

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VI Международной молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 24–26 мая 2018 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ОБОБЩЁННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

А.В. Кеба, Л.А. Нежелская
Томский государственный университет
mir.na.mig7@mail.ru, ludne@mail.ru

Введение

В настоящее время теория массового обслуживания (ТМО), формально являясь частью теории случайных процессов и занимаясь системами массового обслуживания (СМО), интенсивно развивается и имеет широкую сферу применения: в экономике и финансах, в планировании и организации процессов производства и обслуживания, в военном деле, медицине, авиации, в транспортной сфере и других отраслях человеческой деятельности [1,2].

В большинстве работ по ТМО до 60-х годов XX столетия входящие потоки событий преимущественно рассматривались как пуассоновские потоки. Но в результате стремительного развития техники, телекоммуникационных, спутниковых и компьютерных сетей связи модель простейшего потока перестала соответствовать информационным потокам сообщений в режиме реального времени. Тем самым, требования практики стали причиной рассмотрения дважды стохастических потоков [3–5] в виде математической модели реальных потоков событий. Двойная случайность (стохастика) подразумевает, во-первых, случайность моментов времени наступления событий потока, во-вторых, представление интенсивности потока как случайного процесса.

В дважды стохастических потоках выделяются два класса: 1) интенсивность потоков есть непрерывный случайный процесс; 2) интенсивность потоков представляет собой кучно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний.

Потоки второго класса в работах [6,7] получили название МС-потоков (Markov Chain). Именно к этому классу относится обобщённый МАР-поток событий с произвольным числом состояний и представляет собой адекватную математическую модель, соответствующую реальным потокам случайных событий.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщённый МАР-поток событий с произвольным числом состояний, сопровождающий процесс $\lambda(t)$ которого является случайным кусочно-постоянным ненаблюдаемым процессом с n состояниями: S_1, S_2, \dots, S_n . Далее под i -м состоянием понимается S_i , $i = \overline{1, n}$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии ($i = \overline{1, n}$) определяется случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону, с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, т.е. $\lambda(t) = \lambda_i$, то на полуинтервале $[t; t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, в момент окончания i -го состояния происходит розыгрыш состояния – включается вероятностный механизм:

- 1) наступает событие потока, и процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е состояние ($i, j = \overline{1, n}$), вероятность чего есть $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$;
- 2) не наступает событие потока, и процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е состояние ($i, j = \overline{1, n}$), вероятность чего есть $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$.

При этом выполняется условие нормировки $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j | \lambda_i) = 1, i = \overline{1, n}$.

Если $\lambda(t) = \lambda_i (i = \overline{1, n})$, то будем говорить, что имеет место i -е состояние процесса $\lambda(t)$. Будем полагать, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$.

На рис. 1 приведён пример одной из возможных реализаций процесса $\lambda(t)$, где t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в потоке.

