ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ОБОРОТНОГО МАЯТНИКОВ

Методические указания
для выполнения лабораторных работ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ОБОРОТНОГО МАЯТНИКОВ

Методические указания
для выполнения лабораторных работ

Томск
2018

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО учебно-методической комиссией физического факультета ТГУ
Протокол № 06-18 от «28» июня 2018 г.

Председатель комиссии М.А. Баньщикова

В методическом пособии рассматриваются основные понятия и законы, на которых основан принцип действия математического и оборотного маятников. Получены рабочие формулы для определения ускорения свободного падения при помощи математического и оборотного маятников. Приводится методика эксперимента.

Методические указания предназначены для студентов физических специальностей дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛЬ: *Н.И. Федяйнова*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ОБОРОТНОГО МАЯТНИКОВ

Цель работы: исследование колебательного движения маятников. Измерение ускорения свободного падения.

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Ускорение свободного падения тела относительно системы отсчёта, связанной с Землёй, в разных точках земного шара различно. Это обусловлено неинерциальностью данной системы отсчёта и изменением силы гравитационного взаимодействия рассматриваемого тела с Землёй в различных её точках. Поэтому измерение ускорения свободного падения в различных точках Земли с одной стороны даёт указания о форме Земли, а с другой стороны позволяет обнаруживать различные местные неоднородности в строении земного шара.

Одним из методов достаточно точного определения ускорения свободного падения является исследование колебательного движения маятников.

Физическим маятником называется твёрдое тело, закреплённое на горизонтальной оси, проходящей через точку O, расположенную выше его центра масс C (рис.1).

Рассмотрим динамику движения этого маятника. При отклонении маятника из положения равновесия на угол φ возникает момент силы тяжести относительно горизонтальной оси Z. Запишем уравнение вращательного движения маятника относительно неподвижной оси в приближении абсолютно твёрдого тела

$$M_z = I_z\beta_z \qquad (1)$$

По определению момент силы относительно оси равен проекции этого момента относительно любой точки на данной оси на эту ось. Зададим положительное направление оси «к нам»

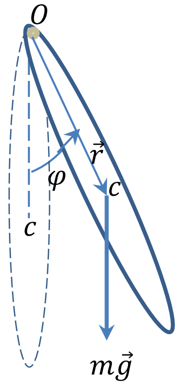

Рис. 1. Физический маятник

Момент силы тяжести относительно точки O $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$, где $\vec{r}-$ радиус вектор точки приложения силы относительно точки O, $|\vec{r}| = l$, где $l-$ расстояние от центра масс C до оси вращения Z.

Следовательно, проекция вектора $\vec{M}$ на выбранное направление оси Z «к нам»

$$M_z = -mgl\sin\varphi.$$

Поскольку вращение происходит относительно неподвижной оси и направление вектора угловой скорости не меняется, то направление углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости. Таким образом, проекция углового ускорения

$$\beta_z = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Если угол отклонения маятника из положения равновесия настолько мал, что можно использовать приближение $\sin\varphi \cong \varphi$, уравнение (1) запишется в виде:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I_z}\varphi = 0. \qquad (2)$$

Решением уравнения (2) являются собственные гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}$$

и, соответственно, период малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}. \qquad (3)$$

Таким образом, определив период малых колебаний физического маятника и зная его момент инерции, можно найти ускорение свободного падения:

$$g = 4\pi^2 \frac{I_z}{mlT^2}, \qquad (4)$$

где l −расстояние между точкой закрепления и центром масс маятника.

Однако, в общем случае возникают трудности с определением момента инерции, который трудно вычислить с большой степенью точности. Поэтому для измерения ускорения свободного падения описанным способом используются маятники особой конструкции, которая позволяет либо легко вычислить момент инерции, либо исключить его из рассмотрения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжёлый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

В этом случае шарик можно считать материальной точкой, момент инерции которой

$$I_z = ml^2.$$

Таким образом, для математического маятника получаем

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \tag{5}$$

ОБОРОТНЫЙ МАЯТНИК

Оборотный маятник (рис.2) состоит из длинного цилиндрического стержня, на котором закрепляют две подвижные призмы A и B и два подвижных тяжёлых диска E и D.

