МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

VI Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 24–26 мая 2018 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

СЕКЦИЯ VIII. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ТЕЛЕТРАФИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ M|GI|∞ С НЕОРДИНАРНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ И БЕСКОНЕЧНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Е.Е. Худяшова, А.А. Назаров
Томский государственный университет
kopnova.e@gmail.com, nazarov.tsu@gmail.com

Введение

Системы массового обслуживания в настоящее время являются востребоваными во многих областях науки и техники. Применение моделей теории массового обслуживания необходимо для анализа систем и решения большого перечня задач в самых различных областях: телекоммуникационные системы [1,2], социально-экономические системы [3], производственные системы [4,5], системы управления транспортными потоками [6–7], вычислительные системы [8].

Особое внимания требуется уделить моделям систем массового обслуживания, в которых имеется бесконечное число приборов, т.к. именно они позволяют адекватно описать сложные технические системы, для которых число приборов может быть достаточно велико. Например, Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A. применяют такие системы для моделирования работы колл-центра, в которой агенты предоставляют телефонные услуги [9,10]. Обычно число работающих в такой компании операторов достаточно велико. И обслуживание клиента должно начинаться незамедлительно. Также бесконечнолинейные системы используют и в качестве аппроксимации для многолинейных систем в таких случаях, когда, например, вероятность отказа в обслуживании пренебрежимо мала [11–13].

На начальном этапе большинство исследований теории массового обслуживания проводилось в предположении того, что входящий поток заявок является простейшим [14,15]. Однако развитие компьютерных и мобильных систем привело к необходимости создания новых математических моделей потоков данных, которые являются непуассоновскими или неординарными потоками. Это и послужило причиной для увеличения интереса к исследованию систем с более сложными входящими потоками. Системы с непуассоновскими потоками изучали российские и зарубежные авторы, такие как П.П. Бочаров, А.В. Печинкин, А.А. Назаров, С.П. Моисеева, А.Н. Моисеев, D. Baum, E.A. Doorn, A.A. Jages и другие [16–20]. Исследованием неординарных потоков занимались Ушаков и Матвеев, именно в их книге [21] была получена производящая функция числа заявок в системе. Далее такой же результат продублирован у Климова [22]. Авторы книг [21,22] используют в качестве доказательства представление исходного потока в виде суперпозиции независимых потоков с одинаковыми объёмами пачек заявок, и изучение исходной системы сведено к такой, что требования поступают группами фиксированного объёма.

Результаты, полученные в этой статье, согласуются с [21,22], но получены с помощью другого метода – метода динамического просеивания. Этот метод ещё достаточно новый, и поэтому его рассмотрение является актуальным. Таким образом, данная статья посвящена получению нестационарного распределения вероятностей числа заявок в системе с неординарным входящим потоком, произвольной функцией распределения обслуживания приборов и бесконечным значением среднего времени обслуживания с помощью метода динамического просеивания, предложенными на кафедре ТВиМС НИТГУ.

1. Постановка задачи

Рассмотрим (рис. 1) систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов.

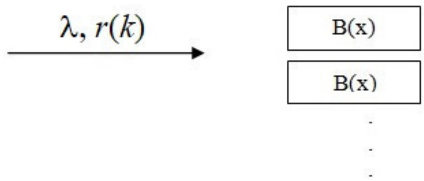

Рис 1. Система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, функцией распределения времени обслуживания $B(x)$, входящим неординарным потоком интенсивности λ и распределением $r(k)$ числа заявок в пачке

На вход этой системы поступает пуассоновский неординарный поток заявок, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют экспоненциальное распределение с параметром λ, а количество k заявок в пачке, поступивших в момент наступления события, имеет дискретное распределение $r(k)$.

Продолжительности обслуживания заявок являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $B(x)$ и бесконечным первым моментом, т.е. выполняется равенство

$$\int_0^\infty \left(1-B\left(x\right)\right)dx=\infty . \tag{1}$$

Обозначим $i(t)$ число заявок (число занятых приборов) в системе в момент времени t. Для рассматриваемой системы, в силу условия (1) не существует стационарного распределения вероятностей значений процесса $i(t)$, поэтому его нестационарное распределение обозначим $P\left(i,t\right)=P\left\{i(t)=i\right\}$, полагая при этом, что в момент времени $t=0$ система свободна, и в ней нет обслуживаемых заявок.

