ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания
для проведения лабораторных работ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания
для проведения лабораторных работ

Томск
2018

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО учебно-методической комиссией физического факультета ТГУ
Протокол № 06-18 от «28» июня 2018 г.

Председатель комиссии М.А. Баньщикова

В методических указаниях рассмотрены затухающие колебания *RLC* – осциллятора. Приводится теория этого явления. Используется полуавтоматический метод измерений с компьютерным интерфейсом. Рассматривается способ нахождения параметров цепи (добротности, коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания, частоты, начальной фазы колебаний, начальной амплитуды колебаний) с использованием нелинейных методов вычислений. Аппаратная часть установки изготовлена на кафедре общей и экспериментальной физики физического факультета ТГУ.

Методические указания разработаны для студентов физического, радиофизического и физико-технического факультетов.

СОСТАВИТЕЛЬ: доцент *И.И. Клыков*

Цель работы: Изучение затухающих электромагнитных колебаний *RCL* – осциллятора (колебательный контур), нахождение параметров осциллятора, используя нелинейные методы вычислений.

Теория

В классическом варианте принципиальная схема лабораторной работы приведена на рисунке 1.

Составляющие компоненты:

- омическое сопротивление;
- конденсатор, емкостью *C*;
- ключ;
- источник питания;
- катушка индуктивности *L*.

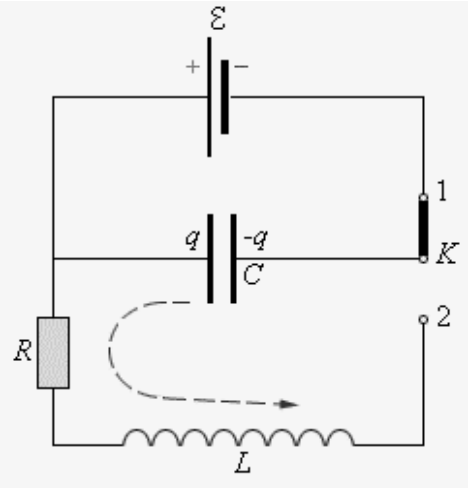

Рис. 1. Схема RCL – контура

Теория затухающих электромагнитных колебаний

Колебательный контур, представляет собой замкнутую цепь, которая состоит из конденсатора, емкостью *C*, катушки индуктивности *L* и омического (активного) сопротивления *R*, соединенных последовательно. Омическое сопротивление является суммой сопротивлений соединительных проводов, провода катушки индуктивности и включенного в контур резистора. Принципиальная схема колебательного контура приведена на рисунке 1.

Электрический контур можно считать линейной системой, если его сопротивление *R*, электроемкость *C* и индуктивность *L* не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения.

Найдем дифференциальное уравнение, описывающее свободные затухающие колебания линейной системы – электрического колебательного контура. Согласно второму правилу Кирхгофа для *RLC* – контура, в котором протекают квазистационарные токи (это такой ток, мгновенное значение которого одинаковы в каждой точке неразветвленных участков цепи), можно записать:

$$U_L + U_R + U_C = 0 \qquad (1)$$

где U_L – падение напряжения на индуктивности, U_C – падение напряжения на емкости, U_R – падение напряжения на резисторе, или:

$$L\frac{dI}{dt} + RL + \frac{q}{C} = 0 \qquad (2)$$

Учитывая, что $I = dq/dt$ и разделив (2.2) на L, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \qquad (3)$$

Так как величина заряда на обкладках конденсатора пропорциональна разности потенциалов на них, то уравнение,

описывающие изменения напряжения на конденсаторе, будет аналогично предыдущему уравнению:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = 0 \qquad (4)$$

Введя обозначение $\beta = R/2L$ получим:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0 \qquad (5)$$

где β - коэффициент затухания, U - напряжение на обкладках конденсатора, ω_0^2 - частота собственных незатухающих колебаний контура.

Уравнение (5) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и описывает свободные затухающие колебания.

При условии $\beta < \omega_0$ решение уравнения (5) имеет вид:

$$U(t) = U_m(t)\cos(\omega t + \alpha) = U_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha) \qquad (6)$$

где α – начальная фаза, ω – частота затухающих колебаний, $U_m(t)$ – амплитуда затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (7)$$

$$U_m = U_0 \exp(-\beta t) \qquad (8)$$

где U_0 – значение напряжения при $t = 0$. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β. Для α=0 график зависимости (6) изображен на рисунке 2 сплошной линией, а зависимости (8)-штриховой.

