует механический смысл получаемого асимптотического решения, поскольку невозможно указать элементарный объем, в котором такое решение реализуется. Альтернативный (неклассический) подход к изучению напряжений в особых точках и их окрестностях предлагается в публикациях [18–24]. В этом подходе особая точка считается бесконечно малой частицей среды (тела), получающейся путем стягивания в нее элементарного объема. Такое представление о точке сплошной среды разработано учеными XVIII века (Даниил и Иоганн Бернулли, Ж. Л. Д’Аламбер и Л.Эйлер [25]) и используется современными исследователями. Элементарным объемом в рассматриваемом контексте является континуальная модель представительного объема изучаемого тела. Параметры состояния элементарного объема однородны и сохраняют свои значения при стягивании в бесконечно малую частицу. Поэтому параметры состояния в точке сплошной среды (в частности, в особой точке) совпадают с параметрами состояния содержащего ее элементарного объема. Изучение напряженного состояния в особых точках и их окрестностях на основе альтернативного подхода показывает, что необычность (уникальность) этих точек в деформируемых твердых телах проявляется в избыточном количестве (по сравнению с обычными точками поверхности те-

ла) задаваемых в них ограничений [18–24]. Данное обстоятельство обуславливает неклассическую постановку задач механики деформируемого твердого тела, содержащего особые точки. Неклассические (в указанном смысле) задачи рассматривались в работах [18] – однородные плоские клинья, [20, 21] – составные плоские клинья, [22] – составные пространственные ребра, [23] – круговые и составные конусы, [24] – внутренние особые точки плоских элементов конструкций.

В настоящей статье неклассический подход используется для изучения параметров состояния на линии особых точек, расположенной на свободной торцевой поверхности составного цилиндра и представляющей собой ребро, образованное пересечением торцевых поверхностей составляющих элементов. Устанавливаются соответствующие постановки задач механики деформируемого твердого тела (МДГТ). Приводится решение задачи о температурной нагрузке двухслойного полого цилиндра, согласующееся со всеми задаваемыми в особых точках ограничениями.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается двухслойный цилиндр. Его торцевое и осевое сечения представлены на рис. 1 и 2. Принимается, что торцевые поверхности составляющих цилиндров 1 и 2 образуют ребро  $\Gamma$ . Считается, что плоскости  $\varphi = \text{const}$  являются нормальными плоскостями ребра  $\Gamma$ . Углы между касательными к линиям пересечения нормальной плоскости ребра  $\Gamma$  и общей образующей цилиндров 1 и 2 обозначаются соответственно  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 2).

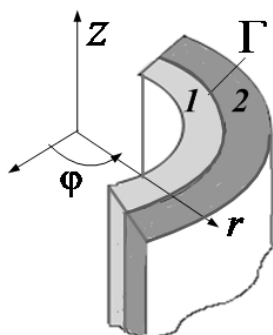


Рис. 1. Торцевое сечение двухслойного цилиндра

Fig. 1. End section of a double-layered cylinder

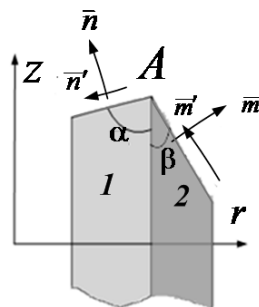


Рис. 2. Осевое сечение двухслойного цилиндра

Fig. 2. Axial section of a double-layered cylinder

Область изменения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  задается неравенствами:

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi, \quad 0 < \alpha + \beta < 2\pi. \quad (1)$$

Через  $\bar{n}$ ,  $\bar{m}$  обозначаются нормали в точках ребра  $\Gamma$  к касательным плоскостям поверхностей, образующих ребро. Через  $\bar{n}'$ ,  $\bar{m}'$  обозначаются орты, перпендикулярные соответственно направлениям  $\bar{n}$ ,  $\bar{m}$ . Приняты обозначения:  $E_k$ ,  $G_k$ ,  $\nu_k$ ,  $\omega_k$  ( $k=1,2$ ) – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона и температурной деформации составляющих цилиндров;  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $\epsilon_{ij}^{(k)}$  ( $k=1,2$ ) – физические

