ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 45

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/45/2

А.А. Галилейская, Е.Ю. Лисовская

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОФАЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ РЕСУРСНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ ММРР ПОТОКОМ

Рассматривается бесконечнолинейная ресурсная система массового обслуживания MMPP/(GI/∞)^M. Решается задача исследования 2M-мерного процесса чисел занятых приборов и суммарных объемов занятого ресурса на фазах системы в стационарном режиме функционирования. С помощью метода асимптотического анализа получена асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей исследуемого многомерного процесса, которая совпадает с характеристической функцией многомерного гауссовского распределения.
Ключевые слова: многофазная система массового обслуживания; объем ресурса; метод асимптотического анализа; гауссовская аппроксимация.

Математические модели бесконечнолинейных систем массового обслуживания представляют большой интерес для практического применения в области телекоммуникаций, например для моделирования беспроводных сетей связи с целью оптимизации существующих и проектирования новых сетей [1–2]. Кроме того, такие системы важны при моделировании инженерных устройств, где необходимо вычислить достаточный объем буфера для хранения данных.

Так как необходимо учитывать объем передаваемой информации, то в связи с этим актуальной является разработка новых ресурсных моделей, сформулированных в терминах систем массового обслуживания (СМО), которые бы позволили оценить объемы занятого ресурса [3–4].

К сожалению, аналитические результаты получены лишь для систем с входящим простейшим потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания, которые не всегда соответствуют реальным сетям [5–7].

В настоящее время появляется все больше работ, посвященных исследованию многофазных систем массового обслуживания, которые состоят из нескольких последовательно соединенных подсистем, причем входящий поток каждой последующей подсистемы является выходящим для предыдущей, кроме последней.

1. Постановка задачи

Рассмотрим M-фазную ресурсную СМО с неограниченным числом приборов и неограниченным объемом предоставляемого ресурса на каждой фазе. На вход системы поступает MMPP-поток заявок, управляемый цепью Маркова $k(t) = 1, 2, \dots K$, которая задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$ размера $K \times K$, и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_k\}$. Поступающее требование занимает любой свободный прибор на первой фазе, где обслуживается в течение случайного времени $\tau_1 \ge 0$ с функцией распределения $B_1(x) = P\{\tau_1 < x\}$ и формирует запрос на предоставление случайного объема ресурса $\nu \ge 0$ с функцией распределения $G(y) = P\{\nu < y\}$. По окончании обслуживания на первой фазе заявка освобождает тот же объем ресурса, мгновенно переходит на вторую фазу, где обслуживается в течение случайного времени $\tau_2 \ge 0$ с функцией распределения

$B_2(x) = P\{\tau_2 < x\}$ и занимает тот же объем ресурса, как и на первой фазе. И так далее; после окончания обслуживания на M-й фазе заявка покидает систему и освобождает занимаемый ресурс.

Пусть $i_m(t)$ – число заявок на m-й фазе в момент времени t, $V_m(t)$ – суммарный объем занятого ресурса на m-й фазе в момент времени t, где $m = \overline{1, M}$ – номер фазы.

Поставим задачу нахождения характеристик многомерного случайного процесса $\{\mathbf{i}(t), \mathbf{V}(t)\} = \{i_1(t),...,i_M(t), V_1(t),...V_M(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [8].

Изобразим M параллельных осей времени, пронумерованных от 0 до M (рис. 1). Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 – второму и т.д., ось под номером M соответствует M-му просеянному потоку.

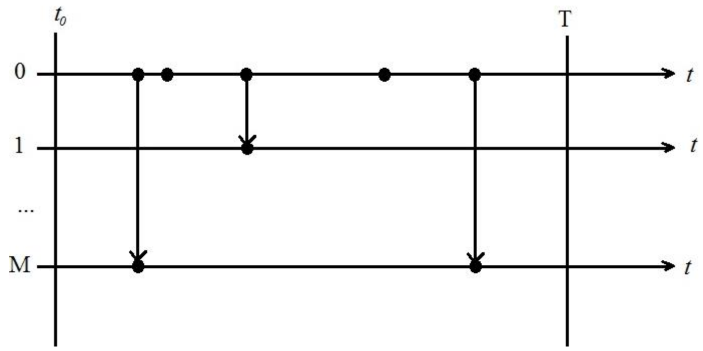

Рис. 1. Просеивание входящего потока

Пусть имеется набор функций $S_m(t)$, $m = \overline{1, M}$, значения которых лежат в диапазоне [0, 1] и обладают свойством

$$\sum_{m=1}^{M} S_m(t) \le 1,$$

для любых t.