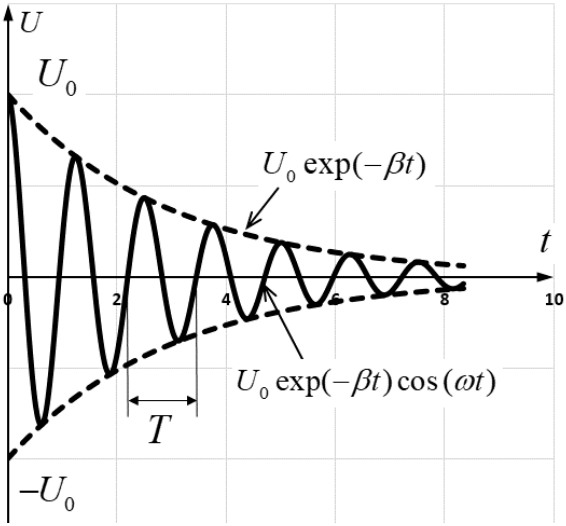

Рис. 2. Затухающие колебания.

Затухающие колебания не являются строго периодическими, т. к. максимальное значение колеблющейся величины U_1, достигаемое в некоторый момент времени t_1, в последующем $t > t_1$ никогда не повторяется. Однако при затухающих колебаниях какой-либо величины, она достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = T_0\sqrt{1 + 1/4Q^2} \qquad (9)$$

Величины T и ω называют периодом и циклической частотой затухающих колебаний, Q – добротность осциллятора.

Промежуток времени τ, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз (e=2.718- основание натурального логарифма), называется временем релаксации. Из определения времени релаксации следует, что $\beta = 1/\tau$. Затухание также характеризуется такими параметрами как

логарифмический декремент затухания λ и добротность Q. Логарифмический декремент затухания равен логарифму отношения двух последовательных амплитуд:

$$\lambda = \ln\left(\frac{U_0 \exp(-\beta t)}{U_0 \exp(-\beta(t+T))}\right) = \beta T \qquad (10)$$

Добротность осциллятора связана с логарифмическим декрементом простым соотношением:

$$Q = \pi / \lambda \qquad (11)$$

С учетом добротности и декремента уравнение (6) записывается в эквивалентном виде, удобном для дальнейшего анализа

$$U = U_0 \exp(-\lambda \omega t / 2\pi)\cos(\omega t + \alpha) = U_0 \exp(-\omega t / 2Q)\cos(\omega t + \alpha) \qquad (12)$$

Четыре параметра U0, ω, Q, α полностью характеризуют колебания затухающего осциллятора.

Описание установки

Установка подключается к компьютеру через COM порт. Управление полностью осуществляется через компьютерный интерфейс. Основная идея реализации заключается в том, что это приложения посылает сигналы на микроконтроллер AVR ATmega128, подключенный к ПК по интерфейсу RS232, которые соответствуют определенному действию.

Принципиальная схема установки представлена на рис.3. На рисунке 4. изображена установка, подключенная к компьютеру, как она выглядит в завершенном виде. Как видно из схемы резисторы могут соединяться между собой параллельно, конденсаторы также могут соединяться между собой параллельно. Катушка индуктивности L = 0,006735 Гн не имеет сердечника. Отсутствие сердечника гарантирует постоянство

индуктивности независимо от силы тока в катушке. При нажатии виртуальной кнопки СТАРТ (рис. 5) переключатель К (реле) переходит из положения 1 в положение 2 и начинается разряд включенных конденсаторов. Напряжение с конденсаторов поступает на АЦП и, в соответствии с выбранным временем дискретизации, снимается 500 отсчетов напряжения.