Задачей исследования в данной работе является нахождение распределения вероятностей числа заявок в системе, а также построение двух аппроксимаций этого распределения с целью оценки их точности.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом динамического просеивания [17].

2. Метод динамического просеивания для нахождения распределения вероятностей числа заявок в системе

Рассмотрим (рис. 2) две оси времени t. На первой оси отметим моменты наступления событий входящего рекуррентного потока, а также моменты времени $t=0$ и $t=T$.

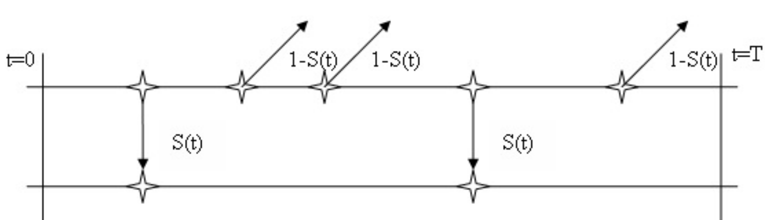

Рис. 2. Метод динамического просеивания заявок, поступающих в систему на обслуживание

Обозначим $S(t)=1-B(T-t)$, $0\le t\le T$ – вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $0\le t\le T$, будет находиться в системе в момент времени $t=T$, занимая один из её приборов. Каждое событие входящего потока, наступившее в момент времени t, с вероятностью $S(t)$ просеивается на вторую ось времени, а с вероятностью $1-S(t)$ не рассматривается.

По построению на второй оси времени генерируется нестационарный просеянный поток.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших за время t на интервале $[0;t]$. Рассмотрим $P\{n(t)=n\}=P(n,t)$.

$$P(n,t+\Delta t)=P(n,t)(1-\lambda\Delta t)+\lambda\Delta t\sum_{\nu=0}^{n}P(n-\nu,t)\sum_{k=\nu}^{\infty}r(k)C_k^{\nu}\left(S(t)\right)^{\nu}\left(1-S(t)\right)^{k-\nu}+o(\Delta t),$$

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t}=-\lambda P(n,t)+\lambda\sum_{\nu=0}^{n}P(n-\nu,t)\sum_{k=\nu}^{\infty}r(k)C_k^{\nu}\left(S(t)\right)^{\nu}\left(1-S(t)\right)^{k-\nu}.$$

Введём характеристическую функцию $H(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,t)$.

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=-\lambda H(u,t)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}\sum_{\nu=0}^{n}P(n-\nu,t)\sum_{k=\nu}^{\infty}r(k)C_k^{\nu}\left(S(t)\right)^{\nu}\left(1-S(t)\right)^{k-\nu}.$$

После несложных преобразований получим:

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=\lambda H(u,t)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}r(k)\left[1-\left(1-e^{ju}\right)S(t)\right]^{k}-1\right\}. \tag{2}$$

Обозначим производящую функцию дискретного распределения числа заявок в пачке $R(z)$:

$$R(z)=\sum_{k=0}^{n}r(k)z^{k}, \tag{3}$$

где значение аргумента этой функции в (2) принимает вид $z=1-\left(1-e^{ju}\right)S(t)$. Тогда уравнение (2) для характеристической функции числа занятых приборов принимает вид:

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=\lambda H(u,t)\left\{R\left(1-\left(1-e^{ju}\right)S(t)\right)-1\right\},$$

решение которого можно записать в виде

$$H(u,t)=\exp\left\{\lambda\int_{0}^{t}\left[R\left(1-\left(1-e^{ju}\right)S(t)\right)-1\right]dx\right\},$$

т.е. для процесса $i(t)$ в момент времени $t=T$, выполнив обратное преобразование Фурье характеристической функции, получим распределение вероятности числа занятых приборов в системе:

$$P(i,T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jun}H(u,T)\,du. \tag{4}$$

3. Распределение *r*(*k*) числа заявок в пачке

В качестве дискретного распределения $r(k)$ рассмотрим такое, для которого производящая функция, определяемая формулой (3) имеет вид:

$$R(z)=\left(\frac{1-\beta}{1-\beta z}\right)^{\alpha},\ 0<\beta<1,\ \alpha>0. \qquad (5)$$

Такое распределение называется распределением Паскаля (отрицательным биномиальным). Его легко модифицировать в геометрическое, пуассоновское или биномиальное. Очевидно, чтобы из (5) получить производящую функцию геометрического распределения, нужно в (5) положить $\beta=p$ и $\alpha=1$.