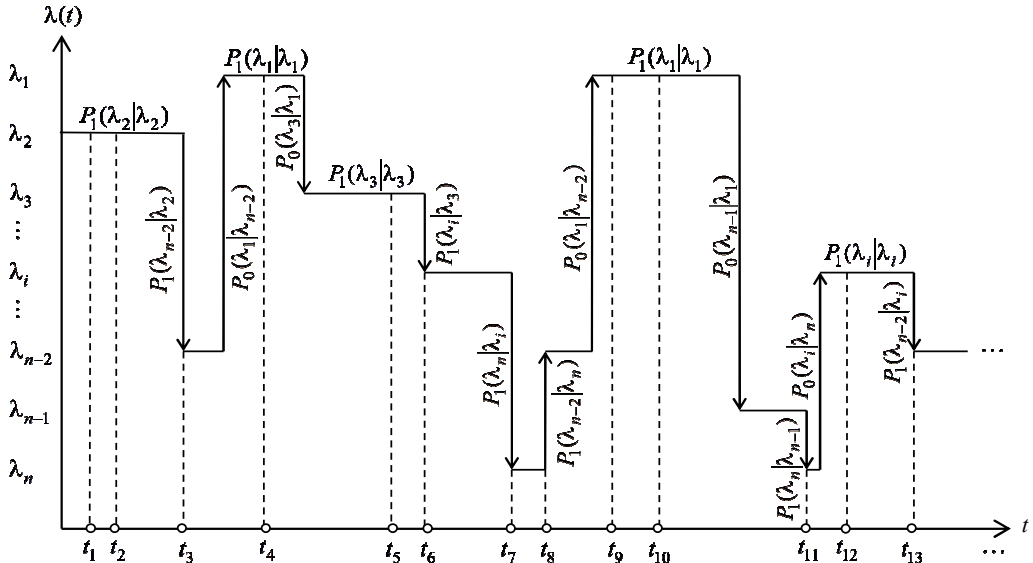


Рис. 1. Реализация обобщённого МАР-потока событий с произвольным числом состояний

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ имеет вид

$D = \|D_0 | D_1\|$, где

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n | \lambda_1) & \lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2 & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n | \lambda_2) & \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) \\ \lambda_3 P_0(\lambda_1 | \lambda_3) & \lambda_3 P_0(\lambda_2 | \lambda_3) & \dots & \lambda_3 P_0(\lambda_n | \lambda_3) & \lambda_3 P_0(\lambda_3 | \lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & -\lambda_n & \lambda_n P_0(\lambda_n | \lambda_n) \end{pmatrix}_{n \times (n+1)},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_{n-1} | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_{n-1} | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_n | \lambda_2) \\ \lambda_3 P_1(\lambda_1 | \lambda_3) & \lambda_3 P_1(\lambda_2 | \lambda_3) & \dots & \lambda_3 P_1(\lambda_{n-1} | \lambda_3) & \lambda_3 P_1(\lambda_n | \lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_{n-1} | \lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_n | \lambda_n) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Элементы $d_{ii}^{(0)}, i = \overline{1, n}$ прямоугольной матрицы D_0 есть интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком; остальные элементы – интенсивности переходов из состояния i в состояние j без наступления события, $i, j = \overline{1, n}$. Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j с наступлением события, $i, j = \overline{1, n}$.

Подчеркнём, что обобщённый МАР-поток событий с двумя состояниями впервые введён в работе [8]. Отличие обобщённого МАР-потока событий от МАР-потока состоит в том, что вводится вероятность $P_0(\lambda_j|\lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в i -е без наступления события потока.

Отметим, что задачи по оценке состояний и параметров дважды стохастических потоков событий с произвольным числом состояний рассматривались в [9] (синхронный поток) и в [10] (асинхронный поток).

Задача заключается в построении имитационной модели обобщённого МАР-потока событий с произвольным числом состояний.

2. Имитационное моделирование

Имитационное моделирование – это метод исследования, при котором строится модель изучаемой системы, описывающая её с достаточной степенью точности, и на базе имитирующей модели проводится серия экспериментов в течение заданного периода времени с целью получения информации об исходной системе.

Сущность метода имитационного моделирования заключается в разработке на ЭВМ программ, имитирующих поведение изучаемой системы, её свойства и характеристики в необходимом объёме. Реализуемый на ЭВМ алгоритм позволяет по заданным значениям параметров и состоянию системы в начальный момент времени получить характеристики системы, необходимые для дальнейшего применения в практических задачах. Проведение серий экспериментов позволяет достаточно полно исследовать исходную систему, выявить зависимость между требуемыми параметрами.