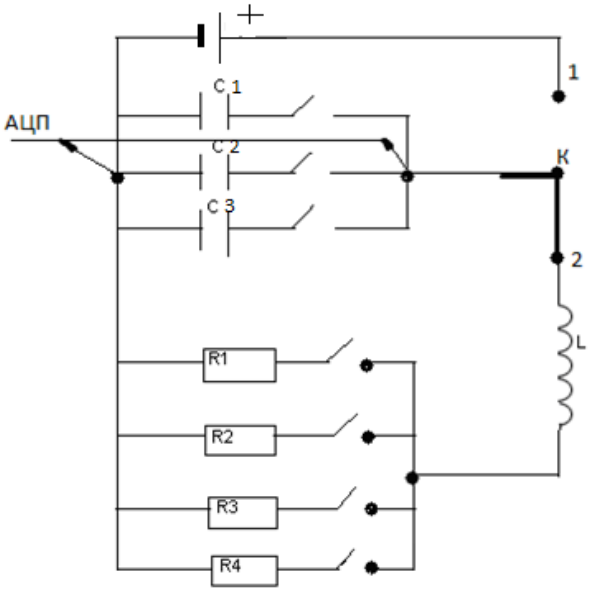

Рис. 3. Принципиальная схема установки

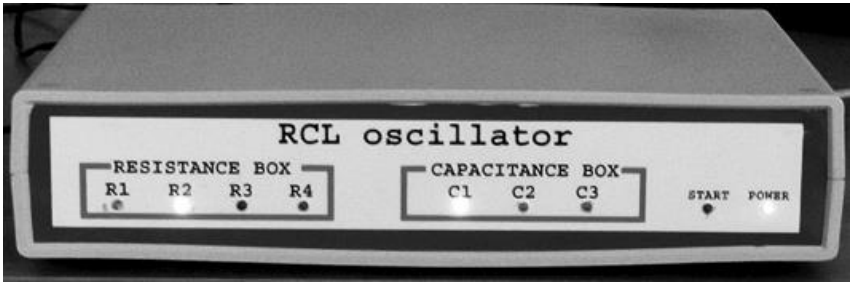

Рис.4. Лицевая панель блока RCL – осциллятора

Назначение девяти светодиодов очевидно: горящий светодиод свидетельствует о включенной функции.

Интерфейс программы.

На рисунке 5 представлен интерфейс программы проведения эксперимента. Из рисунка видно, что для включения/выключения конкретного резистора/конденсатора присутствуют две панели: магазин сопротивлений и магазин емкостей. Данные магазина реализованы с помощью набора флажков. В зависимости от состояния флажка (ИСТИНА или ЛОЖЬ) выбранный параметр цепи включен или выключен. При включенном флажке на панели прибора горит аналогичный светодиод. Также, пользователь может выбрать интервал дискретизации 25[mksec], 50[mksec], 100[mksec].

После того, как пользователь выбрал электрические параметры цепи, выбрал интервал дискретизации, нужно нажать кнопку «СТАРТ». После этого установка перейдет в действие и появится график зависимости «Напряжения на конденсаторе от времени» (рис.5). Правой кнопкой мыши мы можем выделять области на графике, увеличивать и довольно точно снимать значения измерений. Гораздо удобнее и точнее обработать полученные данные в Excel, для чего служит выпадающее меню

«Файл» – «Сохранить данные», которые выводятся в текстовый файл.

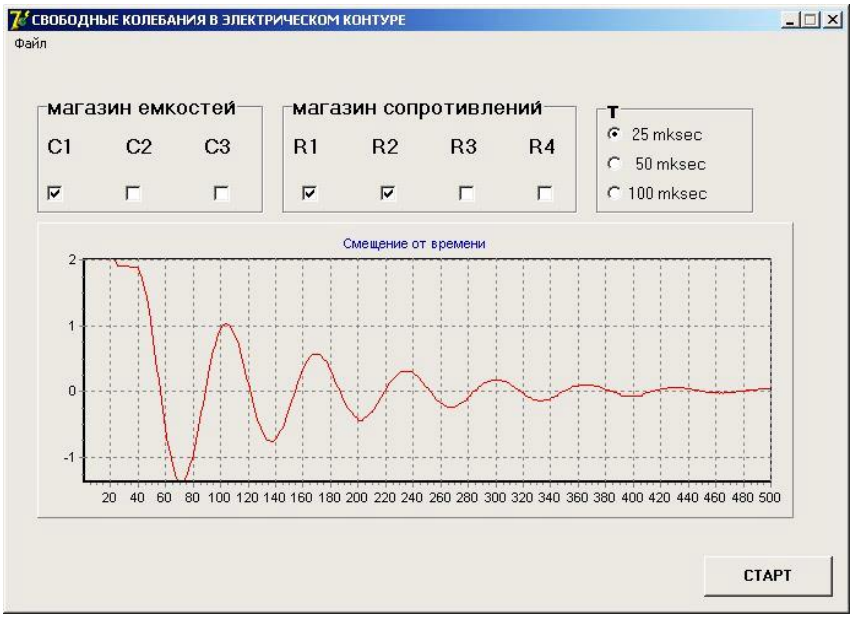

Рис. 5. Интерфейс программы проведения эксперимента.