ские компоненты напряжений и деформаций;  $\sigma_n, \tau_{n1}, \tau_{n2}$  – нормальное и касательные напряжения в направлении соответственно  $\bar{n}'$  и  $\bar{r}_2$  ( $\bar{r}_2$  – орт, определяющий угловое направление цилиндрической системы координат) на площадке, ориентируемой ортом  $\bar{n}$ ;  $\sigma_m, \tau_{m1}, \tau_{m2}$  – нормальное и касательные напряжения в направлении соответственно  $\bar{m}'$  и  $\bar{r}_2$  на площадке, ориентируемой ортом  $\bar{m}$ ;  $\Delta T$  – приращение температуры. Считается, что на торцевом сечении отсутствует поверхностная нагрузка. К ребру (т.А) примыкают элементарные объемы скрепленных цилиндров 1 и 2. В соответствии с принятой концепцией эти элементарные объемы при стягивании к точке А образуют особые точки. Напряжения и деформации в особых точках совпадают с напряжениями и деформациями соответствующих элементарных объемов. Для параметров состояния в рассматриваемых элементарных объемах выполняются следующие условия:

1) равенство нулю поверхностных нагрузок:

$$\sigma_n = 0, \tau_{n1} = 0, \tau_{n2} = 0; \sigma_m = 0, \tau_{m1} = 0, \tau_{m2} = 0; \quad (2)$$

2) непрерывность напряжений на поверхности соединения составляющих цилиндров

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} = \sigma_{rz}; \quad (3)$$

3) непрерывность деформаций на поверхности соединения составляющих элементов (следует из совпадения поверхностей скрепляемых тел с поверхностью соединения)

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \varepsilon_{zz}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\varphi z}^{(1)} = \varepsilon_{\varphi z}^{(2)}. \quad (4)$$

Через физические компоненты тензоров напряжений равенства (2) с использованием равенств (3) в цилиндрической системе координат запишутся соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\ \sigma_{rr} \cos^2 \beta + 2\sigma_{rz} \cos \beta \sin \beta + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \beta &= 0, \\ (\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \beta \sin \beta + \sigma_{rz} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha &= 0, \\ \sigma_{r\varphi} \cos \beta + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (5) являются автономной системой линейных однородных уравнений относительно компонент  $\sigma_{zz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(2)}, \sigma_{rr}, \sigma_{rz}$ . Определитель этой системы уравнений

$$\Delta = -\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \quad (7)$$

в области (1) изменения параметров  $\alpha, \beta$  обращается в нуль в точках

$$\alpha + \beta = \pi. \quad (8)$$

Равенства (4) с использованием физических уравнений термоупругости и равенств (3) преобразуются к виду

$$\frac{1}{E_1}(\sigma_{zz}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}) + \omega_1 \Delta T = \frac{1}{E_2}(\sigma_{zz}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}) + \omega_2 \Delta T; \quad (9)$$

$$\frac{1}{E_1}(\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{zz}^{(1)}) + \omega_1 \Delta T = \frac{1}{E_2}(\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{zz}^{(2)}) + \omega_2 \Delta T; \quad (10)$$

$$\frac{1}{G_1} \sigma_{z\varphi}^{(1)} = \frac{1}{G_2} \sigma_{z\varphi}^{(2)}. \quad (11)$$

Задача состоит в исследовании возможных решений построенных уравнений (5), (6), (9) – (11) и выявлении в зависимости от геометрических и материальных параметров независимых ограничений на параметры состояния в особых точках.

## 2. Построение ограничений на параметры состояния в особых точках

Ограничениями на параметры состояния в особых точках являются решения систем уравнений (5) и (6), (11). В этом пункте рассматриваются возможные случаи таких решений. Каждому случаю отвечает независимая постановка задачи, потому что ограничения в каждом случае различаются и количеством и содержанием.

### 2.1. Случай $\alpha + \beta \neq \pi$ .

Определитель (7) системы уравнений (5) не обращается в нуль. Ее решение

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{rz} = \sigma_{rr} = 0. \quad (12)$$

Равенства (9), (10) приводятся к системе уравнений относительно напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$

$$\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad -\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T. \quad (13)$$

Определитель этой системы

$$\Delta_1 = \frac{1}{E_1 E_2} (\nu_1 - \nu_2) \quad (14)$$

обращается в нуль при выполнении равенства  $\nu_1 = \nu_2$ , поэтому возможны случаи

1)  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$ . Система уравнений (13) однородна.