Событие входящего потока может просеяться только на одну из осей либо не просеяться ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$, сформирует событие потока на m-й оси, то есть к моменту времени T будет находиться на обслуживании на m-й фазе, равна $S_m(t) = B^*_{m-1}(T-t) - B^*_m(T-t)$, где $B^*_m(\tau) = (B_{m-1} \cdot B_m)(\tau)$ – свертка функций распределения $B_{m-1}(x)$, $B_m(x)$ длительности обслуживания на фазах системы. Вероятность того, что заявка не сформирует событие ни на одной из осей, равна $S_0(t) = 1 - \sum_{m=1}^{M} S_m(t)$, т.е. к моменту времени T заявка закончит обслуживание на всех фазах и покинет систему.

Обозначим $n_m(t)$ – число событий, наступивших на m-й оси просеянного потока до момента t, $W_m(t)$ – суммарный объем занятого ресурса просеянными заявками на m-й оси.

Как показано в [8], многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в момент времени T совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{\mathbf{i}(T) = \mathbf{m}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}\}$$

для любых $\mathbf{m} = [m_1,...,m_M]$. Нетрудно показать, что для исследуемого процесса $\{\mathbf{i}(t), \mathbf{V}(t)\}$ справедливо

$$P\{\mathbf{i}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{V}(T) < \mathbf{z}\} = P\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{m}, \mathbf{W}(T) < \mathbf{z}\} \quad (1)$$

для любых $\mathbf{m}=\left[m_1,...,m_M\right]$ и любых $\mathbf{z}=\left[z_1,...,z_M\right]$. Следует отметить, что неравенства $\mathbf{V}(T)<\mathbf{z}$, $\mathbf{W}(T)<\mathbf{z}$ подразумевают поэлементное сравнение векторов, т.е. $W_1(T)<z_1$ и т.д. Будем использовать равенство (1) для исследования процесса $\{\mathbf{i}(t),\mathbf{V}(t)\}$ с помощью исследования процесса $\{\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\}$.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Добавим компоненту $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени t, к процессу $\{\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\}$, тогда полученный многомерный процесс будет являться марковским. Введем обозначение для его распределения вероятностей:

$$P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)=P\{k(t)=k,\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\mathbf{W}(t)<\mathbf{w}\}.$$

Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем:

$$P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t+\Delta t)=P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)(1-\lambda_k\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t)+P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)\lambda_k\Delta tS_0(t)+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\lambda_k\Delta tS_m(t)\int_0^{w_m}P(k,\mathbf{n}-\mathbf{e}_m,\mathbf{w}-\mathbf{y}_m,t)dG(y)+\sum_{\nu\neq k}q_{\nu k}\Delta tP(\nu,\mathbf{n},\mathbf{w},t)+o(\Delta t). \quad (2)$$

Из (2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)}{\partial t}=-\lambda_k\left(S_0(t)-1\right)P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)+$$
$$+\sum_{\nu\neq k}q_{\nu k}\Delta tP(\nu,\mathbf{n},\mathbf{w},t)+\sum_{m=1}^{M}\lambda_kS_m(t)\int_0^{w_m}P(k,\mathbf{n}-\mathbf{e}_m,\mathbf{w}-\mathbf{y}_m,t)dG(y) \quad (3)$$

для $k = 1, \ldots, K$; $\mathbf{n}=\left[n_1,...,n_M\right]$, $\mathbf{w}=\left[w_1,...,w_M\right]$.

Начальное условие для решения $P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t)$ в момент времени t_0 определим в виде:

$$P(k,\mathbf{n},\mathbf{w},t_0)=\begin{cases} r(k), \mathbf{n}=\mathbf{w}=\mathbf{0}, \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

где $r(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$.

