МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# МАТЕРИАЛЫ

## VI Международной молодежной научной конференции

# «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

**Томск, 24–26 мая 2018 г.**

*Под общей редакцией*
*кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

$$= \int_0^T \lambda(t)\,dt + \int_0^\infty \left[\lambda(-x) - \lambda(T-x)\right]\left(1 - B(x)\right)dx .$$

Если $\lambda(t) \equiv \lambda$, то $a(T) = \lambda T$ и не зависит от $B(x)$. Если $\lambda(t) \neq \lambda$, то $a(T)$ слабо зависит от $B(x)$, так как $1 - B(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ и второй интеграл ограничен при $\forall T$.

## Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель обработки входящих потоков строк в алгоритм NeuroLD с учётом исходящего потока. В рамках исследования рассматривалась модель при экспоненциальном обслуживании и при нестационарном входящем потоке [5].

Результаты исследования показали, что выходящий поток системы в условии растущего времени обслуживания является асимптотически простейшим и интенсивность выходящего потока совпадает с интенсивностью входящего.

Рассматриваемая система не теряет поступающие ответы тестируемых, поскольку все ответы обрабатываются.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Погуда А.А.* Модели и алгоритмы контроля знаний по гуманитарным дисциплинам: дис. канд. тех. наук. Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, 2016. – 174 с.
2. Handbook of Research on Estimation and Control Techniques in E-Learning Systems / Vardan Mkrttchian; Alexander Bershadsky; Alexander Bozhday; Mikhail Kataev; Sergey Kataev / Chapter 10. Mitsel A.A. and Poguda A.A. An Integrated Approach to Automated Testing Knowledge. – Published in the United States of America by Information Science Reference (an imprint of IGI Global) 701 E. Chocolate Avenue Hershey PA, USA 17033, 2016. – P. 128–140.
3. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
4. *Челышкова М.Б.* Теория и практика конструирования педагогических тестов: Учебное пособие. – М.: Логос, 2002. – 432 с.
5. *Лапатин И.Л., Назаров А.А.* Асимптотическое свойство выходящих потоков систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и входящим MAP-потоком // Автоматика и телемеханика. – 2012. – Вып. 5. – С. 57–70.


# СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПОСТУПЛЕНИЯ РЕСУРСОВ И ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ МОМЕНТОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ РЕСУРСОВ


**Н.М. Ревенко**

*Томский государственный университет*

rammixtsu@gmail.com


## Введение

Управление запасами отвечает на простой вопрос: "Что, когда и сколько надо закупить, чтобы хватило, и не осталось лишнего?" Вообще, управление запасами предприятия и их оптимизация – очень интересная тема, т.к. позволяет заниматься ей как узкоспециально – не входя в противоречия с другими бизнес-процессами и оптимизируя только запасы, так и очень широко – смотря через призму управления товарными запасами на предприятии на работу всего предприятия. Из-за бурного развития логистики в последнее время, многие специалисты говорят о проблеме эффективного управления запасами, где она рассматривается с точки зрения минимизации совокупных издержек; т.е. оптимизация товарных запасов рассматривается в первую очередь как снижение затрат на их создание и обслуживание. Это, действительно, очень важный момент мероприятий по оптимизации запасов на предприятии, но очевидно, что управление товарно-материальными запасами, кроме логистического, имеют – как минимум – ещё финансовый и маркетинговый аспект. Соответственно эффективность

управления запасами не может оцениваться только издержками на их создание и обслуживание, а стратегия управления запасами не может строиться только на снижении этих издержек, и оптимальное управление запасами подразумевает такую политику управления запасами, которая гармонизирует все аспекты, связанные с этой задачей, а не только оптимизацию запасов на складе [2].

Это так же применимо для товаров типа газов, воды в хранилищах, например, для поддержания необходимого запаса объёма товара, и в случае его избытка соответствующим образом менять политику накопления запасов, чтобы вернуть уровень к нормальному значению.