а) если  $\nu_1 \neq \nu_2$ , ее решение тривиально  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$ .

б) если  $\nu_1 = \nu_2$ , уравнения (13) линейно зависимы. Напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  связаны равенством

$$E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0. \quad (15)$$

2)  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0$ .

а) если  $\nu_1 \neq \nu_2$ , система уравнения (13) имеет решение

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + \nu_2) E_1}{(\nu_1 - \nu_2)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + \nu_1) E_2}{(\nu_1 - \nu_2)}. \quad (16)$$

б) если  $\nu_1 = \nu_2$ , ранг расширенной матрицы уравнений (13) оказывается большим, чем ранг системы, поэтому она несовместна. Напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  при стремлении  $\nu_1$  к  $\nu_2$  в особых точках стремятся к неограниченно большим значениям.

Равенства (6), (11) образуют систему линейных однородных уравнений относительно напряжений  $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}$ . Определитель этой системы

$$\Delta_2 = \frac{1}{G_1} \sin \beta \cos \alpha + \frac{1}{G_2} \sin \alpha \cos \beta$$

обращается в нуль при условии

$$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0. \tag{17}$$

Если условия (17) не выполняются, уравнения (6), (11) имеют тривиальное решение

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0. \tag{18}$$

Если условие (17) выполняется, ранг системы уравнений (6), (11) равен двум, напряжения  $\sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}$  могут быть выражены через  $\sigma_{r\varphi}$ :

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta. \tag{19}$$

Рассмотренные выше случаи сведены в табл.1.

Т а б л и ц а 1

**Ограничения на компоненты напряжений в особых точках  
для случая  $\alpha + \beta \neq \pi$**

| № | Условия на материальные параметры и $\Delta T$                                                                                                            | Ограничения<br>(дополнительно к равенствам (3))                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Количество ограничений |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 1 | 2                                                                                                                                                         | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 4                      |
| 1 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 \neq v_2$    | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$                                                                                                                                    | Двенадцать             |
| 2 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 = v_2$       | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$                                                                                                                               | Одиннадцать            |
| 3 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 \neq v_2$ | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$ | Двенадцать             |
| 4 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 = v_2$    | Ограничения несовместны                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | —                      |

Окончание табл. 1

| 1 | 2                                                                                                                                                      | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 4           |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 5 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 \neq v_2$    | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$                                                                                                                                    | Одиннадцать |
| 6 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 = v_2$       | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$<br>$E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$                                                                                                                               | Десять      |
| 7 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 \neq v_2$ | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$ | Одиннадцать |
| 8 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 = v_2$    | Ограничения несовместны                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | —           |

Таким образом, для случая  $\alpha + \beta \neq \pi$  возможны шесть различных вариантов формулировки ограничений в особых точках и, следовательно, шесть различных постановок задач МДТТ. Во всех этих вариантах, различающихся условиями для материальных и геометрических параметров, количество ограничений в особых точках превосходит количество обычно принимаемых авторами в подобных задачах ограничений равное девяти (равенства (2), (3)). Это увеличение связано с включением в список ограничений соотношений (4), которые в случае различных материальных параметров составляющих цилиндров не выполняются тождественно.

## 2.2. Случай $\alpha + \beta = \pi$ .

Уравнения (5), (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ -(\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0; \end{aligned}$$

$$-\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha = 0, \quad -\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \alpha = 0. \quad (21)$$

Ранг матрицы системы уравнений (20) равен трем. Следовательно, три компонента напряжений выражаются через четвертый:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}. \quad (22)$$

Из уравнений (21) следуют зависимости

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (23)$$

Соотношения (9), (10), (11) запишутся равенствами

$$\frac{v_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{v_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + F \sigma_{rr} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (24)$$

$$-\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (25)$$

$$\left( \frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha = 0. \quad (26)$$

В этих равенствах обозначено

$$F = -\frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - v_1) + \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - v_2), \quad H = \left( \frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2} \right) (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1).$$

Возможны следующие случаи решений системы уравнений (24) и (25)

1)  $v_1 \neq v_2$ . Ранг системы уравнений (24), (25) равен двум. Напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  можно выразить через напряжение  $\sigma_{rr}$  и приращение температуры:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)}; \quad (27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}. \quad (28)$$