Введем частичные характеристические функции вида:

$$h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\sum_{n_1=0}^{\infty}e^{ju_1n_1}\int_0^{\infty}e^{jv_1w_1}\cdot\ldots\cdot\sum_{n_M=0}^{\infty}e^{ju_Mn_M}\int_0^{\infty}e^{jv_Mw_M}P(k,\mathbf{n},d\mathbf{w},t),$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда (3) можем переписать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}=\sum_{\nu}q_{\nu k}h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)+\lambda_k\sum_{m=1}^{M}S_m(t)h(k,\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left(e^{ju_m}G^*(v_m)-1\right),$$

для $k = 1, \ldots, K$, где

$$G^*(v)=\int_0^{\infty}e^{jvy}dG(y).$$

Перепишем эту систему в виде матричного уравнения:

$$\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}=\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\mathbf{\Lambda}\sum_{m=1}^{M}S_m(t)\left(e^{ju_m}G^*(v_m)-1\right)+\mathbf{Q}\right] \quad (4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t_0)=\mathbf{r}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\left[h(1,\mathbf{u},\mathbf{v},t),...,h(K,\mathbf{u},\mathbf{v},t)\right],$$

$\mathbf{r}$ = [r(1), …, r(K)] – вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{re} = 1, \end{cases} \tag{6}$$

и $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

3. Метод асимптотического анализа

Для решения задачи (4)–(5) воспользуемся методом асимптотического анализа [8] в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова [9–12].

Подставим в уравнение (4) $\mathbf{\Lambda} = N\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}_1$, где $N \to \infty$ – некоторый параметр, который используется для асимптотического анализа. Тогда можно записать

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\mathbf{\Lambda}_1 \sum_{m=1}^{M} S_m(t)\left(e^{ju_m}G^*(v_m)-1\right)+\mathbf{Q}_1\right] \tag{7}$$

с начальным условием (5).

Теорема 1. Асимптотическая характеристическая функция первого порядка многомерного случайного процесса $\{\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\}$ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) = \mathbf{r}\exp\left\{N\lambda \sum_{m=1}^{M}\left(ju_m + jv_m a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)d\tau\right\},$$

где $\lambda = \mathbf{r\Lambda}_1\mathbf{e}$ – интенсивность входящего потока, a_1 – средний объем занимаемого одной заявкой ресурса.

Доказательство. Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{x}, \mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon). \tag{8}$$

Перепишем задачу (7)–(5) с учетом введенных обозначений:

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}_1 \sum_{m=1}^{M} S_m(t)\left(e^{j\varepsilon x_m}G^*(\varepsilon y_m)-1\right)+\mathbf{Q}_1\right] \tag{9}$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0,\varepsilon) = \mathbf{r}. \tag{10}$$

Найдем асимптотическое решение задачи (9)–(10) в два этапа.

Этап 1. Подставляя в (9) ε = 0, получим

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это уравнение с первым в системе (6), можно сделать вывод, что его можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t), \tag{11}$$

где $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ – некоторая скалярная функция, которая удовлетворяет условию:

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0) = 1. \tag{12}$$

Этап 2. Умножим (9) на вектор $\mathbf{e}$, подставим (11), учитывая разложение

$$e^{j\varepsilon x} = 1 + j\varepsilon x + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{13}$$

разделим результаты на ε и произведем предельный переход при ε → 0. Тогда, учитывая, что $\mathbf{Q}_1\mathbf{e} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{re}$ = 1, для функции $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)}{\partial t} = \Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\lambda \sum_{m=1}^{M} S_m(t)\left(jx_m + jy_m a_1\right). \tag{14}$$

Проинтегрировав уравнение (14) от t_0 до t, учитывая начальное условие (12), получим

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\exp\left\{\lambda\sum_{m=1}^{M}(jx_m+jy_m a_1)\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя это выражение в (11) и выполняя замены, обратные к (8), получим