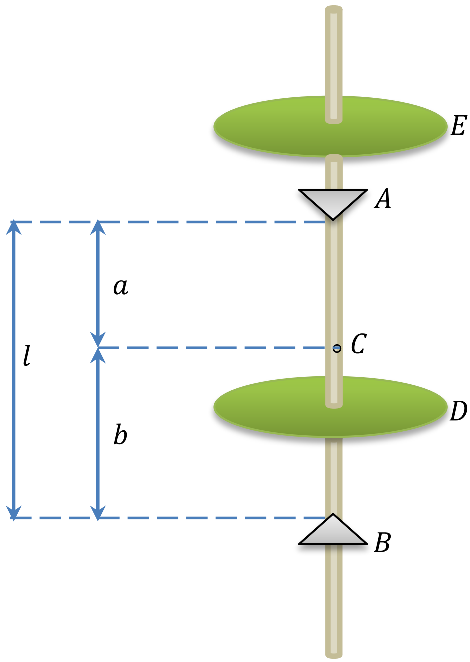

Рис. 2. Оборотный маятник

Колебания маятника осуществляются поочерёдно вокруг осей, проходящих через рёбра призм A и B. Обозначим расстояние от ребра призмы A до центра масс C — через a; расстояние от ребра призмы B до центра масс C – через b; расстояние между рёбрами (ножами) призм – l (рис. 2)

Пусть T_A и T_B периоды колебаний маятника относительно осей, проходящих соответственно через рёбра призм A и B. Тогда в соответствии с формулой (3) можно записать:

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mga}}; \qquad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{mgb}},$$

где I_A и I_B − моменты инерции относительно осей, проходящих через соответствующие рёбра призм.

Для того, чтобы исключить из рабочей формулы для определения ускорения свободного падения момент инерции, возведём каждое из этих выражений в квадрат, помножив первое из них на a, второе – на b и вычтем друг из друга:

$$aT_A^2 - bT_B^2 = 4\pi^2 \frac{I_A - I_B}{mg} \tag{6}$$

Моменты инерции I_A и I_B можно определить, воспользовавшись теоремой Штейнера:

Момент инерции $\boldsymbol{I}$ тела относительно произвольной оси $\boldsymbol{Z}$ равен моменту инерции $\boldsymbol{I_C}$ относительно оси $\boldsymbol{Z_C}$, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

Таким образом:

$$I_A = \boldsymbol{I_C} + ma^2; \qquad I_B = \boldsymbol{I_C} + mb^2 \tag{7}$$

Подставив соотношения (7) в (6), получим:

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{aT_A^2 - bT_B^2} \tag{8}$$

Если подобрать положение дисков E и D таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\boldsymbol{T_A = T_B = T}$, то формула (8) значительно упрощается, и мы получаем выражение для расчёта ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника (рабочую формулу):

$$g = 4\pi^2 \frac{(a+b)(a-b)}{T^2(a-b)} \quad \Rightarrow$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{l}$ − расстояние между рёбрами призм в случае равенства периодов колебаний относительно каждого из рёбер.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проведения эксперимента используется универсальный маятник FPM – 04, общий вид и схема которого представлены на рисунках 3 и 4.