Для получения производящей функции биномиального распределения положим в (5) $\alpha=-n$ и $\beta=-\dfrac{p}{1-p}$:

$$\left(\frac{1-\beta}{1-\beta z}\right)^{-n}=\left(\frac{1-\beta z}{1-\beta}\right)^{n}=\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{n}=\left((1-p)+pz\right)^{n}.$$

Для получения производящей функции пуассоновского распределения устремим β к нулю и положим $\alpha=\dfrac{a}{\beta}$. Несложно показать, что $\lim\limits_{\beta\to 0}R(z)=e^{a(z-1)}$, а это является производящей функцией пуассоновского распределения.

4. Дискретная гауссовская аппроксимация дискретного распределения вероятностей *P*(*i*,*T*) числа заявок в системе

Дадим следующее определение. Дискретной гауссовской аппроксимацией $P_1(i,T)$ нестационарного распределения вероятностей $P(i,T)$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t=T$ в системе M|GI|∞ с неординарным входящим потоком будем называть распределение вероятностей $P_1(i,T)$, определяемое равенством

$$P_1(i,T)=\left(G(i+0.5,T)-G(i-0.5,T)\right)\left[1-G(-0.5,T)\right]^{-1},$$

где $G(x,T)$ – функция гауссовского распределения с параметрами, определяемыми математическим ожиданием κ_1 и дисперсией κ_2 числа заявок в системе.

Для построения гауссовской аппроксимации введём кумулятивную функцию $K(u)=\ln(H(u))=\lambda\int\limits_0^T\left[R\left(1-\left(1-e^{ju}\right)S(t)\right)-1\right]dx$, продифференцировав которую соответствующее количество раз и положив $u=0$, получим семиинварианты числа заявок в системе $\kappa_1=\lambda r_1\int\limits_0^T\left(1-B(x)\right)dx$, $\kappa_2=\kappa_1+\lambda r_2\int\limits_0^T\left(1-B(x)\right)^2dx$, где r_k – k-факториальный момент, полученный по формуле $r^{(k)}(z)\big|_{z=1}=r_k$, $k=1,2$.

Несложно показать, что третий семиинвариант числа заявок в системе имеет вид $\kappa_3=\kappa_1+3\kappa_2+\lambda r_3\int\limits_0^T\left(1-B(x)\right)^3dx$, где r_3 – третий факториальный момент.

Рассмотрим функцию $H_3(u)=\exp\left\{ju\kappa_1+\dfrac{(ju)^2}{2}\kappa_2+\dfrac{(ju)^3}{6}\kappa_3\right\}$. Найдём действительную часть преобразования Фурье для этой функции: $P_3(i)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}H_3(u)du\right)$. Из последовательности чисел $P_3(i)$ оставим только неотрицательные $P_4(i)=\frac{1}{2}\left(P_3(i)+\left|P_3(i)\right|\right)$. Далее нормируем числа $P_4(i)$: $P_2(i)=P_4(i)\Big/\sum_{i=0}^{\infty}P_4(i)$. Полученное распределение $P_2(i)$ назовём модифицированной аппроксимацией и сравним его с истинным распределением $P(i,T)$ для оценки его точности, находить которою будем с помощью расстояния Колмогорова: $\Delta=\max_{0\le i<\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(P(n,T)-P_m(n,T)\right)\right|$, где $m=1,2$, а нестационарное распределение вероятностей $P(n,T)$ определяется по формуле (4).

Моделирование системы M|GI|∞ с неординарным входящим потоком выполнялось при заданных значениях параметров $\lambda=5$, $\alpha=0,5$, $\beta=0,8$ и заданной функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок. Функцию распределения $B(x)$, удовлетворяющую свойству (1), возьмём в виде $B(x)=\frac{x^{\gamma}}{1+x^{\gamma}}$, $0<\gamma\le 1$, задав определённое значение параметра $0<\gamma\le 1$.

На рис. 3, 4 приведены графики распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и его аппроксимаций, полученных с помощью моделирования с заданными параметрами.