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=$$

$$=\mathbf{r}\exp\left\{\lambda\sum_{m=1}^{M}(jx_m+jy_m a_1)\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau\right\}=\mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\sum_{m=1}^{M}(ju_m+jv_m a_1)\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau\right\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Асимптотическая характеристическая функция второго порядка многомерного случайного процесса $\{\mathbf{n}(t),\mathbf{W}(t)\}$ имеет вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\approx\exp\left\{N\lambda\sum_{m=1}^{M}(ju_m+jv_m a_1)\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+N\sum_{m=1}^{M}\frac{(ju_m)^2}{2}\left(\lambda\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa\int_{t_0}^{t}S_m^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$+N\sum_{m=1}^{M}\frac{(jv_m)^2}{2}\left(\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau\right)+N\sum_{m=1}^{M}ju_m jv_m\left(\lambda a_1\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau\right)+$$

$$+N\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}ju_m ju_l\kappa\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau+N\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jv_m jv_l\kappa a_1^2\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau+$$

$$\left.+N\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}ju_m jv_l\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau\right\},$$

где $\kappa=2\mathbf{g}(\bar{\mathbf{\Lambda}}-\lambda\mathrm{I})\mathbf{e}$, a_2 – второй начальный момент случайной величины с функцией распределения $G(y)$.

Доказательство. Представим функцию $\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)$ в виде:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\exp\left\{N\lambda\sum_{m=1}^{M}(ju_m+jv_m a_1)\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau\right\},\tag{15}$$

получим уравнение относительно функции $\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)$:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t}+\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[N\lambda\sum_{m=1}^{M}(ju_m+jv_m a_1)S_m(t)\right]=$$

$$=\mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\mathbf{\Lambda}_1\sum_{m=1}^{M}\left(e^{ju_m}G^*(v_m)-1\right)S_m(t)+\mathbf{Q}_1\right].\tag{16}$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2=\frac{1}{N},\ \mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{x},\ \mathbf{v}=\varepsilon\mathbf{y},\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u},\mathbf{v},t)=\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon).\tag{17}$$

С использованием этих обозначений уравнение (16) перепишется в виде:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)}{\partial t}+\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\lambda\sum_{m=1}^{M}(j\varepsilon x_m+j\varepsilon y_m a_1)S_m(t)=$$

$$=\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}_1\sum_{m=1}^{M}S_m(t)\left(e^{j\varepsilon x_m}G^*(\varepsilon y_m)-1\right)+\mathbf{Q}_1\right].\tag{18}$$

Найдем асимптотическое, при $\varepsilon\to0$, решение этой задачи, т.е. $\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)$.

Этап 1. Выполним предельный переход при $\varepsilon\to0$ в (18), получим:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)\mathbf{Q}_1=0.$$

Представим $\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ в виде:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\mathbf{r}\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t), \tag{19}$$

где $\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ – некоторая скалярная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t_0)=1$.

Этап 2. Решение уравнения (18) запишем в виде разложения:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)=\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\left\{\mathbf{r}+\mathbf{g}\sum_{m=1}^{M}(j\varepsilon x_m+j\varepsilon y_m a_1)S_m(t)\right\}+O(\varepsilon^2), \tag{20}$$

где $\mathbf{g}$ – некоторая вектор-строка. Подставим разложение (20) в (18), используя разложение (13), получим матричное уравнение для вектора **g**:

$$\mathbf{g}\mathbf{Q}_1=\mathbf{r}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}_1).$$

Этап 3. Домножим (18) на вектор **e**, используя (20) и разложение

$$e^{j\varepsilon x}=1+j\varepsilon x+\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}+O(\varepsilon^3),$$

в результате несложных преобразований получаем

$$\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)}{\partial t}=\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\Bigg[\sum_{m=1}^{M}\frac{(jx_m)^2}{2}\left(\lambda S_m(t)+\kappa S_m^2(t)\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\frac{(jy_m)^2}{2}\left(\lambda a_2 S_m(t)+\kappa a_1 S_m^2(t)\right)+\sum_{m=1}^{M}jx_m jy_m\left(\lambda a_1 S_m(t)+\kappa a_1 S_m^2(t)\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jx_m jx_l\kappa S_m(t)S_l(t)+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jy_m jy_l\kappa a_1^2 S_m(t)S_l(t)+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jx_m jy_l\kappa a_1 S_m(t)S_l(t)\Bigg],$$

где $\kappa=2\mathbf{g}(\mathbf{\Lambda}_1-\lambda\mathrm{I})\mathbf{e}$.