Модель исследуемого обобщённого МАР-потока событий с произвольным числом состояний построена с помощью метода обратных функций. Пусть $\tau \geq 0$ – длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии. Случайная величина τ имеет функцию распределения $F_i(t) = P(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ и плотность распределения вероятностей $p_i(t) = F_i'(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$. В соответствии с методом обратных функций обозначим $F_i(t) = \gamma$. Имеем $\gamma = 1 - e^{-\lambda_i t}$, тогда $-\lambda_i t = \ln(1 - \gamma)$, откуда находим формулу моделирования значений длительностей интервалов пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии $t = -\frac{1}{\lambda_i} \ln(1 - \gamma)$, где γ – равномерно распределённая на интервале $(0, 1)$ случайная величина, λ_i – параметр потока, $i = \overline{1, n}$.

3. Результаты статистических экспериментов

Построена имитационная модель обобщённого МАР-потока событий с произвольным числом состояний в виде программного кода на языке программирования C# в среде Visual Studio 2015 и поставлен ряд статистических экспериментов с целью изучения качества построенной модели.

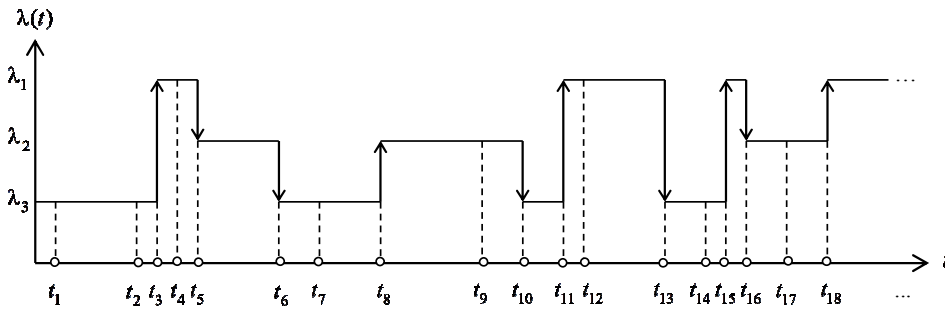
Эксперимент 1. Фиксируются значение времени моделирования $T_m = 100$, число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$. Рассмотрим результаты моделирования при крайних значениях вероятностей перехода, когда:

$$a) \sum_{j=1}^3 P_0(\lambda_j|\lambda_i) = 0, \sum_{j=1}^3 P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 1, i = \overline{1, 3}.$$

Исходные данные для испытания а) имитационной модели

$\lambda_1 = 3$	$\lambda_2 = 2$	$\lambda_3 = 1$
$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,4$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,3$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0,3$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,3$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,4$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0,3$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0,3$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0,3$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0,4$

В результате имитации потока при исходных данных, соответствующих табл. 1, процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния i в состояние j только с наступлением события потока, $i, j = \overline{1,3}$. Реализация ситуации проиллюстрирована на рис. 2.

Рис. 2. Реализация обобщенного МАР-потока событий при $n = 3$

Рассмотрим результаты моделирования при других крайних значениях вероятностей перехода, когда события потока отсутствуют.

$$\text{б) } \sum_{j=1}^3 P_0(\lambda_j|\lambda_i) = 1, \quad \sum_{j=1}^3 P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Таблица 2

Исходные данные для испытания б) имитационной модели

$\lambda_1 = 3$	$\lambda_2 = 2$	$\lambda_3 = 1$
$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,4$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,3$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0,3$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,3$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,4$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0,3$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0,3$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0,3$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0,4$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0$

При имитации потока с исходными данными, соответствующими табл. 2, процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния i в состояние j без наступления события потока, $i, j = \overline{1,3}$. Реализация ситуации представлена на рис. 3.