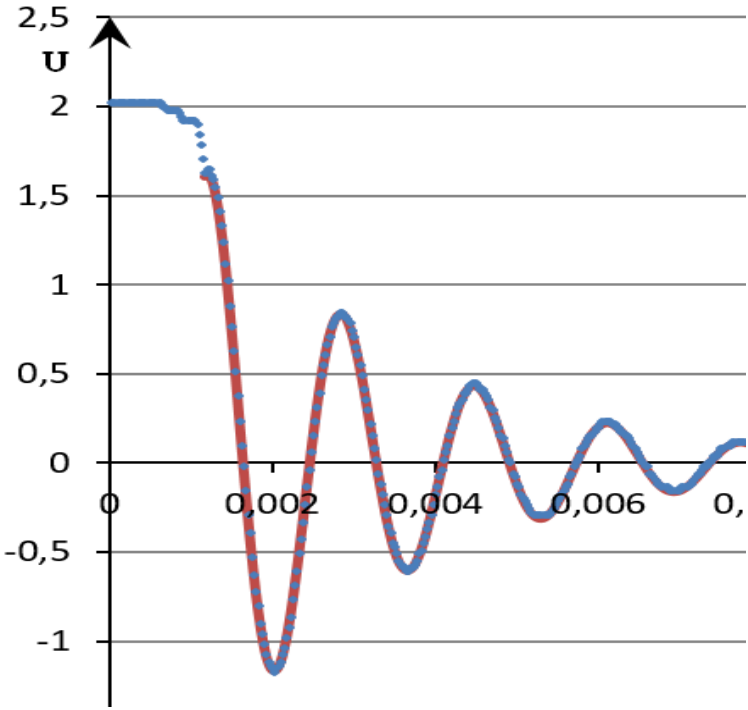

Рис. 6. График зависимости напряжения от времени, построенный в EXCEL.
Точки – эксперимент, сплошная линия – аппроксимация МНК.

Порядок работы

- Получить от преподавателя значения параметров R, C_1, C_2.
- Включить установку в сеть.
- Выбрать из магазина сопротивлений, из магазина емкостей нужную комбинацию емкостей и сопротивлений.
- Время дискретизации рекомендуется взять 25 мкс.

• Нажать «СТАРТ». Установка нарисует график зависимости напряжения от времени. Измерить напряжение для C_1, C_2, C_1+C_2 (параллельное соединение) для данного R.

• Сохранить данные в текстовый файл с именем типа R_1C_1.txt. Будет три файла.

• Для последующей обработки открываем этот текстовый документ в Excel. Вообще говоря, данные могут быть обработаны в любом подходящем математическом пакете – например, Matlab, Mathcad и другие.

Обработка данных

На основании полученных зависимостей напряжения от времени найти четыре основных параметра U_0, ω, Q, α для каждой пары резистор – конденсатор. Потом рассчитать на основе этих четырех параметров остальные: λ, β, T_0, R, ω_0, C. Значение индуктивности катушки известно L = 0,006735 Гн. Затем сравнить экспериментальные данные с теоретическими, учитывая, что емкость последовательно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей.

$$\delta C = (C_1 + C_2 - C_{12}) / C_{12} \qquad (13)$$

Уравнение (13) не что иное, как относительная ошибка в измерении ёмкостей. Данная установка дает точность не хуже 0,2%. Следует отметить, что сопротивление контура включает в себя сопротивление катушки, сопротивление из магазина резисторов и сопротивление подводящих проводов. Можно вычленить сопротивление катушки, измеряя напряжение при разных резисторах, но это не рассматривается в данной работе.

Текстовый файл записан в виде двух столбцов: первый – время в микросекундах, второй – напряжение в вольтах.