Решение этого уравнения с учетом начального условия, имеет вид:

$$\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=\exp\Bigg\{\sum_{m=1}^{M}\frac{(jx_m)^2}{2}\left(\lambda\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa\int_{t_0}^{t}S_m^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\frac{(jy_m)^2}{2}\left(\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}jx_m jy_m\left(\lambda a_1\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m^2(\tau)d\tau\right)+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jx_m jx_l\kappa\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jy_m jy_l\kappa a_1^2\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\l\neq m}}^{M}jx_m jy_l\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau\Bigg\},$$

подставляя его в (19), получаем

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)=\mathbf{r}\exp\Bigg\{\sum_{m=1}^{M}\frac{(jx_m)^2}{2}\left(\lambda\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa\int_{t_0}^{t}S_m^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\frac{(jy_m)^2}{2}\left(\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S_m^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{M} jx_m jy_m\left(\lambda a_1\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t} S_m^2(\tau)d\tau\right)+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{M} jx_m jx_l\kappa\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)S_m(\tau)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{M} jy_m jy_l\kappa a_1^2\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)S_m(\tau)d\tau+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{M} jx_m jy_l\kappa a_1\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)S_m(\tau)d\tau\right\}.$$

Выполним замены, обратные к (17) и (15), запишем приближенное равенство для характеристической функции $\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\approx\exp\left\{N\lambda\sum_{m=1}^{M}\left(ju_m+jv_m a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)d\tau+N\sum_{m=1}^{M}\frac{(ju_m)^2}{2}\left(\lambda\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)d\tau+\kappa\int_{t_0}^{t} S_m^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$+N\sum_{m=1}^{M}\frac{(jv_m)^2}{2}\left(\lambda a_2\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t} S_m^2(\tau)d\tau\right)+N\sum_{m=1}^{M} ju_m jv_m\left(\lambda a_1\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t} S_m^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+N\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{M} ju_m ju_l\kappa\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau+N\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{M} jv_m jv_l\kappa a_1^2\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau+$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{M} ju_m jv_l\kappa a_1\int_{t_0}^{t} S_m(\tau)S_l(\tau)d\tau\right\}.$$

Следствие. Асимптотическое стационарное распределение вероятностей $2M$-мерного процесса чисел занятых приборов и суммарных объемов занятых ресурсов на фазах системы MMPP/(GI/∞)^M является $2M$-мерным гауссовским распределением с параметрами:

– вектор математических ожиданий $\mathbf{Y}=N\lambda\left[\mathbf{Y}_1\quad \mathbf{Y}_2\quad \ldots\quad \mathbf{Y}_L\right]$, где $\mathbf{Y}_i=\left[1\quad a_1\right]\int_0^{\infty}\left(B_{i-1}^*(\tau)-B_i^*(\tau)\right)d\tau$,

– ковариационная матрица $\mathbf{W}=N\left(\lambda\mathbf{W}^{(1)}+\kappa\mathbf{W}^{(2)}\right)$, где

$$\mathbf{W}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1^{(1)} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \mathbf{K}_2^{(1)} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{K}_L^{(1)}\end{bmatrix},\ \mathbf{W}^{(2)}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \ldots & \mathbf{K}_{1L}^{(2)}\\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_2^{(2)} & \ldots & \mathbf{K}_{2L}^{(2)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathbf{K}_{L1}^{(2)} & \mathbf{K}_{L2}^{(2)} & \ldots & \mathbf{K}_L^{(2)}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & a_1\\ a_1 & a_2\end{bmatrix}\int_0^{\infty}\left(B_{i-1}^*(\tau)-B_i^*(\tau)\right)d\tau,\ \mathbf{K}_i^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & a_1\\ a_1 & a_1^2\end{bmatrix}\int_0^{\infty}\left(B_{i-1}^*(\tau)-B_i^*(\tau)\right)^2 d\tau,$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & a_1\\ a_1 & a_1^2\end{bmatrix}\int_0^{\infty}\left(B_{i-1}^*(\tau)-B_i^*(\tau)\right)\left(B_{j-1}^*(\tau)-B_j^*(\tau)\right)d\tau.$$

