МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# МАТЕРИАЛЫ

**VI Международной молодежной научной конференции**

# «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

**Томск, 24–26 мая 2018 г.**

*Под общей редакцией*
*кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

6. *Martin M., Artalejo J.* Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units // Advances in Applied Probability. – 1995. –№27. – P. 840–861.
7. *Назаров А.А, Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

# СТАЦИОНАРНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧИСЛА ЗАЯВОК И ОБЪЁМОВ ЗАНЯТЫХ РЕСУРСОВ В НЕОДНОРОДНОЙ РЕСУРСНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ВХОДЯЩИМ ММРР-ПОТОКОМ

**А.А. Галилейская, Е.Ю. Лисовская**
*Томский государственный университет*
lusta.nastya@mail.ru, ekaterina_lisovs@mail.ru

## Введение

Системы и сети массового обслуживания уже давно применяются в качестве математических моделей различных информационно-компьютерных систем и сетей [1,2]. Чаще аналитические результаты для исследования таких систем массового обслуживания (СМО) удаётся получить лишь в предположении, что входящие потоки пуассоновские. Однако марковские или рекуррентные потоки событий наиболее адекватно описывают современные потоки данных компьютерных и телекоммуникационных сетей.

Кроме того, реальные потоки содержат в себе разнотипные данные, которые передают текстовую или голосовую информацию, в связи в чем возникает необходимость учитывать объём передаваемой информации во избежание потери из-за нехватки предоставляемого ресурса [12–14], а также разнотипность заявок и разнородность обслуживания [3–6].

В данной работе рассматривается ресурсная система с неограниченным числом неоднородных приборов, которая является одной из модификаций систем массового обслуживания (СМО). Требования приходят независимо друг от друга, по одному, они имеют различную природу, требуют разное количество ресурса и по-разному обслуживаются.

Так как для систем массового обслуживания с двумя и более числом приборов, непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным временем обслуживания получение аналитических результатов является затруднительным, для исследования применяется метод асимптотического анализа [7,8].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания MMPP$^{(\nu)}$|GI$^{(n)}$|∞ с $n$ типами неоднородных (в смысле скорости обслуживания) [9] обслуживающих приборов, на вход которой поступает MMPP-поток разнотипных заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)=1,2,...,K$, задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{\nu k}\|$, $\nu,k=\overline{1,K}$ и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_K\}$ (рис. 1).

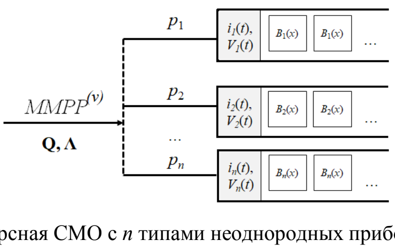


Рис. 1. Бесконечнолинейная ресурсная СМО с $n$ типами неоднородных приборов и с входящим MMPP-потоком

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом. Заявка, поступающая в систему, с вероятностью $p_i$ ($i=\overline{1,n}$) требует для обслуживания случайное количество некоторого ресурса соответствующего типа с функцией распределения $G_i(\nu)$ и обслуживается в течение случайного времени, имеющего функцию распределения $B_i(x)$. Вероятности $p_i$ удовлетворяют условию нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пусть $l_i(t)$ – число заявок $i$-го типа в системе в момент времени $t$, $V_i(t)$ – суммарный объём занятого ресурса $i$-го типа в системе в момент времени $t$, $i=\overline{1,n}$. Поставим задачу нахождения характеристик многомерного случайного процесса $\{\mathbf{l}(t),\mathbf{V}(t)\} = \{l_1(t),...,l_n(t),V_1(t),...,V_n(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [10].

Изобразим $n$ параллельных осей времени, пронумерованных от 0 до $n$ (рис. 2). Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 – второму и т.д, ось под номером $n$ соответствует $n$-му просеянному потоку.