2)  $v_1 = v_2 \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ . Ранг системы уравнений (24), (25) равен двум. Определяется напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2) [\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)]} \quad (29)$$

и линейная комбинация

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-\operatorname{ctg}^2 \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}. \quad (30)$$

3)  $v_1 = v_2 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ . Ранг системы уравнений (24), (25) равен единице. Ранг

расширенной матрицы равен двум, если  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0$ . Ограничения на параметры состояния в особых точках несовместны. Когда геометрические и материальные параметры элемента конструкции стремятся к данному сочетанию, напряжения в особых точках неограниченно возрастают. При выполнении условия  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$  ранги матрицы системы уравнений (24), (25) и ее расширенной матрицы совпадают, уравнения становятся зависимыми. Любое из них определяет связь между напряжениями  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  и  $\sigma_{rr}$ .

Из равенства (26) следует, что при выполнении какого-либо из условий

$$G_1 = G_2, \quad \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (31)$$

на напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  ограничения не накладываются. Если ни одно из условий (31)

не выполняется, напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  подчиняются ограничению

$$\sigma_{r\varphi} = 0. \quad (32)$$

Результаты данного пункта сведены в табл. 2.

Таблица 2

Ограничения в особых точках для случая  $\alpha + \beta = \pi$ 

| № | Условия на материальные параметры и $\Delta T$                                                                                                                                          | Ограничения<br>(дополнительно к равенствам (1.3))                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Количество ограничений |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 1 | 2                                                                                                                                                                                       | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 4                      |
| 1 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 \neq v_2$                                                                           | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$                                                                        | Одиннадцать            |
| 2 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-\operatorname{ctg}^2 \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)},$<br>$\sigma_{rr} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2) (\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha))}$ | Одиннадцать            |
| 3 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$    | Ограничения несовместны                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | —                      |
| 4 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 \neq v_2$                                                                              | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}$                                                                                                                                                                                                                   | Одиннадцать            |
| 5 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$    | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0, \sigma_{rr} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                       | Одиннадцать            |
| 6 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$       | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$-\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                       | Десять                 |

Окончание табл. 2

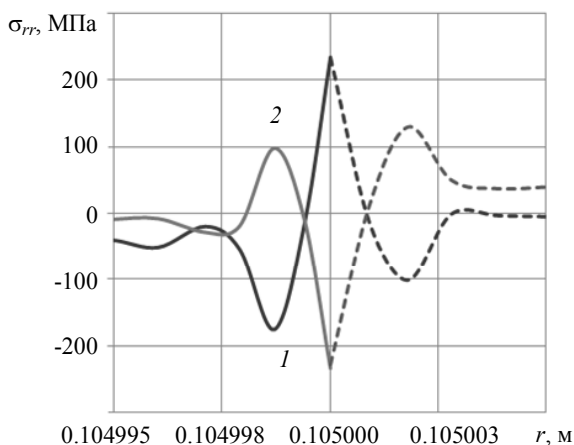
| 1  | 2                                                                                                                                                                                                        | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 4      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 7  | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 \neq v_2$                                                                                               | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$                                                                        | Десять |
| 8  | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$                     | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha,$<br>$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-\operatorname{ctg}^2 \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)},$<br>$\sigma_{rr} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2) (\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha))}$ | Десять |
| 9  | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$\alpha \neq \pi/2$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ | Ограничения несовместны                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | —      |
| 10 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 \neq v_2$                                                                                                  | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}$                                                                                                                                                                                                                   | Десять |
| 11 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$                                                                                                                    | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Десять |
|    | $v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$                                                                                                                 | $\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{rr} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |        |
| 12 | $(G_2 - G_1) = 0, \alpha \neq \pi/2$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$                                   | Соединяемые элементы имеют одинаковые материальные параметры. Постановка упругой задачи совпадает с постановкой в классическом случае                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |        |
| 13 | $G_2 \neq G_1,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v$<br>$\alpha = \pi/2$                                                                                                          | $\sigma_{rz} = 0, \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0, -\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Девять |

Из табл. 2 видно, что для случая  $\alpha + \beta = \pi$  возможны одиннадцать совместных вариантов формулировки ограничений в особых точках. В варианте 12 материальные параметры  $G$  и  $\nu$  соединяемых элементов совпадают, поэтому он отвечает нагружению однослойного цилиндра (при  $\Delta T = 0$  различие коэффициентов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не сказывается на решении задачи). Равенства (24) – (26) выполняются тождественно. Задача становится классической. Во всех остальных вариантах количество ограничений в особых точках превосходит количество ограничений, вытекающих из равенств (2), (3), принимаемых во внимание в классическом подходе.