Заключение

В работе построена математическая модель процесса изменения чисел занятых приборов и суммарных объемов занятых ресурсов на фазах бесконечнолинейной многофазной ресурсной системы массового обслуживания MMPP/(GI/∞)^M. С помощью метода асимптотического анализа при условии растущей интенсивности входящего потока доказано, что асимптотическое распределение вероятностей чисел занятых приборов и суммарных объемов занятых ресурсов на фазах системы является многомерным гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихоненко О.М. Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций. Минск: Белорус. гос. ун-т, 2008. 148 с.
2. Вихрова О.Г., Сопин Э.С. Анализ показателей качества сети LTE с помощью систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом и случайными требованиями // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2, № 11. С. 185–191.
3. Morozov E.V., Potakhina L.V. Speed-up estimation of a system with random volume customers // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы 19-й междунар. науч. конф. М. : Моск. ун-т дружбы народов, 2016. С. 334–336.
4. Наумов В.А., Саймулов К.Е., Самуйлов А.К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2016. № 8. С. 125–135.
5. Sengupta B. The Spatial Requirement of M/G/1 Queue or: How to Design for Buffer Space Modeling and Performance Evaluation Methodology // Lect. Notes Contr. Inf. Sci. / F. Baccelli, G. Fayolle, eds. Berlin, 1984. V. 60. P. 547–562.
6. Тихоненко О.М. Распределение суммарного объема сообщений в системах массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 111–120.
7. Тихоненко О.М. Распределение суммарного объема сообщений в однолинейной системе массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. 1985. № 11. С. 78–83.
8. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
9. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
10. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Асимптотический анализ системы MMPP|GI|∞ с обслуживанием требований случайного объема // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Т. 299: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 20–21 мая 2016 г. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2016. С. 99–104.
11. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим MMPP-потоком // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 77–82.
12. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой междунар. науч. конф., 21–25 ноября 2016 г. М. : РУДН, 2016. С. 313–325.

Поступила в редакцию 29 декабря 2017 г.

Galileyskaya A.A., Lisovskaya E.Yu. (2018) ASYMPTOTIC ANALYSIS OF RESOURCE INFINITE-SERVER QUEUEING TANDEM WITH MMPP ARRIVALS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 45. pp. 13–21

DOI: 10.17223/19988605/45/2

In this work, the MMPP/(GI/∞)^M queueing system with unlimited number of servers and with unlimited amount of resource is studied. The arrival process is a MMPP. Service times on each server on m^{th} phase are i.i.d. with distribution function $B_m(x)$ ($m = 1,M$). All customers form request for a random resource ν with distribution function $G(y) = P\{\nu < y\}$ on each phase. After the service end on M^{th} phase the customer leaves system and sets free the occupied resource.

Consider 2M-dimensional stochastic process $\{\mathbf{i}(t), \mathbf{V}(t)\} = \{i_1(t),...,i_M(t), V_1(t),...V_M(t)\}$, where $i_m(t)$ and $V_m(t)$ denote the numbers of customers and the total resources at the m^{th} phase in the system at time t, respectively.

We proposed the dynamic screening method for its investigation. Note that this method exactly determines the characteristics of the process $\mathbf{V}(t)$ since the screened process contains only those customers, which do not finish the service at the moment T.

The system of Kolmogorov differential equations is derived. By using the partial characteristic function, we obtained the main equation:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t)\left[\mathbf{\Lambda}\sum_{m=1}^{M} S_m(t)\left(e^{ju_m}G^*(v_m)-1\right)+\mathbf{Q}\right]$$

with the initial condition

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v},t_0) = \mathbf{r}\ .$$

To solve this equation, the method of asymptotic analysis is proposed under the condition of an infinitely growing arrival rate. We proved that in steady state regime the characteristic function of the customers numbers and the total resources at the system phases corresponds to a 2M-dimensional Gaussian distribution with parameters:

− expectations vector $\mathbf{Y} = N\lambda[\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad ... \quad \mathbf{Y}_L]$, where $\mathbf{Y}_i = [1 \quad a_1]\int_0^\infty \left(B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau)\right)d\tau$,