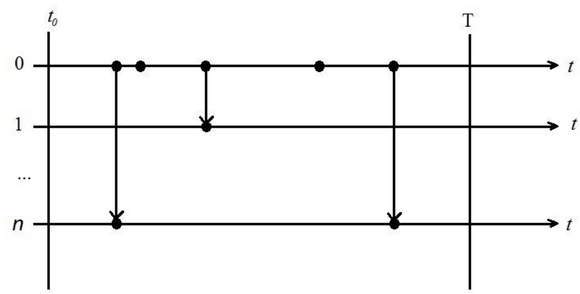


Рис. 2. Просеивание заявок входящего потока

Пусть имеется набор функций $S_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, значения которых лежат в диапазоне [0,1] и обладают свойством $\sum_{i=1}^{n} S_i(t) \le 1$ для любых $t$. Событие входящего потока может просеяться только на одну из осей, либо не просеется ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$, сформирует событие потока на $i$-й оси, т.е. к моменту времени $T$ будет находиться на обслуживании, равна $S_i(t) = 1 - B_i(T-t)$. Вероятность того, что заявка не сформирует событие ни на одной из осей, равна $S_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i(t)$, т.е. к моменту времени $T$ заявка закончит обслуживание и покинет систему.

Обозначим $n_i(t)$ – число событий, наступивших на $i$-й оси просеянного потока до момента $t$, $W_i(t)$ – суммарный объём занятого ресурса просеянными заявками на $i$-й оси. Как показано в [10], многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в момент времени $T$ совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси: $P\{\mathbf{l}(T)=\mathbf{m}\} = P\{\mathbf{n}(T)=\mathbf{m}\}$ для любых $\mathbf{m} = [m_1,...,m_n]$. Нетрудно показать, что для исследуемого процесса $\{\mathbf{i}(t),\mathbf{V}(t)\}$ справедливо

$$P\left\{\mathbf{l}(T)=\mathbf{m},\mathbf{V}(T)<\mathbf{z}\right\}=P\left\{\mathbf{n}(T)=\mathbf{m},\mathbf{W}(T)<\mathbf{z}\right\} \tag{1}$$

для любых $\mathbf{m}=\left[m_1,...,m_n\right]$ и любых $\mathbf{z}=\left[z_1,...,z_n\right]$. Следует отметить, что неравенства $\mathbf{V}(T)<\mathbf{z}$, $\mathbf{W}(T)<\mathbf{z}$ подразумевают поэлементное сравнение векторов, т.е. $V_1(T)<z_1$, $W_1(T)<z_1$ и т.д. Будем использовать равенство (1) для исследования процесса $\left\{\mathbf{l}(t),\mathbf{V}(t)\right\}$ с помощью исследования процесса $\left\{\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\right\}$.

## 2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Добавим компоненту $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени $t$ – к процессу $\left\{\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\right\}$, тогда полученный многомерный процесс будет являться марковским. Введём обозначение для его распределения вероятностей

$$P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)=P\left\{k(t)=k,\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\mathbf{W}(t)<\mathbf{w}\right\}.$$

Для этого распределения составим $\Delta t$-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем:

$$P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t+\Delta t)=P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)(1-\lambda_k\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t)+P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)\lambda_k\Delta tS_0(t)+$$
$$+\lambda_k\Delta t\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\int_0^{w_i}P(k,\mathbf{n}-\mathbf{e}_i,\mathbf{w}-\mathbf{y}_i,t)dG_i(y)+\sum_{\nu\neq k}q_{\nu k}\Delta tP(\nu,\mathbf{n},\mathbf{w},t)+o(\Delta t), \tag{2}$$

где $\mathbf{y}_i$ – вектор, все элементы которого равны 0 за исключением $i$-го, который равен $y$, $\mathbf{e}_i$ – вектор, все элементы которого равны 0 за исключением $i$-го, который равен 1.

Из (2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)}{\partial t}=-\lambda_k\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)+\sum_{\nu\neq k}q_{\nu k}\Delta tP(\nu,\mathbf{n},\mathbf{w},t)+$$
$$+\lambda_k\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\int_0^{w_i}P(k,\mathbf{n}-\mathbf{e}_m,\mathbf{w}-\mathbf{y}_m,t)dG_i(y),\ k=\overline{1,K},\ w_i>0,\ n_i=0,1,...,\ i=\overline{1,n}.$$

Начальное условие для решения $P(k,n,\mathbf{w},t)$ в момент времени $t_0$ определим в виде

$$P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t_0)=\begin{cases}r(k),\ \mathbf{n}=\mathbf{w}=\mathbf{0},\\ 0,\ \text{иначе,}\end{cases}$$

где $r(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$.