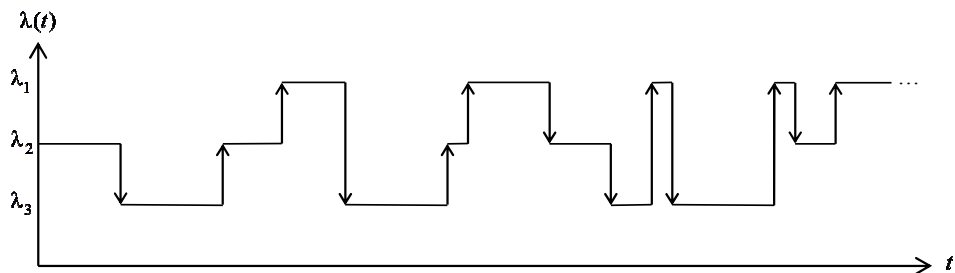


Рис. 3. Реализация процесса $\lambda(t)$ при $n = 3$

Эксперимент 2. Фиксируются значение числа состояний $n = 3$, время моделирования $T_m = 100$ и исходные данные, заданные в табл. 1, т.е. $\sum_{j=1}^3 P_0(\lambda_j | \lambda_i) = 0$, $\sum_{j=1}^3 P_1(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i = \overline{1,3}$. При этом число опытов $N \in \{50, 100, 150, \dots, 1000\}$.

При заданных параметрах эксперимента на рис. 5–7 показана зависимость выборочного среднего значения длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии

$$\hat{T}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_i^{(j)}, \text{ где } j - \text{ номер реализации, } i = \overline{1,3}, \text{ от числа опытов } N.$$

Таблица 3

Результаты эксперимента 2

N / \hat{T}_i, \hat{K}	оценка времени пребывания (\hat{T}_i)			оценка числа событий (\hat{K})
	в 1-м состоянии (\hat{T}_1)	во 2-м состоянии (\hat{T}_2)	в 3-м состоянии (\hat{T}_3)	
$N = 50$	2,5288	14,1362	83,3348	272
$N = 100$	2,5874	14,2651	83,1473	274
$N = 150$	2,5997	14,3032	83,0969	275
$N = 200$	2,5773	14,2820	83,1406	274
$N = 250$	2,5975	14,3071	83,0952	275
...
$N = 850$	2,5890	14,3206	83,0902	275
$N = 900$	2,5878	14,3285	83,0835	275
$N = 950$	2,5894	14,3519	83,0585	275
$N = 1000$	2,5922	14,3215	83,0862	275