− covariance matrix $\mathbf{W} = N\left(\lambda\mathbf{W}^{(1)} + \kappa\mathbf{W}^{(2)}\right)$, where

$$\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_L^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{1L}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_2^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_{2L}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{L1}^{(2)} & \mathbf{K}_{L2}^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_L^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \int_0^\infty \left(B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau)\right) d\tau, \quad \mathbf{K}_i^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_1^2 \end{bmatrix} \int_0^\infty \left(B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau)\right)^2 d\tau,$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_1^2 \end{bmatrix} \int_0^\infty \left(B_{i-1}^*(\tau) - B_i^*(\tau)\right)\left(B_{j-1}^*(\tau) - B_j^*(\tau)\right) d\tau.$$

Keywords: queueing tandem; random resource; method of asymptotic analysis; Gaussian approximation.

GALILEYSKAYA Anastasiya Alexandrovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: lusta.nastya@mail.ru

LISOVSKAYA Ekaterina Yurievna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

REFERENCES

1. Tikhonenko, O.M. (2008) *Modelirovanie protsessov i sistem obrabotki informatsii* [Modelling of processes and information processing systems]. Minsk: BSU.
2. Vikhrova, O.G. & Sopin, E.S. (2015) Analiz pokazateley kachestva seti LTE s pomoshch'yu sistem massovogo obsluzhivaniya s ogranichennym resursom i sluchaynymi trebovaniyami [Analysis of LTE network quality indicators with the help of queuing systems with limited resource and random requirements]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie – Modern Information Technologies and IT-Education.* 11. pp. 185–191.
3. Morozov, E.V. & Potakhina, L.V. (2016) Speed-up estimation of a system with random volume customers. *Raspredelennye komp'yuternye i telekommunikatsionnye seti: upravlenie, vychislenie, svyaz' (DCCN-2016)* [Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016)]. Proc. of the 19th International Conference. Moscow, 2016. pp. 547–562.
4. Naumov, V.A., Samuilov, K.E. & Samuilov, E.K. (2016) On the total amount of resources occupied by serviced customers. *Automation and Remote Control.* 77(8). pp. 125–135. DOI: 10.1134/S0005117916080087
5. Sengupta, B. (1984) The Spatial Requirement of M/G/1 Queue or: How to Design for Buffer Space Modeling and Performance Evaluation Methodology. In: Baccelli, F. & Fayolle, G. (eds) *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Vol. 60. Berlin: Springer. pp. 547–562.
6. Tikhonenko, O.M. (1987) Raspredelenie summarnogo ob"yema soobshcheniy v sistemakh massovogo obsluzhivaniya s gruppovym postupleniem [Distribution of the total volume of messages in a queuing system with batch arrival]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control.* no. 11. pp. 111–120.
7. Tikhonenko, O.M. (1985) Raspredeleniye summarnogo ob"yema soobshcheniy v odnolineynoy sisteme massovogo obsluzhivaniya s gruppovym postupleniem [Distribution of the total volume of messages in a single-server queuing system with batch arrival]. *Avtomatika i telemekhanika –Automation and Remote Control*. 11. pp. 78–83.
8. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolineynye sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Queuing systems and networks with infinite number of servers]. Tomsk: NTL.
9. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
10. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [Asymptotic analysis MMPP|GI|∞ queue with random customers capacity]. *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software information, technical and economic systems]. Proc. of the 4th International Youth Conference. Tomsk, May 20–21, 2016. Tomsk: Tomsk State University. pp. 99–104. (In Russian).
11. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [Study of infinite-server queue with random customers capacity with the MMPP arrives]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2016)* [Information technology and mathematical modeling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference named after A.F. Terpugov. Vol. 1. Tomsk: Tomsk State University. pp. 77–82. (In Russian).
12. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [The total volume of customers in the infinite-server queuing system with renewal input process]. *Raspredelennye komp'yuternye i telekommunikatsionnye seti: upravlenie, vychislenie, svyaz' (DCCN-2016)* [Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016)]. Proc. of the 19th International Conference. Moscow: PFUR. pp. 313–325. (In Russian).