Введём характеристические функции вида

$$h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\sum_{n_1=0}^{\infty}e^{ju_1n_1}\int_0^{\infty}e^{jv_1w_1}...\sum_{n_n=0}^{\infty}e^{ju_1n_n}\int_0^{\infty}e^{jv_nw_n}P(k,\mathbf{n},d\mathbf{w},t),$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда можем записать следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}=\sum_{\nu}q_{\nu k}h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)+\lambda_k\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left(e^{ju_i}G_i^*(v_i)-1\right),\ k=\overline{1,K},$$

$$G_i^*(v)=\int_0^{\infty}e^{jvy}dG_i(y).$$

Перепишем эту систему в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}=\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\mathbf{\Lambda}\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(e^{ju_i}G_i^*(v_i)-1\right)+\mathbf{Q}\right] \tag{3}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t_0)=\mathbf{r}, \tag{4}$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\left[h(1,\mathbf{u},\mathbf{v},t),...,h(K,\mathbf{u},\mathbf{v},t)\right]$, $\mathbf{r}=\left[r(1),...,r(K)\right]$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases}\mathbf{rQ}=\mathbf{0},\\ \mathbf{re}=1,\end{cases}$$

и $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

## 3. Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (3) не представляется возможным, для решения задачи (3)–(4) воспользуемся методом асимптотического анализа [10] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [11].

Применим метод асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова [12–14].

Подставим в уравнение (3) $\mathbf{\Lambda}=N\overline{\mathbf{\Lambda}}$ и $\mathbf{Q}=N\overline{\mathbf{Q}}$, где $N\to\infty$ – некоторый параметр, который используется для асимптотического анализа. Тогда можно записать:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}=\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\overline{\mathbf{\Lambda}}\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(e^{ju_i}G_i^*(v_i)-1\right)+\overline{\mathbf{Q}}\right], \tag{5}$$

с начальным условием (4).

**Теорема 1.** Асимптотическая характеристическая функция первого порядка многомерного случайного процесса $\{k(t),\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\}$ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(ju_i+jv_ia_1^{(i)}\right)p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau\right\},$$

где $\lambda=\mathbf{r}\overline{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}$ – средняя интенсивность входящего потока, $a_1^{(i)}$ – математическое ожидание занимаемого ресурса $i$-го типа.

**Доказательство.**

Обозначим

$$\frac{1}{N}=\varepsilon,\ \mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{x},\ \mathbf{v}=\varepsilon\mathbf{y},\ \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon). \tag{6}$$

Перепишем задачу (4)–(5) с учётом введенных обозначений в виде

$$\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)}{\partial t}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\left[\overline{\mathbf{\Lambda}}\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(e^{j\varepsilon x_i}G_i^*(\varepsilon y_i)-1\right)+\overline{\mathbf{Q}}\right] \tag{7}$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0,\varepsilon)=\mathbf{r}. \tag{8}$$

Найдём асимптотическое решение задачи (7)–(8) в два этапа.

*Этап 1*. Подставляя в (7) $\varepsilon=0$, получим $\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{0}$. Сравнивая это уравнение с первым в системе для $\mathbf{r}$, можно сделать вывод, что его решение можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t), \tag{9}$$

где $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ – некоторая скалярная функция, которая удовлетворяет условию:

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)=1. \tag{10}$$

*Этап 2*. Умножим (7) на вектор $\mathbf{e}$, подставим (9), учитывая разложение

$$e^{j\varepsilon x}=1+j\varepsilon x+O\left(\varepsilon^2\right), \tag{11}$$

разделим результаты на ε и произведём асимптотический переход $\varepsilon\to 0$. Тогда, учитывая, что $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{e}=0$ и $\mathbf{re}=1$, для функции $\Phi_1\left(\mathbf{x},\mathbf{y},t\right)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\Phi_1\left(\mathbf{x},\mathbf{y},t\right)}{\partial t}=\Phi_1\left(\mathbf{x},\mathbf{y},t\right)\lambda\sum_{i=1}^{n}p_iS_i\left(t\right)\left(jx_i+jy_ia_1^{(i)}\right). \tag{12}$$

Проинтегрировав уравнение (12) от $t_0$ до $t$, учитывая начальное условие (10), получим

$$\Phi_1\left(\mathbf{x},\mathbf{y},t\right)=\exp\left\{\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(jx_i+jy_ia_1^{(i)}\right)p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau\right\}.$$

Подставляя это выражение в (9) и выполняя замены, обратные к (6), получим

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{u},\mathbf{v},t\right)=\mathbf{F}_1\left(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon\right)\approx\mathbf{F}_1\left(\mathbf{x},\mathbf{y},t\right)=$$

$$=\mathbf{r}\exp\left\{\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(jx_i+jy_ia_1^{(i)}\right)p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau\right\}=\mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(ju_i+jv_ia_1^{(i)}\right)p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau\right\}.$$