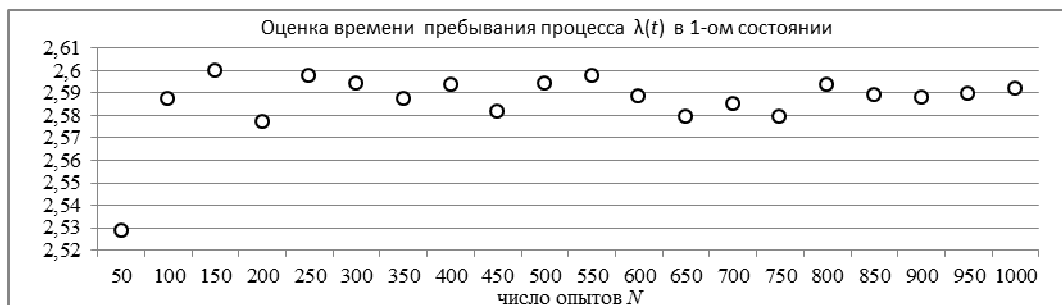


Рис. 5

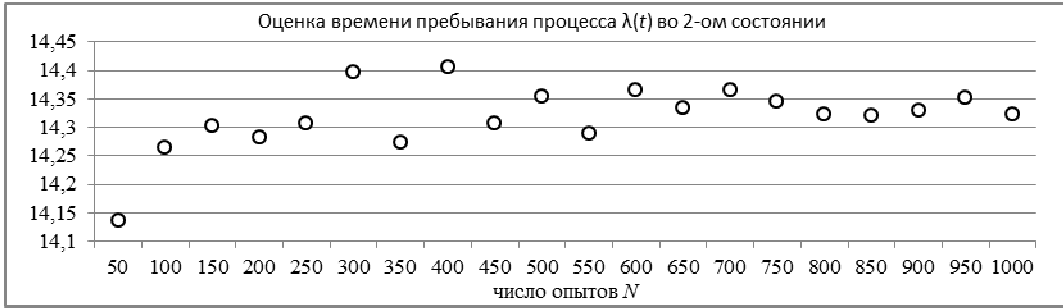


Рис. 6

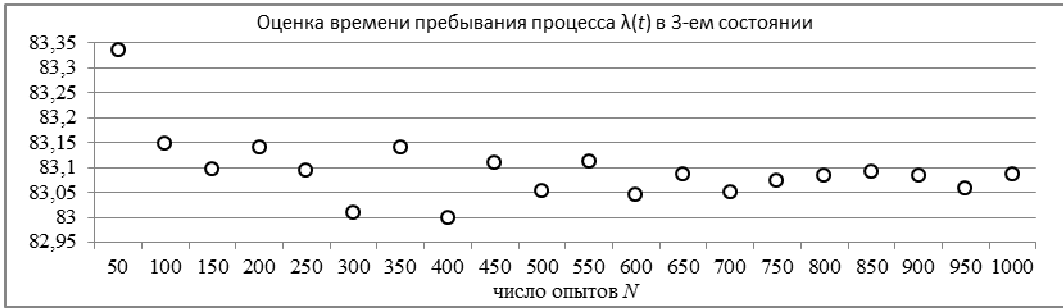


Рис. 7

Из анализа представленных результатов на рис. 5–7 можно заключить, что стационарный режим устанавливается при количестве опытов $N \geq 600$.

Эксперимент 3. Фиксируются значение числа состояний $n = 3$, время моделирования $T_m = 100$, число опытов $N \in \{50, 100, 150, \dots, 1000\}$; вероятности перехода приведены в табл. 4.

Таблица 4

Исходные данные для эксперимента 3

$\lambda_1 = 3$	$\lambda_2 = 2$	$\lambda_3 = 1$
$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,12$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,14$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0,23$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,25$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,23$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0,11$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0,15$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0,14$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0,09$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,18$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,06$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0,26$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,19$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,25$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0,17$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0,11$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0,18$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0,14$

При заданных параметрах эксперимента на рис. 8–10 показана зависимость выборочного среднего значения длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии. Обозначения в табл. 5 аналогичны обозначениям табл. 3.

Таблица 5

Результаты эксперимента 3

N	оценка времени пребывания (\hat{T}_i)			оценка числа событий (\hat{K})
	в 1-м состоянии (\hat{T}_1)	во 2-м состоянии (\hat{T}_2)	в 3-м состоянии (\hat{T}_3)	
$N = 50$	6,7000	24,5694	68,7305	162

$N = 100$	6,8295	24,5549	68,6154	162
$N = 150$	6,7933	24,4009	68,8056	161
$N = 200$	6,7327	24,4420	68,8252	161
...
$N = 900$	6,7626	24,3676	68,8697	161
$N = 950$	6,7333	24,4712	68,7954	161
$N = 1000$	6,7407	24,472	68,7872	161