Рис. 3. Универсальный маятник FPM – 04

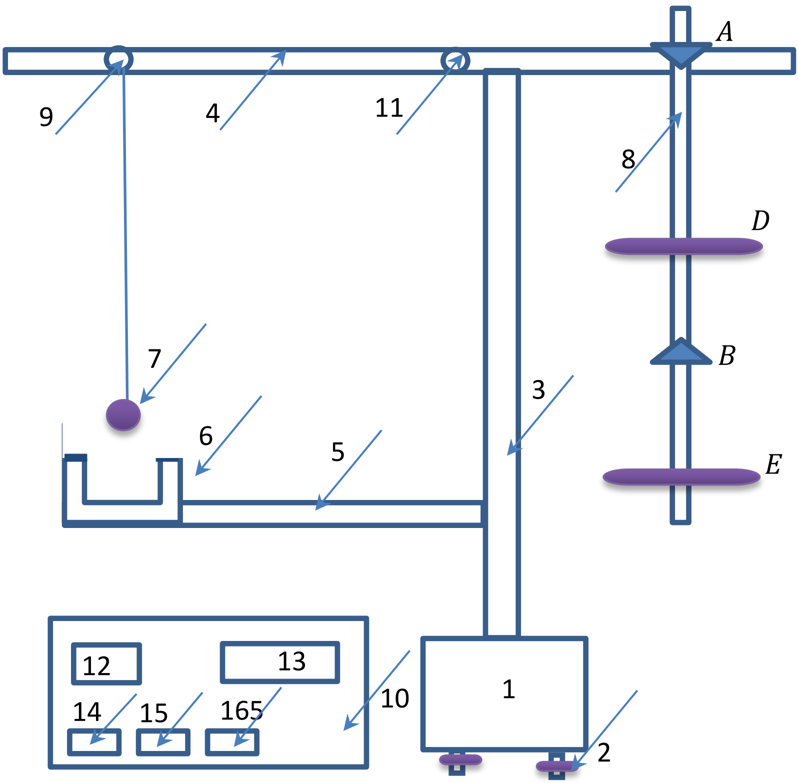

Рис. 4. Схематическое изображение маятника FPM – 04

Основание (1) оснащено регулируемыми ножками (2), которые позволяют производить выравнивание прибора.

В основании закреплена колонка (3), на которой фиксируется верхний кронштейн (4) и нижний кронштейн (5) с фотоэлектрическим датчиком (6). После отвинчивания воротка (11) верхний кронштейн можно поворачивать вокруг колонки. Закрепление воротка (11) фиксирует кронштейн в любом произвольно выбранном положении. С одной стороны кронштейна (4) находится математический маятник (7), с другой на вмонтированных вкладышах – оборотный маятник (8).

Длину математического маятника можно регулировать при помощи воротка (9), а её величину можно определить при помощи шкалы на колонке (3).

Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня, на котором фиксируются две призмы, повёрнутые друг к другу остриями, и два тяжёлых диска. На стержне через 10 мм выполнены кольцевые нарезки, служащие для точного определения длины оборотного маятника l (расстояния между остриями призм). Призмы и диски можно перемещать вдоль стержня таким образом, чтобы их расстояние вдоль стержня было кратным 10 мм, а фиксирующие воротки размещены так, чтобы при помощи кольцевых нарезок можно было их наглухо блокировать.

Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком можно перемещать вдоль колонки (3) и фиксировать в произвольно выбранном положении.

Фотоэлектрический датчик (6) соединён с привинченным к основанию мили секундомером FPM-14 (10). На табло (12) в процессе работы высвечивается число периодов, а на табло (13) – полное время. В нижней части панели расположены клавиши: «сеть» (14); «сброс» (15) и «стоп» (16).

Прибор готов к работе непосредственно после включения в сеть и не нуждается в прогреве.

Эксплуатация прибора допускается только при наличии заземления!

Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника

1. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком установить в нижней части колонки таким образом, чтобы верхняя грань кронштейна показывала на шкале длину не менее

50 см. Затянуть вороток, фиксируя датчик в выбранном положении.

2. Поворачивая верхний кронштейн, поместить над датчиком математический маятник.

3. Вращая вороток (9) на верхнем кронштейне, установить длину математического маятника таким образом, чтобы черта на шарике была продолжением черты на фотоэлектрическом датчике.

4. Отклонить маятник на 4-5° от положения равновесия и нажать клавишу «сброс».

5. После высвечивания на табло (12) порядка 20 периодов, нажать клавишу «стоп».