*Теорема 1 доказана.*

**Теорема 2.** Асимптотическая характеристическая функция второго порядка многомерного случайного процесса $\left\{k\left(t\right),\mathbf{n}\left(t\right),\mathbf{W}\left(t\right)\right\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\left(\mathbf{u},\mathbf{v},t\right)\approx\mathbf{r}\exp\Bigg\{&N\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(ju_i+jv_ia_1^{(i)}\right)p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau+\\&+N\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(ju_i\right)^2}{2}\left(\lambda p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau+\kappa p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2\left(\tau\right)d\tau\right)+\\&+N\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(jv_i\right)^2}{2}\left(\lambda a_2^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau+\kappa\left(a_1^{(i)}\right)^2p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2\left(\tau\right)d\tau\right)+\\&+N\sum_{i=1}^{n}ju_ijv_i\left(\lambda a_1^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau+\kappa a_1^{(i)}p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2\left(\tau\right)d\tau\right)+\\&+N\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}ju_iju_l\kappa p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)S_l\left(\tau\right)d\tau+N\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jv_ijv_l\kappa a_1^{(i)}p_ia_1^{(l)}p_l\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)S_l\left(\tau\right)d\tau+\\&+N\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}ju_ijv_l\kappa a_1^{(l)}p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)S_l\left(\tau\right)d\tau\Bigg\},\end{aligned}$$

где $\kappa=2\mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{\Lambda}}-\lambda\mathrm{I}\right)\mathbf{e}$, $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ – первый и второй начальные моменты случайных величин с функцией распределения вероятностей $G_i\left(y\right)$.

**Доказательство.**

Перейдём к построению гауссовской аппроксимации суммарных объёмов занятых ресурсов каждого типа. Представим функцию $\mathbf{H}\left(\mathbf{u},\mathbf{v},t\right)$ в виде

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{u},\mathbf{v},t\right)=\mathbf{H}_2\left(\mathbf{u},\mathbf{v},t\right)\exp\left\{N\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i\left(ju_i+jv_ia_1^{(i)}\right)\int_{t_0}^{t}S_i\left(\tau\right)d\tau\right\}, \tag{13}$$

получим уравнение относительно функции $\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}+\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\lambda\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(ju_i+jv_ia_1^{(i)}\right)=\\=\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\overline{\mathbf{\Lambda}}\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(e^{ju_i}G_i^*(v_i)-1\right)+\overline{\mathbf{Q}}\right].\end{aligned}\tag{14}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2=\frac{1}{N},\ \mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{x},\ \mathbf{v}=\varepsilon\mathbf{y},\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon).\tag{15}$$

С использованием обозначений (15) уравнение (14) перепишется в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)}{\partial t}+\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\lambda\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(j\varepsilon x_i+j\varepsilon y_ia_1^{(i)}\right)=\\=\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\left[\overline{\mathbf{\Lambda}}\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(e^{j\varepsilon x_i}G_i^*(\varepsilon y_i)-1\right)+\overline{\mathbf{Q}}\right].\end{aligned}\tag{16}$$

Найдём асимптотическое, при $\varepsilon\to 0$, решение этой задачи, т.е. $\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)$.

*Этап 1.* Выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$ в (16), получим $\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\overline{\mathbf{Q}}=0$. Представим $\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\mathbf{r}\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t),\tag{17}$$

где $\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ – некоторая скалярная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)=1$.

*Этап 2.* Решение уравнения (16) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)=\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\left\{\mathbf{r}+\mathbf{g}\sum_{i=1}^{n}p_iS_i(t)\left(j\varepsilon x_i+j\varepsilon y_ia_1^{(i)}\right)\right\}+O\left(\varepsilon^2\right),\tag{18}$$

где $\mathbf{g}$ – некоторая вектор-строка. Подставим разложение (18) в (16), используя разложение (11), получим матричное уравнение для вектора $\mathbf{g}$: $\mathbf{g}\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{r}\left(\lambda\mathbf{I}-\overline{\mathbf{\Lambda}}\right)$.