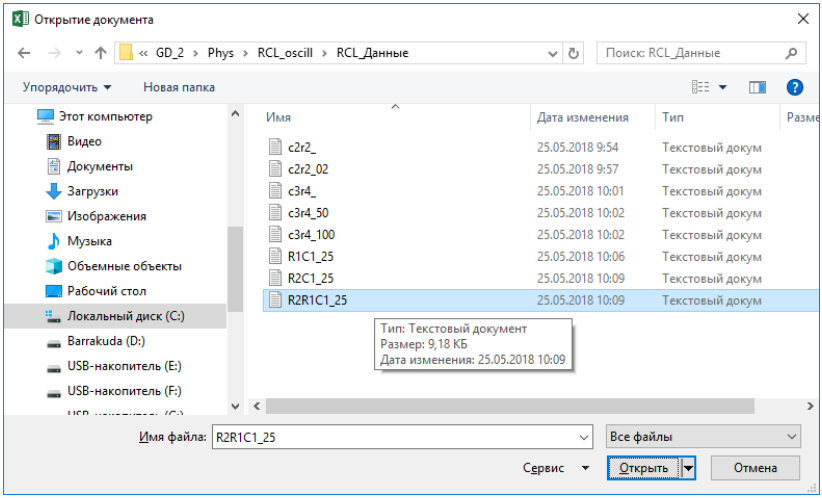

Рис. 7. Открытие текстового файла в Excel

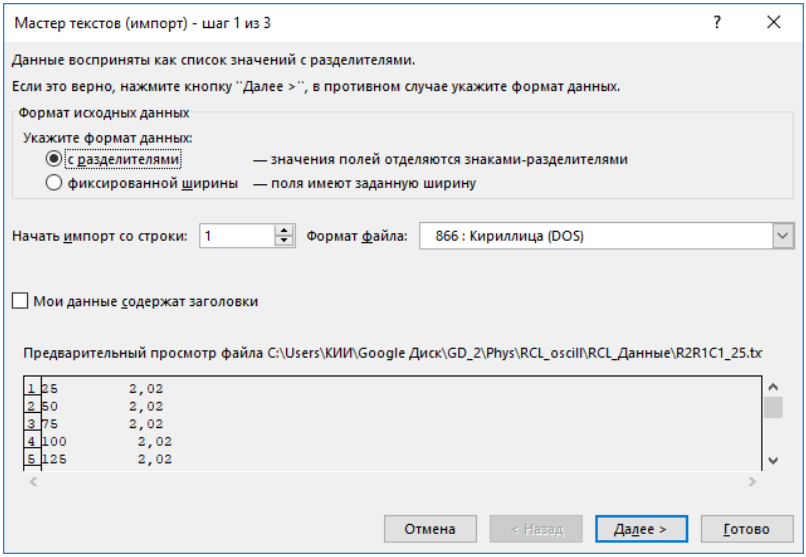

Рис.8. Открытие текстового файла в Excel

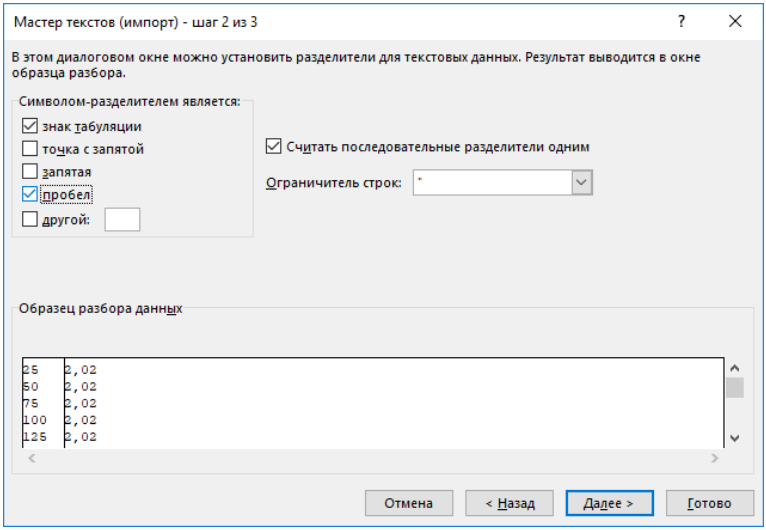

Рис. 9. Выбор разделителя данных.