Проводится исследование математической модели системы управления запасами с релейным управлением объёмом накопленных запасов. Рассмотрен случай гиперэкспоненциального распределения объёмов потребления ресурсов для двух видов систем. Найдено явное выражение для стационарной плотности распределения значения запасов в системе. Приводятся результаты численного эксперимента.

В [4–6] рассматриваются математические модели деятельности фонда социального страхования с релейным управлением капиталом фонда. В [3] также рассмотрено релейно-гистерезисное управление) капиталом такого фонда, когда выплаты по страховым случаям и выплаты на финансирование социальных программ образуют пуассоновские потоки событий с постоянной и переменной интенсивностями соответственно, а величины выплат являются одинаково распределёнными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения. В [4] исследуются основные характеристики деятельности фонда социального страхования в случае непрерывной скорости поступления денежных средств и экспоненциально распределённых страховых выплат. В [5] построена и исследована математическая модель деятельности некоммерческого фонда в случае пуассоновского потока поступающих платежей постоянной интенсивности при экспоненциальном распределении страховых премий и релейного управления капиталом.

В данной работе исследуется модель, аналогичная [1,3], в случае, когда объёмы запроса на расходование имеют гиперэкспоненциальное распределение.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, где ν и λ меняются при достижении системой уровня объёма запаса $s(t) = S$, и обозначим $\nu = \nu(s)$, $\lambda = \lambda(s)$.

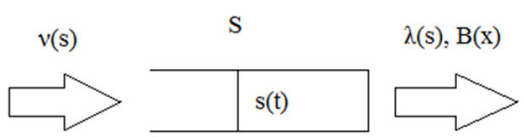


Рис. Система управления запасами

$$\nu(s) = \begin{cases} \nu_1, \ s < S, \\ \nu_2, \ s > S, \end{cases} \quad \lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, \ s < S, \\ \lambda_2, \ s > S. \end{cases}$$

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеет вид $\nu_1 > \lambda_1 b$, $\lambda_2 b > \nu_2$. Здесь $b$ – математическое ожидания функции распределения $B(x)$.

Таким образом, если $\nu_1 > \lambda_1 b$, $\lambda_2 b > \nu_2$ и $s(t) < S$, то объём ресурса в системе будет увеличиваться в среднем, а при достижении уровня $S$ и его превышении, т.е. $s(t) > S$, в связи с уменьшением скорости поступления ресурсов и увеличением интен-

сивности моментов потребления, объём ресурсов будет уменьшаться; $S$ – некоторое пороговое значение уровня запасов $s(t)$.

Заметим, что процесс $s(t)$ может принимать отрицательные значения $s(t)<0$ и система продолжает функционировать, откладывая исполнение заявки на потребление ресурсов до момента накопления необходимого количества.

Из описания математической модели следует, что случайный процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем $t$ и непрерывным множеством значений $-\infty < s < +\infty$.

## 2. Уравнение Колмогорова

Определим, корректна ли построена математическая модель и выполним её исследование. Обозначим плотность распределения $P(s)=\dfrac{\partial P\{s(t)<s\}}{\partial s}$ и запишем следующее равенство: $P(s+\Delta t)=P(s)(1-\lambda(s)\Delta t)+\lambda(s)\Delta t\int\limits_0^\infty P(s+x,t)\,dB(x)+o(\Delta t)$, из которого получим уравнение $\nu(s)P'(s)+\lambda(s)P(s)=\lambda(s)\int\limits_0^\infty P(s+x)\,dB(x)$. Обозначим $P(s)=\begin{cases}P_1(s),\ s<S,\\ P_2(s),\ s\ge S.\end{cases}$. В предположении, что плотность распределения имеет разрыв при объёме, равном $S$, будем считать, что $P_2(s)$ непрерывна справа.