*Этап 3.* Домножим (16) на вектор $\mathbf{e}$, используя (18) и разложение $e^{j\varepsilon x}=1+j\varepsilon x+\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}+O\left(\varepsilon^3\right)$, в результате несложных преобразований, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)}{\partial t}=\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{(jx_i)^2}{2}\left(\lambda p_iS_i(t)+\kappa p_i^2S_i^2(t)\right)+\\+\sum_{i=1}^{n}\frac{(jy_i)^2}{2}\left(\lambda a_2^{(i)}p_iS_i(t)+\kappa\left(a_1^{(i)}\right)^2p_i^2S_i^2(t)\right)+\sum_{i=1}^{n}jx_ijy_i\left(\lambda a_1^{(i)}p_iS_i(t)+\kappa a_1^{(i)}p_i^2S_i^2(t)\right)+\\+\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}jx_ijx_l\kappa p_iS_i(t)p_lS_l(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jy_ijy_l\kappa a_1^{(i)}p_iS_i(t)a_1^{(l)}p_lS_l(t)+\\+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jx_ijy_l\kappa a_1^{(l)}p_iS_i(t)p_lS_l(t)\Bigg],\end{aligned}$$

где $\kappa=2\mathbf{g}\left(\overline{\mathbf{\Lambda}}-\lambda\mathrm{I}\right)\mathbf{e}$. Решение этого уравнения с учетом начального условия, имеет вид:

$$\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(jx_i)^2}{2}\left(\lambda p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{(jy_i)^2}{2}\left(\lambda a_2^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa\left(a_1^{(i)}\right)^2p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}jx_ijy_i\left(\lambda a_1^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa a_1^{(i)}p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jx_ijx_l\kappa p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jy_ijy_l\kappa a_1^{(i)}p_ia_1^{(l)}p_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jx_ijy_l\kappa a_1^{(l)}p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau\right\},$$

подставляя которое в (17), получаем

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)=\mathbf{r}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(jx_i)^2}{2}\left(\lambda p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{(jy_i)^2}{2}\left(\lambda a_2^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa\left(a_1^{(i)}\right)^2p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}jx_ijy_i\left(\lambda a_1^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa a_1^{(i)}p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jx_ijx_l\kappa p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jy_ijy_l\kappa a_1^{(i)}p_ia_1^{(l)}p_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jx_ijy_l\kappa a_1^{(l)}p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau\right\}.$$

Выполним замены, обратные к (13) и (15), запишем приближённое равенство для характеристической функции $\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\approx\mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(ju_i+jv_ia_1^{(i)}\right)p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\right.$$

$$+N\sum_{i=1}^{n}\frac{(ju_i)^2}{2}\left(\lambda p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+N\sum_{i=1}^{n}\frac{(jv_i)^2}{2}\left(\lambda a_2^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa\left(a_1^{(i)}\right)^2p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+N\sum_{i=1}^{n}ju_ijv_i\left(\lambda a_1^{(i)}p_i\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)d\tau+\kappa a_1^{(i)}p_i^2\int_{t_0}^{t}S_i^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$N\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}ju_iju_l\kappa p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau+N\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}jv_ijv_l\kappa a_1^{(i)}p_ia_1^{(l)}p_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau+$$

$$\left.+N\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}ju_ijv_l\kappa a_1^{(l)}p_ip_l\int_{t_0}^{t}S_i(\tau)S_l(\tau)d\tau\right\}. \quad (19)$$

*Теорема 2 доказана.*

**Следствие.** Полагая в (19) $t = T$, $t_0 \to -\infty$, учитывая (1), получим асимптотическую характеристическую функцию стационарного многомерного распределения вероятностей чисел занятых приборов и суммарного объёма занятых ресурсов каждого типа, которая совпадает с характеристической функцией многомерного гауссовского распределения с вектором математического ожидания $\mathbf{a} = N\lambda\left[\mathbf{a}_1 b_1 \quad \mathbf{a}_2 b_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n b_n\right]$, где $\mathbf{a}_i = \left[1 \quad a_1^{(i)}\right]$, $b_i = p_i \int\limits_0^\infty \left(1 - B_i(\tau)\right) d\tau$, и ковариационной матрицей $\mathbf{K} = N\left(\lambda \mathbf{K}^{(1)} + \kappa \mathbf{K}^{(2)}\right)$, где

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{(1)} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^{(1)} b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_n^{(1)} b_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{1n}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1}^{(2)} & \mathbf{K}_{n2}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(i)} \\ a_1^{(i)} & a_2^{(i)} \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}_{il}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(l)} \\ a_1^{(l)} & a_1^{(i)} a_1^{(l)} \end{bmatrix} p_i p_l \int\limits_0^\infty \left(1 - B_i(\tau)\right)\left(1 - B_l(\tau)\right) d\tau .$$