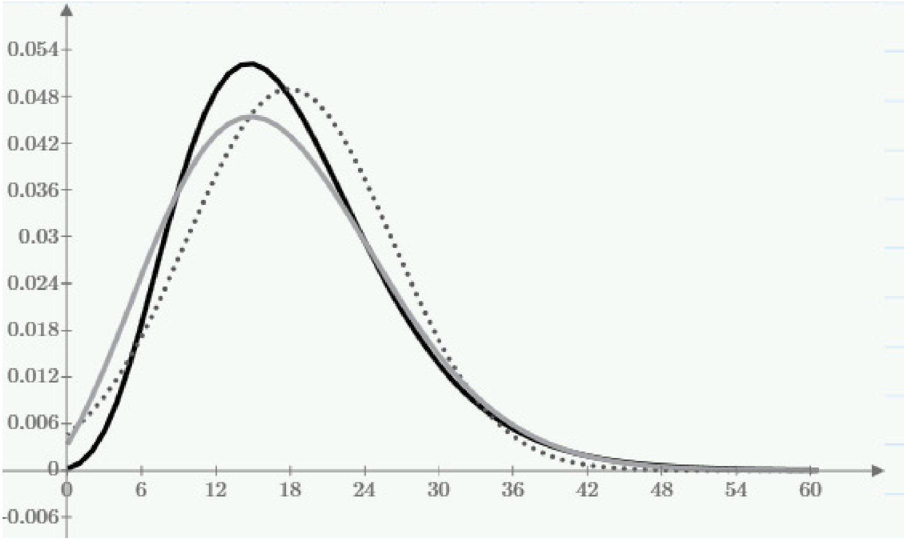

Рис. 3. Распределение вероятностей $P(i,T)$ (чёрная сплошная линия),
стандартная гауссовская аппроксимация $P_1(i)$ (пунктирная линия)
и предложенная модиицированная аппроксимация $P_2(i)$ (серая сплошная линия); $\alpha=0,5$, $\beta=0,8$, $\lambda=5$, $T=5$, $\gamma=1$

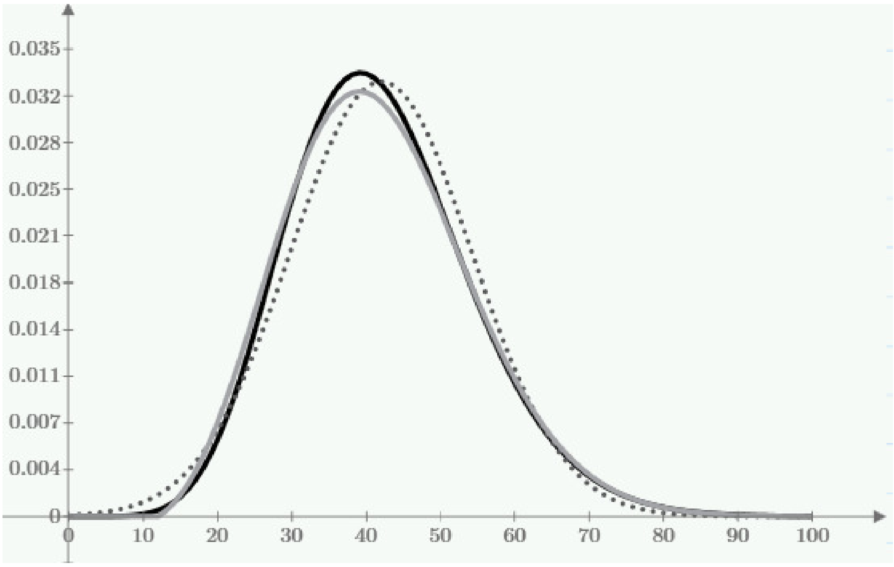

Рис. 4. Распределение вероятностей P(i,T) (чёрная сплошная линия),
стандартная гауссовская аппроксимация P1(i) (пунктирная линия) и предложенная модифицированная аппроксимация P2(i) (серая сплошная линия); $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}8$, $\lambda = 5$, T = 10, $\gamma = 0{,}25$

Таблица 1

Расстояние Колмагорова для истинного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и его аппроксимации 2-го и 3-го порядков при значениях параметров $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}8$, $\lambda = 5$, и указанных γ и T.