### 3. Пример. Температурное нагружение двухслойного полого цилиндра

Рассматривается температурное нагружение двухслойного полого цилиндра (рис. 1 и 2) при следующих геометрических и материальных параметрах:  $R = 0.1$  м,  $h_1 = 0.005$  м,  $h_2 = 0.001$  м,  $H = 0.3$  м,  $E_1 = 100$  ГПа,  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.28$ ,  $\omega_1 = 0.5 \cdot 10^{-5}$  1/град,  $\omega_2 = 0.8 \cdot 10^{-5}$  1/град,  $\Delta T = 100^\circ \text{C}$ ,  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Жесткость внешнего цилиндра  $E_2$  варьируется (60–146 ГПа). В табл. 2. (случай 1) выписаны ограничения, накладываемые на физические компоненты напряжений. Решение задачи строится численно-аналитическим итерационным методом, описанным в работе [19]. Характерный размер конечно-элементной сетки вблизи точек ребра был равен  $0.5 \cdot 10^{-5}$  м. Результаты вычислений приводятся на рис. 3 – 4.

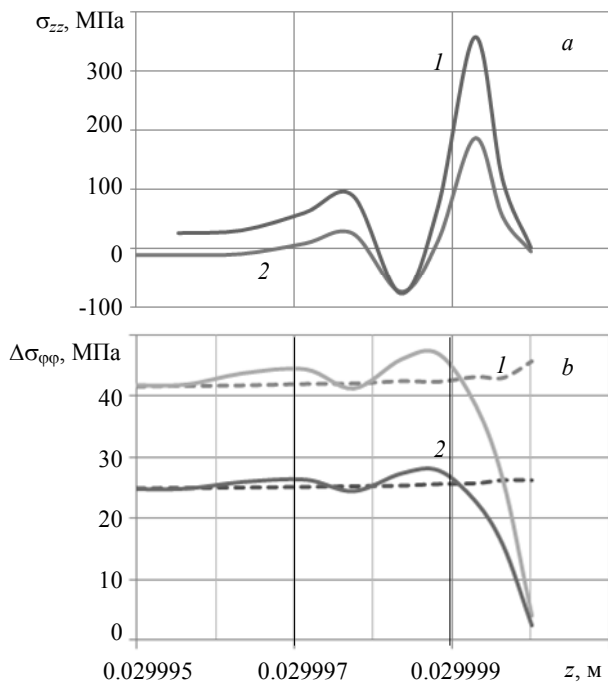
На рис. 3 показаны радиальные напряжения вблизи линии особых точек в торцевом сечении. Интересно, что знак этих напряжений зависит от жесткости цилиндров. При повышении температуры в точках края поверхности соединения напряжения растягивающие, если внутренний цилиндр более жесткий, и сжимающие, – если менее жесткий. Это обстоятельство можно использовать, к примеру, в задачах защиты цилиндрических конструкций от коррозии.



**Рис. 3.** Напряжения  $\sigma_{rr}$  в точках торцевого сечения: сплошная линия – во внутреннем цилиндре, штриховая – во внешнем. 1 –  $E_2 = 60$  ГПа; 2 –  $E_2 = 146$  ГПа

**Fig. 3.** Stress values  $\sigma_{rr}$  at the points of end section: the solid line corresponds to the inner cylinder; the dashed, to the outer cylinder.  $E_2 = (1) 60$  and  $(2) 146$  GPa

На рис. 4, *a* показаны напряжения  $\sigma_{zz}$  в составляющих цилиндрах вблизи линии особых точек в направлении общей образующей. Видно, что эти напряжения в окрестности особой точки имеют значительную величину, но равны нулю в самой точке, что согласуется с соотношениями, представленными в табл. 2.