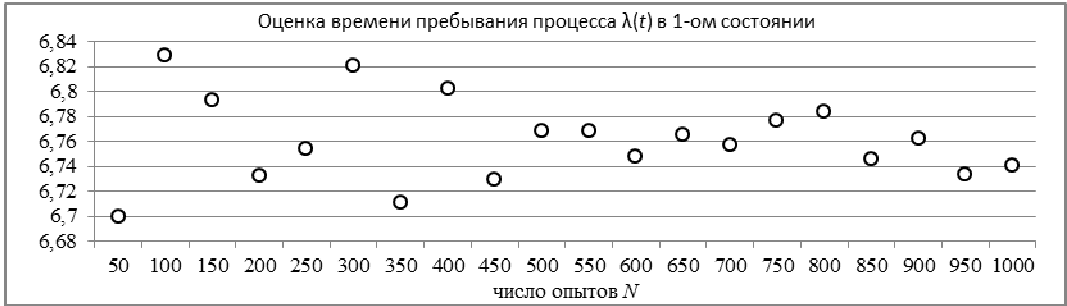


Рис. 8

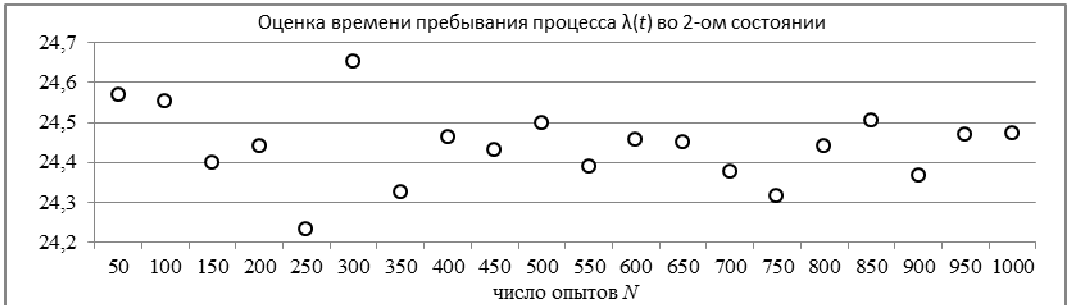


Рис. 9



Рис. 10

На основании полученных результатов на рис. 8–10 можно заключить, что стационарный режим устанавливается при количестве опытов $N \geq 450$.

Заключение

В данной статье рассмотрен обобщённый МАР-поток событий с произвольным числом состояний и получена матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$. Построена имитационная модель исследуемого потока в виде программного кода на языке программирования C# в среде Visual Studio 2015. Анализ результатов прове-

дѣнных статистических экспериментов позволяет утверждать, что реализована работоспособная модель, непротиворечивая соответствующим входным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
2. Фархадов М.П., Петухова Н.В., Ефросинин Д.В., Семѣнова О.В. Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчѣта характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания // Проблемы управления. – 2010. – № 6. – С. 53–57.
3. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 1 (1). – С. 18–23.
4. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мѣртваго времени в обобщѣнном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 32–42.
5. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщѣнного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мѣртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2 (27). – С. 19–29.
6. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчѣта фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
7. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчѣта фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 55–61.
8. Березин Д.В., Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний обобщѣнного MAP-потока событий в условиях непродлеваемого мѣртваго времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 12–23.
9. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 76–93.
10. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2. – С. 44–65.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ MAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ В УСЛОВИЯХ ПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МѢРТВОГО ВРЕМЕНИ

Б.О. Лопсанчап, Л.А. Нежелская

Томский государственный университет

buyan050@mail.ru, ludne@mail.ru

Введение

С появлением новых информационных технологий возникают новые задачи, как в теории массового обслуживания (ТМО), так и в её приложениях, касающихся различных сфер деятельности: связи и телекоммуникаций, экономики и финансов, военного дела и гражданской авиации, логистико-транспортного дела и многих других отраслей, в которых находят применение системы массового обслуживания (СМО).

Особенно широко СМО применялись при решении задач, возникающих при интеграции телефонных систем и станций: уменьшение загруженности операторов телефонных станций, оптимизация эффективности работы и минимизация потери информации [1].

Преимущественно до 70–80-х годов 20-го столетия в большинстве моделей СМО входящим потоком являлся пуассоновский или простейший поток событий. В дальнейшем, с усложнением телекоммуникационных сетей связи, модели с входящим простейшим потоком событий перестали адекватно описывать реальные системы, т.к. при моделировании компьютерных сетей возникла необходимость учитывать тот факт, что интенсивность наступления событий меняется во времени. Это обстоятельство привело к появлению новых математических моделей потоков событий, которые относятся к классу дважды стохастических потоков [2–5]. Стохастика (двойная случайность) пони-