γ \ T		1	5	8	10	15	25	100
1	$P_1(i)$	0,169	0,061	0,050	0,047	0,042	0,038	0,031
	$P_2(i)$	0,100	0,052	0,043	0,040	0,035	0,031	0,025
0,5	$P_1(i)$	0,167	0,049	0,038	0,034	0,028	0,021	0,013
	$P_2(i)$	0,099	0,036	0,024	0,020	0,014	0,012	0,005
0,25	$P_1(i)$	0,167	0,046	0,034	0,031	0,024	0,020	0,010
	$P_2(i)$	0,097	0,030	0,019	0,015	0,011	0,006	0,002

Будем считать, что нас удовлетворяет оценка точности $\Delta < 0{,}005$. Тогда, как видно из результатов численного моделирования, областью применимости гауссовской дискретной аппроксимации является значение параметра времени $T \geq 8$, при котором расстояние Колмогорова Δ даёт значение, меньше 0,05 при любых значениях параметра γ. Однако при уменьшении интенсивности входящего потока λ, очевидно, стоит увеличивать нижнюю границу для параметра T, и, наоборот, при увеличении интенсивности λ диапазон значений для времени T можно расширять, т.е. уменьшать нижнюю границу параметра T. Так, численное моделирование уже при значении $\lambda = 22$ показывает приемлемые результаты при любом значении $T \geq 1$.

Также стоит отметить, что модифицированная аппроксимация $P_2(i)$ демонстрирует более высокую точность по сравнению со стандартной гауссовской аппроксимацией $P_1(i)$.

Заключение

В работе получено аналитическое выражение для распределения вероятностей числа заявок в системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и неординарным входящим потоком, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют экспоненциальную функцию распределения, а число заявок в пачке определяется заданных дискретным распределением $r(k)$. Предложены 2 аппроксимации распределения вероятностей, с помощью компьютерных экспериментов показана достаточно высокая точность предложенных аппроксимаций распределений вероятностей, также установлена область их применимости.

Целью дальнейших исследований является рассмотрение системы с неограниченным числом приборов и произвольным входящим потоком GI|GI|∞, а также нахождение предельного распределения вероятностей числа занятых приборов системы в предельном условии $T \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lee W.C.Y.* Mobile Cellular Telecommunications. – Analog and Digital Systems: 2nd ed., McGraw-Hill, 1995. – 664 p.

2. *Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е.* Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 72 с.

3. *Жидкова Л.А., Моисеева С.П.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 6. – С. 5–9.

4. *Королькова Л.И., Переверзев П.П.* Оптимизация процессов предприятия на основе новой методики расчета характеристик многофазной системы массового обслуживания с непрерывной загрузкой без промежуточных накопителей // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 3.

5. *Balsamo S., De Nitto Personè V., Inverardi P.* A review on queueing network models with finite capacity queues for software architecture performance prediction // Performance Evaluation. – 2003. – V. 51. – Iss. 2. – P. 269–288.

6. *Рачинская М.А., Федоткин М.А.* Построение и исследование вероятностной модели циклического управления потоками малой интенсивности // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – № 4 (1). С. 370–376.

7. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 600 с.

8. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2. – № 4. – С. 6–10.

9. *Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З.* Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады ТУСУРа. – 2012. – № 2 (26). – Ч. 2. – С. 248–251.

10. *Mandelbaum A., Pats G.* State-dependent queues: approximations and applications // Stochastic Networks, IMA Volumes in Mathematics, F.P. Kelly and R.J. Williams, eds. – Springer, 1995. – P. 239–282.

11. *Mandelbaum A., Zeltyn S.* The impact of customers patience on delay and abandonment: some empirically-driven experiments with the M/M/n + G queue // Operations Research. – 2004. – V. 26. – P. 377–411.

12. *Reed J.E.* The G/GI/N queue in the Halfin-Whitt regime I: infinite-server queue system equations // The Stern School, NYU. – 2007.

13. *Puhalskii A.A., Reed J.E.* On many-server queues in heavy traffic // Annals of Applied Probability. – 2008. – V. 20. – P. 129–195.

14. *Saaty T.L.* Elements of queueing theory. – McGraw Hill book company, New York 1961. – 505 p.

15. *D'Auria B.* Stochastic decomposition of the M/G/∞ queue in a random environment // Oper. Res.Lett. – 2007. – 35. – P. 805–812.

16. *Бочаров П. П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 520 с.

17. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.

18. *Моисеева С.П.* Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками: дис. доктора физ.-мат. наук: Томск: НИ ТГУ, 2014. 260 с.

19. *Baum D.* The infinite server queue with Markov additive arrivals in space // Proceedings of the international conference "Probabilistic analysis of rare events". Riga, Latvia, 1999. – P. 136–142.

20. *Doorn E.A., Jagers A.A.* Note on the GI/GI/∞ system with identical service and interarrival-time distributions // Journal of queueing systems. – 2004. – № 47. – P. 45–52.

21. *Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г.* Системы массового обслуживания. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 242 с.

22. *Климов Г.П.* Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во МГУ, 2011. – 312 с.