**Рис. 4.** Напряжения в окрестности особой точки вдоль образующей поверхности соединения цилиндров: 1 – внутренний цилиндр; 2 – внешний цилиндр,  $E_2 = 60$  ГПа: *a* –  $\sigma_{zz}$ ; *b* – невязка выполнения равенств (27), (28). Сплошная линия – итерационное решение; штриховая линия – ANSYS-решение

**Fig. 4.** Stress values in the vicinity of singular point along a generator of cylinders' joint surface: 1, inner cylinder and 2, outer cylinder at  $E_2 = 60$  GPa: *a*)  $\sigma_{zz}$  and *b*) discrepancy in the equalities (27) and (28). The solid line indicates the iterative solution; the dashed line, the ANSYS-solution

На рис. 4, *b* показана умноженная на разность  $(v_1 - v_2)$  невязка выполнения равенств (27), (28). На линии особых точек торцевого сечения эти равенства должны выполняться, поэтому невязка в этих точках должна обращаться в нуль. Видно, что при приближении к линии особых точек невязка по равенствам (27), (28) в решении задачи стремится к нулю. В ANSYS-решении (классический подход), построенном на той же конечно элементной сетке, ограничения (27), (28) на компоненты напряжений в особой точке не выполняются. Вне малой окрестности особой точки классическое и неклассическое решения совпадают.

### Заключение

Представление о точке сплошной среды в виде бесконечно малой частицы, получаемой в результате стягивания к ней элементарного объема, распространяется на особые точки деформируемых тел. Предлагаемый подход позволяет сформулировать в особых точках задаваемые условия (ограничения) на параметры состояния. Показано, что количество таких ограничений в рассматриваемой задаче определяется материальными и геометрическими параметрами элемента конструкции и, как правило, превышает количество граничных условий в обычной точке поверхности тела. Это обстоятельство обуславливает неклассическую постановку задач МДТТ. Установлены сочетания материальных и геометрических параметров, указывающие на критическое состояние элемента конструкции в том смысле, что при выполнении таких сочетаний напряжения в особых точках неограниченно возрастают. С использованием итерационного численно-аналитического метода [19] исследовано напряженное состояние двухслойного цилиндра при температурной нагрузке. Показано, что полученное решение на линии особых точек торцевой поверхности согласуется со всеми задаваемыми в этих точках ограничениями.

Приведенные в работе результаты найдут применение в исследовании краевых эффектов слоистых конструкций, механике композитов, изучении концентрации напряжений в точках края поверхностей клеевых соединений, и т.п.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
2. Bogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96. DOI: 10.1115/1.3408786.
3. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
4. Sinclear G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
5. Sinclear G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
6. Barut A., Guven I., Madenci E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. of Solid and Structures. – 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
7. Шемякин Е.И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // ДАН. – 1996. – Т. 347. № 3. С. 342–345.
8. Задоян М.А. Прочность соединения составных плит // Механика твердого тела. – 2003. № 1. – С.111–122.
9. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Mech. Rev., 61 (2008) 020801. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2885134>.
10. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A Biologically Inspired Design // Experimental mechanics. 2004. V. 44. No. 6. P. 608–615.
11. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // Experimental mechanics. 2004. V. 44. No. 6. P. 616–621.
12. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 136–158.

13. Luangarpa C., Koguchi H. Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral // *Europ. J. of Mechanics – A/Solids*. 2016. V. 60. P. 208–216.
14. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. Моск. матем. об-ва*. 1967. Т. 16. С. 209–292.
15. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // *ДАН СССР*. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
16. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
17. Kozlov V.A., Mazyar V.G., Schwab C. On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1992. No. 119. P. 197–227.
18. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 1(27). С. 95–109.
19. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2015. № 4. С. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11
20. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L. V. Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253826>.
21. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко защемленными образующими // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 3. С. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
22. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
23. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 52. С. 89–101.
24. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1. <http://link.springer.com/article/10.1007/s11029-017-9644-1>
25. Ковалев Б.Д. Формирование Эйлеровой гидродинамики // *Исследования по истории механики. Сборник статей*. М.: Наука, 1983. С. 146–167.

Статья поступила 05.09.2018 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Eismont E.R.(2019) STRESS COMPONENTS NEAR THE SINGULAR POINTS AT A LOAD-FREE END SECTION OF A LAYERED CYLINDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 85–99

DOI 10.17223/19988621/57/7

Keywords: singular points, non-classical problems, double-layered cylinder, temperature load.