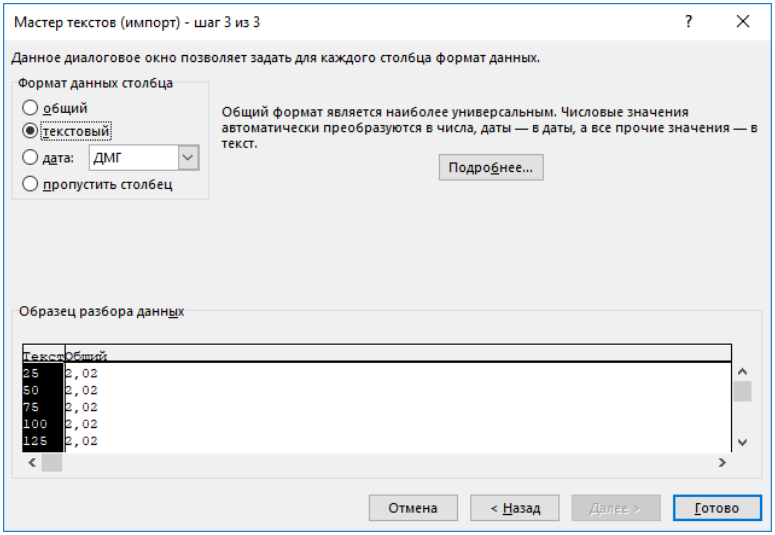

Рис. 10. Выбор формата столбца

• Вычисляем теоретические данные по формуле (12) для примерных параметров $U_0 = 2$ V, $\omega = 4000$ sec^{-1}, $Q = 1$, $\alpha = 1$. Получается переопределенная система примерно из 400 нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными, которые находятся МНК из этой системы уравнений. Для обработки следует брать данные начиная примерно с 50 отсчета $t = 0{,}00125$ секунды, чтобы исключить искажения, вызванные моментом включения. Также стоит ограничиться временем, не превышающим 450 отсчетом t =0,0125 секунды, в противном случае будет сказываться ошибка квантования по уровню сигнала. (*Квантование по уровню – это процесс замены непрерывной функции ее отдельными значениями, отстоящими друг от друга на конечный интервал (уровень). При квантовании значение функции в произвольный момент времени заменяется ее ближайшим значением, называемым уровнем квантования. Интервал между двумя дискретными значениями уровней называется шагом квантования*).

Находим квадрат разности между теоретическими и экспериментальными значениями. Все полученные данные заносим в таблицу и строим два графика зависимости Смещения (колонки 3 и 4) от Времени (колонка 1) на одной диаграмме (Рис. 6). Вначале экспериментальный и теоретический графики не совпадут друг с другом. Всё это проделываем для каждой взятой комбинации емкости и сопротивления.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Время, сек	Время, мксек	Смещение (В)	Теория	Квадрат разности (3)-(4)					$U = U_0 \exp(-\lambda\omega t / 2\pi)\cos(\omega t + \alpha) = U_0 \exp(-\omega t / 2Q)\cos(\omega t + \alpha)$				
2	1	2	3	4	5		U_0=	2,649	V					
3							Q=	4,771						
4	0,000025	25	2,02	-0,46659	4,7812		ω=	3843	1/sec	=$H$2*COS($H$4*A4+$H$5)/EXP($H$4*A4/2/$H				
5	0,00005	50	2,02	-0,4127	5,9180		α=	1,54	rad					
6	0,000075	75	2,02	-0,65009	7,1294		λ=	0,6584362		=H7*H8				
7	0,0001	100	2,02	-0,87675	8,3912		β=	402,68	1/sec	=H4/2/H3				
8	0,000125	125	2,02	-1,0908	9,6771		T=	0,0016351	sec	=2*ПИ()/$H$4				
9	0,00015	150	2,02	-1,29052	10,9595		T_0=	0,0016262	sec	=H8/КОРЕНЬ(1+1/4/H3/H3)				
10	0,000175	175	2,02	-1,47434	12,2104		Сумма=	0,0238246		=СУММ(E70:E453)				
11	0,0002	200	2,02	-1,64089	13,4021		L=	0,0067354	H	0,0067354				
12	0,000225	225	2,02	-1,78898	14,5084		R=	5,42440	Ohm	=2*H7*H11				
13	0,00025	250	2,02	-1,91761	15,5048		ω_0=	3863,64	1/sec	=H4*КОРЕНЬ(1+1/4/H3/H3)				
14	0,000275	275	2,02	-2,02597	16,3699		C=	9,946E-06	F	=1/H13/H13/H11				

Рис. 11. Скриншот рабочего листа Excel

• Активизируем в Excel функцию «*Поиск решения*», так как по умолчанию в Excel надстройка Поиск решения отключена. Чтобы активизировать ее в **Excel**, щелкните значок **Файл Параметры**, а затем выберите категорию **Надстройки**. В поле **Управление** выберите значение **Надстройки Excel** и нажмите кнопку **Перейти**. В поле **надстройки** установите флажок рядом с пунктом **Поиск решения** и нажмите кнопку **ОК**. С ее помощью можно определить, при каких значениях указанных влияющих ячеек формула в целевой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максимальное или равное какой-либо величине). Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем не обязательно, чтобы при этом использовались те же влияющие ячейки. Для расчета заданного значения применяются различные математические методы поиска.