Рассмотрим случай, когда

$$B(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i\left(1-e^{-\mu_i x}\right). \tag{1}$$

Тогда $b=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{\mu_i}$. Получим два интегро-дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned}&\nu_2 P_2'(s)+\lambda_2 P_2(s)=\lambda_2\int\limits_0^\infty P_2(s+x)\,dB(x),\ s\ge S,\\ &\nu_1 P_1'(s)+\lambda_1 P_1(s)=\lambda_1\int\limits_0^{S-s} P_1(s+x)\,dB(x)+\lambda_2\int\limits_{S-s}^{\infty} P_2(s+x)\,dB(x),\ s<S.\end{aligned} \tag{2}$$

Подставим в уравнения (2) выражение (1):

$$\begin{aligned}&\nu_2 P_2'(s)+\lambda_2 P_2(s)=\lambda_2\sum_{i=1}^{n}\left(b_i\mu_i\int\limits_0^\infty P_2(s+x)e^{-\mu_i x}dx\right),\ s\ge S,\\ &\nu_1 P_1'(s)+\lambda_1 P_1(s)=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_1 b_i\mu_i\int\limits_0^{S-s} P_1(s+x)e^{-\mu_i x}dx+\lambda_2 b_i\mu_i\int\limits_{S-s}^{\infty} P_2(s+x)e^{-\mu_i x}dx\right),\ s<S.\end{aligned} \tag{3}$$

Поочередно для $i=\overline{1,n}$ обе части уравнения умножим на $e^{-\mu_i s}$, вычислим $\dfrac{\partial}{\partial s}$, умножим на $e^{\mu_i s}$. В итоге получим однородное дифференциальное уравнение $n+1$-го порядка, решая которое, получим $P_2(s)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}C_i e^{z_i s}$. Здесь $z_{1,2..n+1}$ – корни полученного дифференциального уравнения, $z_{1,2..n}\ge 0$, $z_{n+1}<0$. Из условия $P_2(+\infty)=0$ получим

$$P_2(s) = C_{n+1} e^{z_{n+1} s}. \tag{4}$$

Подставив $P_2(s)$ из (4) во второе уравнение из (3) и проделав аналогичные действия, получим дифференциальное уравнение $n+1$-го порядка, из которого найдём $P_1(s)$: $P_1(s) = \sum_{i=1}^{n+1} C_i e^{z_i s}$. Здесь $C_{1,2..n+1}$ – другие константы, никак не связанные с предыдущими, $z_{1,2..n} > 0$, $z_{n+1} = 0$, $z_{1,2..n+1}$ – корни уравнения полученного дифференциального уравнения. Из условия $P_1(-\infty) = 0$ получим

$$P_1(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{z_i s}. \tag{5}$$

Покажем, что будет действительно *n* положительных корней. Подставим (4) и (5) во второе уравнение (3). Проделав простые операции, и группируя слагаемые, получим:

$$C_i e^{z_i s} \left( \nu_1 z_i + \lambda_1 + \lambda_1 \frac{b_1 \mu_1}{z_i - \mu_1} + \ldots + \lambda_1 \frac{b_n \mu_n}{z_i - \mu_n} \right) = 0, \; i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Обозначим $f(z) = \lambda_1 \frac{b_1 \mu_1}{\mu_1 - z} + .. + \lambda_1 \frac{b_n \mu_n}{\mu_n - z}$. Покажем, что (6) имеет ровно *n* различных положительных корней. Будем считать, что $\mu_1 < \mu_2 < .. < \mu_n$. Имеем: $f'(z) = \lambda_1 \left( \frac{b_1 \mu_1}{(\mu_1 - z)^2} + .. + \frac{b_n \mu_n}{(\mu_n - z)^2} \right) > 0$. Функция $f(z)$ монотонно возрастает. На интервале $0 < z < \mu_1$ функция $f(z)$ непрерывна, монотонно возрастает и принимает значения $\lambda_1 < f(z) < \infty$. При выполнении условия $\nu_1 > \lambda_1 b$ уравнение (6) имеет по крайней мере один корень $z_1 > 0$.

Далее рассмотрим функцию $f(z)$ на интервале $\mu_{k-1} < z < \mu_k$, где $f(z)$ непрерывна, монотонно возрастает и принимает значения $-\infty < f(z) < +\infty$, поэтому уравнение (6) на интервале $\mu_{k-1} < z < \mu_k$ также имеет по крайней мере один корень $z_k > 0$.