## Заключение

Была исследована неоднородная ресурсная СМО с неограниченным числом приборов с входящим MMPP-потоком. С помощью метода асимптотического анализа показано, что совместное асимптотическое распределение вероятности чисел занятых приборов и суммарного объёма занятого ресурса каждого типа сходится к многомерному гауссовскому распределению в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 506 с.
2. *Матальцкий М.А., Тихоненко О.М., Паньков А.В.* Теория массового обслуживания и ее применения // Гродно: ГрГУ, 2008. – 771 с.
3. *Панкратова Е.В.* Исследование системы массового обслуживания MAP|M|∞ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: Управление, вычисление, связь. – 2015. – С. 585–592.
4. *Панкратова Е.В.* Исследование системы массового обслуживания GI/GI/∞ с двумя типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): материалы XIV Международной конференции им. А.Ф. Терпугова. – 2015. – Ч. 1. – С. 152–157.
5. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing System GI/GI/∞ with n Types of Customers // Communications in Computer and Information Science. – Switzerland: Springer. – 2015. V. 564. – P. 216–225.
6. *Dudin S., Kim C., Dudina O.* MMAP|M|N queueing system with impatient heterogeneous customers as a model of a contact center // Computers & Operations Research. – 2013. – V. 40. – № 7. – P. 1790–1803.
7. *Моисеева С.П., Назаров А.А.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
8. *Крысанова К.А., Моисеева С.П.* Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления методом асимптотического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 1. (18). – С. 49–55.
9. *Ефросинин Д.В.* Методы анализа управляемых динамических систем: дис...доктора физ.-мат. наук: 05.13.01 / Москва, 2013. 332 с.
10. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
11. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания // Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
12. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.* Асимптотический анализ системы MMPP|GI|∞ с обслуживанием требований случайного объема // Труды Томского государственного университета. – Т. 299. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы IV Международной молодежной научной конференции. Томск, 20-21 мая 2016 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – С. 99–104.

13. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим MMPP-потоком // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016): материалы XV Международной конференции им. А.Ф. Терпугова (12–16 сентября 2016 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016, Ч. 1. – С. 77–82.
14. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.* Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016): материалы Девятнадцатой международной научной конференции, 21–25 нояб. 2016 г.: в 3 т.; под общ. ред. В.М. Вишневского и К.Е. Самуйлова – М.: РУДН, 2016. – С. 313–325.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕСУРСНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМО ВИДА MMPP$^{(V1,V2)}$|GI|∞

**Е.А. Павлова, С.П. Моисеева**
*Томский государственный университет*
pavlovakatya_2010@mail.ru, smoiseeva@mail.ru

## Введение

В настоящее время телекоммуникации играют большую роль и встречаются на каждом шагу. Требования к эффективности и производительности устройств связи постоянно растут, поэтому так актуально построение и исследование математических моделей [1]. Для описания процессов в телекоммуникационных системах применяются системы массового обслуживания (СМО) с неоднородными обслуживающими устройствами. При построении математических моделей таких процессов часто используются системы с непуассоновскими входящими потоками [4]. Например, с помощью MMPP-потока можно моделировать изменчивый характер трафика.

В настоящей статье помощью метода асимптотического анализа [2,6] приводится исследование числа занятых приборов и объёмов ресурсов в бесконечнолинейной гетерогенной СМО [3,8], на вход которой поступает MMPP-поток.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов двух различных типов (рис. 1).

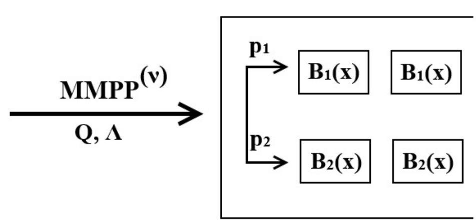


Рис. 1. Система массового обслуживания MMPP$^{(V1, V2)}$|GI|∞ повторными обращениями

Каждая поступающая заявка требует случайное количество ресурса одного из двух типов. На вход системы поступает MMPP-поток заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний *K*, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, K}$ и матрицей интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_K]$.

Поступающая заявка потребует прибор *i*-го типа с вероятностью $p_i$, $i = 1,2$. Заявка становится на прибор соответствующего типа, где обслуживается случайное время с функцией распределения $B_i(x)$, $i = 1,2$, также зависящей от типа заявки. Пусть каждая заявка *i*-го типа требует некоторый ресурс случайного объёма $V_i > 0$, $i = 1,2$ с функцией распределения $G_i(y)$, $i = 1,2$.