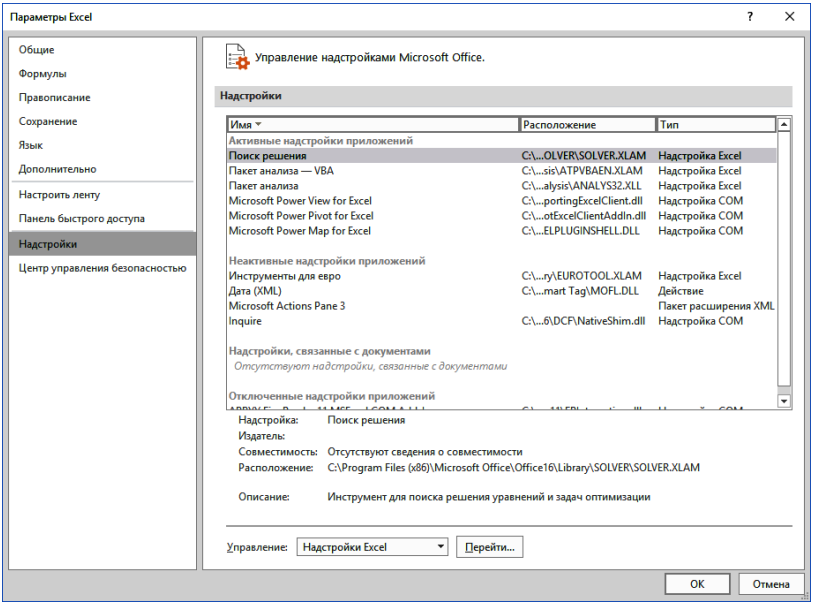

Рис. 12. Управление надстройками Excel

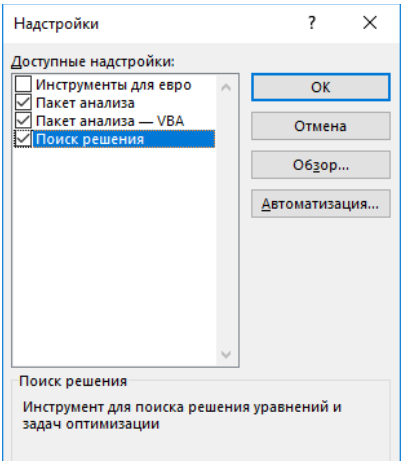

Рис. 13 Подключение надстройки *Поиск решения*

• Выделяем целевую ячейку, которая должна принять необходимое значение, и выбираем команду: - В **Excel 2010** и выше *Данные/Анализ/Поиск решения*. Поле (Установить целевую ячейку) открывшегося диалогового окна надстройки *Поиск решения* будет содержать адрес целевой ячейки.

Устанавливаем переключатель *До*, задающие значение целевой ячейки, – *Минимум*.

Указываем в поле *Изменяя ячейки*, в каких ячейках программа должна изменять значения в поисках оптимального результата.

Создаем ограничения в списке *В соответствие с ограничениями:*. Для этого щелкните на кнопке *Добавить* и в диалоговом окне *Добавление ограничения* определите ограничение.

С помощью этой надстройки «Поиск решения», мы будем искать четыре параметра цепи такие как: начальное напряжение на конденсаторе (U_0), добротность (Q), частоту собственных затухающих колебаний (ω), начальная фаза (α) для всех комбинаций емкостей и сопротивления; остальные же параметры находятся из формул:

$$\beta = \omega / 2Q, \quad \lambda = \beta T, \quad T = 2\pi / \omega, \quad T_0 = T \Big/ \sqrt{1 + 1/4Q^2},$$
$$\omega_0 = \omega \sqrt{1 + 1/4Q^2}, \quad C = 1 \Big/ \left(L\omega_0^2 \right), \quad R = 2\beta L. \tag{14}$$