Количество рассматриваемых интервалов равно *n*, совпадающее с числом положительных корней $z = z_k$, $k = \overline{1,n}$.

### 3. Нахождение констант

Подставляя (4) и (5) во второе уравнение (3), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & C_1 \lambda_1 \left( \frac{b_1 \mu_1}{z_1 - \mu_1} e^{z_1 S} e^{-\mu_1 (S-s)} + .. + \frac{b_n \mu_n}{z_1 - \mu_n} e^{z_1 S} e^{-\mu_n (S-s)} \right) + \ldots + \\ & + C_n \lambda_1 \left( \frac{b_1 \mu_1}{z_n - \mu_1} e^{z_n S} e^{-\mu_1 (S-s)} + \frac{b_n \mu_n}{z_n - \mu_n} e^{z_n S} e^{-\mu_n (S-s)} \right) - \\ & - C_{n+1} \lambda_2 \left( \frac{b_1 \mu_1}{z_{n+1} - \mu_1} e^{z_{n+1} S} e^{-\mu_1 (S-s)} + .. + \frac{b_n \mu_n}{z_{n+1} - \mu_n} e^{z_{n+1} S} e^{-\mu_n (S-s)} \right) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Группируя в (7) слагаемые по $e^{-\mu_i (S-s)}$, $i = \overline{1,n}$, получим *n* независимых уравнений

$$\left(C_1\lambda_1\frac{b_1\mu_1}{z_1-\mu_1}e^{z_1S}+..+C_n\lambda_1\frac{b_1\mu_1}{z_n-\mu_1}e^{z_nS}-C_{n+1}\lambda_2\frac{b_1\mu_1}{z_{n+1}-\mu_1}e^{z_nS}\right)e^{-\mu_1(S-s)}=0,$$

...

$$\left(C_1\lambda_1\frac{b_n\mu_n}{z_1-\mu_n}e^{z_1S}+..+C_n\lambda_1\frac{b_n\mu_n}{z_n-\mu_n}e^{z_nS}-C_{n+1}\lambda_2\frac{b_n\mu_n}{z_{n+1}-\mu_n}e^{z_nS}\right)e^{-\mu_n(S-s)}=0.$$

Составим квадратную матрицу $A$, где $A_{i,j}=\lambda_1\frac{b_i\mu_i}{z_j-\mu_i}e^{z_iS}$, $i,j=\overline{1,n}$, $A_{i,n+1}=\lambda_2\frac{b_i\mu_i}{z_{n+1}-\mu_i}e^{z_{n+1}S}$, $i=\overline{1,n}$, $A_{n+1,j}=\frac{e^{z_jS}}{z_j}$, $j=\overline{1,n}$, $A_{n+1,n+1}=-\frac{e^{z_{n+1}S}}{z_{n+1}}$, где $n+1$-я строка – условие нормировки для $P(s)$. Обозначим вектор $F=(0,0,...0,1)^{\mathrm{T}}$ размерности $n+1$. Обозначим вектор $C=(C_1,C_2\ ,\ ..\ C_n,C_{n+1})^T$. Решая матричное уравнение $AC=F$, однозначно найдем $C_1$, $C_2$, ... $C_n$, $C_{n+1}$. В итоге имеем:

$$P(s)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}C_ie^{z_is},\ s<S,\\ C_{n+1}e^{z_{n+1}s},\ s\geq S.\end{cases}$$

## Заключение

В данной работе построена математическая модель системы управления запасами. Получено аналитическое выражение для стационарной плотности распределения значений объёма запасов при гиперэкспоненциальном распределении объёмов потребления объёмом запасов. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам при различных распределениях объемов расходования ресурсов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Назаров А.А., Бронер В.И.* Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. – 2016. – № 1. – С. 43–48.

2. http://upravlenie-zapasami.ru

3. *Вальц О.В., Змеев О.А.* Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 37–41.

4. *Змеев О.А.* Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 130–135.

5. *Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю.* Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 302–308.

6. *Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю.* Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлением капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 302–312.