In this paper, special points of a composite deformable body (points on the edge of joint surface) are considered as ordinary points of continuous medium representing infinitely small particles obtained by contracting elementary volumes towards these points. Such an approach supposes the singular points to be located in the solution area and makes it possible to formulate

the conditions (restrictions) for state parameters in these points. It is shown that the number of restrictions on the line of singular points on the end face of double-layered cylinder is defined by material and geometric parameters of the structural element, and, generally, exceeds the number of boundary conditions specified at the ordinary points of body surface. This fact specifies a non-classical formulation of the problem of deformable solid mechanics. In this work, various statements of the solid mechanics problems are developed for a considered construction element. The critical combinations of geometric and material parameters leading to a singular nature of the stress state at the singular points are revealed. A solution to the problem of double-layered cylinder under temperature loading is obtained using the numerical-analytical iterative method. The results presented could be applied in mechanics of composites and during the study of edge effects in the layered structures or stress concentration at the points of surface edge of glue joints.

*PESTRENIN Valery Mikhaylovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

*PESTRENINA Irena Vladimirovna* (Candidate of Technical Science, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

*LANDIK Lidiya Vladimirovna* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

*EISMONT Elena Romanovna* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: eis-elena@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Uflyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: AN SSSR Publ.
2. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser.E.* 38(2). pp. 87–96. DOI:10.1115/1.3408786.
3. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in the composite elastic bodies]. Yerevan: AN ArmSSR Publ.
4. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 251–297.
5. Sinclear G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 385–439.
6. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. of Solid and Structures.* 38(50-51). pp. 9077–9109.
7. Shemyakin E.I. (1996) O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya oblastey s uglovymi tochkami (ploskaya deformatsiya) [On the boundary value problems of the theory of elasticity for domains with angular points (plane deformation)]. *Dokl. Akad. Nauk.* 347(3). pp. 342–345.
8. Zadoyan M.A. (2003) Prochnost' soedineniya sostavnykh plit [Bonding strength of the composite plates]. *Mechanics of Solids.* 1. pp. 111–122.
9. Paggi M., Carpintery A. (2008) On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Mech. Rev.* 61(020801). DOI: 10.1115/1.2885134.
10. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. (2004) Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A Biologically Inspired Design. *Experimental mechanics.* 44(6). pp. 608–615.
11. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. (2004) Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis. *Experimental mechanics.* 44(6). pp. 616–621.
12. Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Shulyakovskaya T.D. (2013) Razlozheniya po funktsiyam Fadlya-Papkovicha. Primery resheniy v polupolose [Expansions in Fadley-Papkovich. Examples of solutions in a half-strip]. *Izv. Akad. Nauk MTT.* 5. pp.136–158.

13. Luangarpa C., Koguchi H. (2016) Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral. *Europ. J. of Mechanics – A/Solids*. 60. pp. 208–216. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.002.
14. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in the domains with conical or angular points]. *Proceedings of Moscow Mathematical Society*. 16. pp. 209–292.
15. Maz'ya V.G., Plamenevsky B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [On coefficients in the asymptotics of solutions to the elliptic boundary value problems in the vicinity of edge]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 229(1). pp. 33–36.
16. Parton V.Z., Perlin P.I. (1984) *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*. Moscow: Mir.
17. Kozlov V.A., Mazya V.G., Schwab C. (1992) On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 119. pp. 197–227.
18. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2014) Nestandartnye zadachi dlya odnorodnykh elementov konstruktsey s osobennostyami v vide klin'ev v usloviyakh ploskoy zadachi [Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). pp. 95–109.
19. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Iteratsionnyy konechno-elementnyy algoritm issledovaniya napryazhennogo sostoyaniya elementov konstruktsey s osobymi tochkami i ego realizatsiya [Iterative finite element algorithm and its implementation for stress state of structural elements with singular points]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11.
20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
21. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2016) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti vershiny sostavnogo klina s zhestko zashchemlennymi obrazuyushchimi [Stress-strain state near the wedge top with rigidly fastened sides]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
22. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandard problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhennogo sostoyaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/56/9.
24. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
25. Kovalev B.D. (1983) Formirovanie Eylerovoy gidrodinamiki [Formation of the Euler hydrodynamics]. *Issledovaniya po istorii mekhaniki. Sbornik statey* [Research of the history of mechanics. Collected papers]. Moscow: Nauka. pp. 146–167.

Received: May 5, 2018