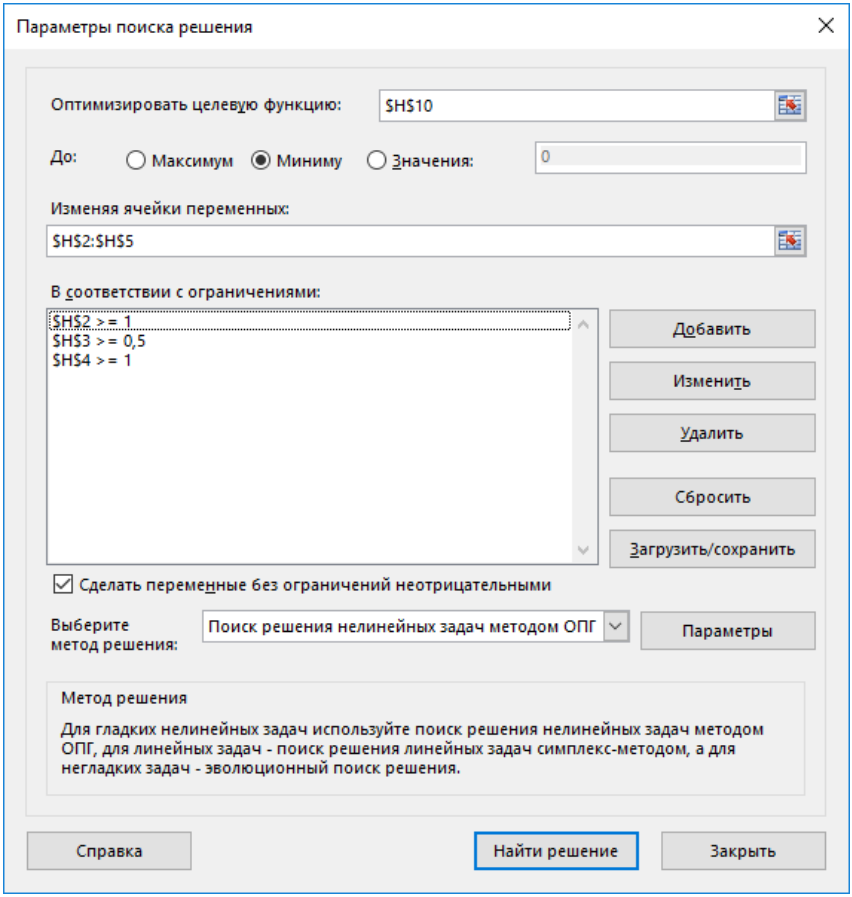

Рис. 14. Выставление параметров решения

Щелкнув на кнопке *Найти решение*, запустите процесс поиска решения. Затем *ОК*. Смотри рис.15.

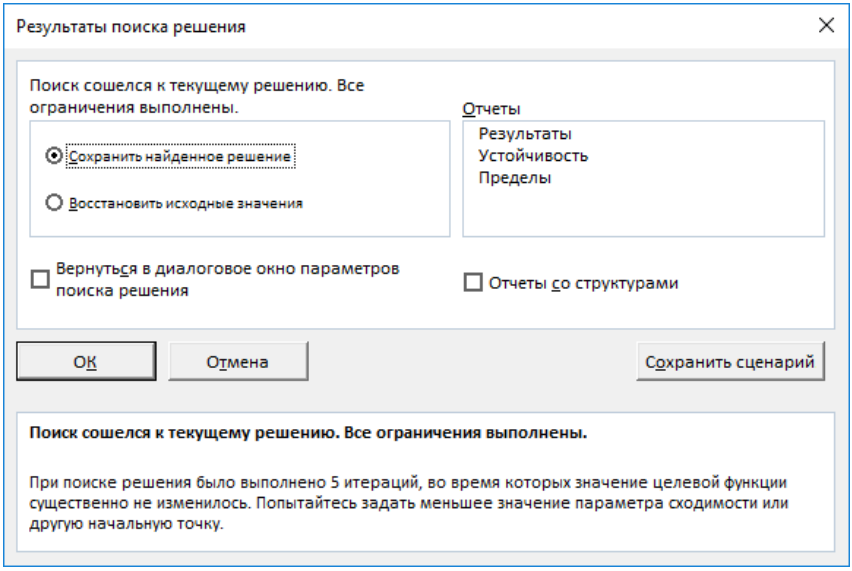

Рис. 15. Сохранение найденного решения

После чего найденное решение появится в ячейках H2, H3, H4, H5. В ячейках H6 – H10, H12 – H14 автоматически вычислятся остальные параметры контура (см. формулы (14)).

ВОПРОСЫ

1. Что такое квазистационарный ток?
2. Сформулируйте правила Кирхгофа для постоянного тока и для квазистационарного тока.
3. Выполняется ли закон сохранения электрического заряда для *RCL* – осциллятора?
4. Выполняется ли закон сохранения энергии для *RCL* – осциллятора?
5. Что такое логарифмический декремент затухания? Как он зависит от параметров *RCL* – осциллятора?

6. Что такое добротность? Как она зависит от параметров *RCL* – осциллятора?

7. Приведите механические аналоги *RCL* – осциллятора

8. С каким сдвигом по фазе меняются во времени энергия электрического поля конденсатора и магнитная энергия катушки? Как частоты изменения во времени этих энергий связаны с частотой осциллятора?

9. Поясните принципы метода наименьших квадратов (МНК) в обработке экспериментальных данных.

10. Почему в данной работе не следует использовать катушку индуктивности с ферромагнитным сердечником?

Список используемой литературы

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев; М.: Наука, 1986. Т. 2: Электричество. 442с. и последующие издания.

2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин; М.: Наука, 1985. Т.3: Электричество. 703с. и последующие издания.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 3474 от «1» ноября 2018 г. Тираж 50 экз.