6. Занести в таблицу значение полученного на табло (13) времени t_i и число соответствующих ему колебаний n_i, зафиксированных на табло (12).

7. Повторить измерения, нажав клавишу «сброс». Провести порядка 10 опытов.

8. Определить для каждого измерения период математического маятника $T_i = \frac{t_i}{n_i}$.

9. Определить среднее значение периода колебаний

$$\langle T \rangle = \frac{\sum T_i}{m}\,, \qquad \text{где } m - \text{число опытов.}$$

10. Найти среднее значение ускорения свободного падения по рабочей формуле

$$\langle g \rangle = 4\pi^2 \frac{l}{\langle T \rangle^2}.$$

Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

1. Повернуть верхний кронштейн на 180°.

2. Зафиксировать несимметрично диски на стержне, таким образом, чтобы один из них (E) находился вблизи конца стержня, а другой (D) – вблизи его середины (Рис.4).

3. Призмы маятника закрепить по обеим сторонам центра масс полученной системы «стержень-диски» так, чтобы они были обращены друг к другу остриями. Одна из призм (А) располагается вблизи конца стержня, а вторая (В) – на половине расстояния между дисками (Рис. 4).

4. Проверить, отвечают ли грани призм нарезкам на стержне.

5. Закрепить маятник на вкладыше верхнего кронштейна на острие призмы А, находящейся вблизи конца стержня.

6. Нижний кронштейн вместе с датчиком переместить таким образом, чтобы стержень маятника пересекал оптическую ось.

7. Отклонить маятник на 4-5° от положения равновесия и нажать клавишу «сброс».

8. После высвечивания на табло порядка 20 колебаний, нажать клавишу «стоп».

9. Определить период колебаний $T_A = \frac{t}{n}$.

10. Снять маятник и закрепить его на острие второй призмы (В).

11. Нижний кронштейн с датчиком переместить таким образом, чтобы маятник пересекал оптическую ось.

12. Отклонить маятник на 4-5° и описанным выше способом определить период T_B.

13. Если $T_A > T_B$, то вторую призму (В) переместить в направлении диска, находящегося в конце стержня; если $T_A < T_B$ – переместить в направлении середины стержня. При этом положение дисков и первой призмы остаются фиксированными.

14. Повторно измерить период T_B и сравнить с T_A.

15. Изменять положение второй призмы до получения равенства $T_A \cong T_B$ с точностью до 0,5%.

16. Определить длину оборотного маятника l, посчитав количество нарезок на стержне между остриями призм при выполнении условия $\mathrm{T_A} = \mathrm{T_B}$.

17. По формуле (9) определить ускорение свободного падения.

Оценка погрешности измерений

Поскольку непосредственно в данной работе определяется длина маятников и период колебаний, то определение ускорения свободного падения является косвенным измерением. Следовательно, для определения погрешности в измерении g необходимо воспользоваться выражением для доверительного интервала при косвенных измерениях:

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2},$$

где для математического маятника погрешность даваемая прибором в измерении длины составляет $\Delta l_{\text{сист}} = 2$ мм; для оборотного маятника она составит $\Delta l_{\text{сист}} = 3$ мм.

Погрешность в определении времени

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{сист}})^2 + (\Delta t_{\text{случ}})^2},$$

где $\Delta t_{\text{случ}}$ определяется по формуле Стьюдента, систематическая погрешность в определении времени составляет порядка 0,02%; для оборотного маятника погрешность в определении времени задаётся точностью выполнения равенства $T_A = T_B$ и составляет 0,5%. При этом

$$\frac{\Delta T}{\langle T\rangle} = \frac{\Delta t}{\langle t\rangle}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. От каких факторов зависит ускорение свободного падения?

2. Дать определение физического маятника.

3. Получить выражение для периода малых колебаний физического маятника.

4. Получить рабочую формулу для определения ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

5. Получить рабочую формулу для определения ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 3475 от «1» ноября 2018 г. Тираж 50 экз.