ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«Перспективные материалы с иерархической структурой
для новых технологий и надежных конструкций»**

**X МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«Химия нефти и газа»**

Томск

Издательский Дом ТГУ

2018

DOI: 10.17223/9785946217408/350

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СТРУКТУРНЫМ ПАРАМЕТРОМ И АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.

Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Новосибирск

Материалы, обладающие внутренней структурой, широко используются в современной технике и технологиях [1,2]. Для учета влияния внутренней структуры применяются различные подходы, например, использование в математических моделях дополнительных внутренних переменных [3,4], применение методов неархимедового математического анализа [5], использование моделей дискретных элементов [6,7], различных нелокальных, микрополярных моделей [8,9] и др. В настоящей работе рассматривается модель линейной теории упругости со структурным параметром [10,11].

На основе [10] для дискретного набора упругих частиц, заполняющих расчетную область, строится система определяющих соотношений. В плоском случае она содержит пять независимых уравнений. Классическая линейная теория упругости содержит только три уравнения. Оставшиеся два уравнения содержатся в постулате о диффеоморфизме [12] – предположении о гладкости поля смещений, и явно в классической теории не формулируются. Отказ от требования гладкости поля смещений означает учет локальных изгибов элементарных объемов среды, и два дополнительных уравнения необходимо сформулировать явно. При этом в модели появляется структурный параметр, описывающий локальные изгибы. Связь смещений u_i и напряжений t_{ij} имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_1(A_i) - u_1(C_i)}{2r} &= \frac{1}{E} \left(\frac{t_{11}(A_i) + t_{11}(C_i)}{2} - \nu \frac{t_{22}(B_i) + t_{22}(D_i)}{2} \right), \\ \frac{u_2(B_i) - u_2(D_i)}{2r} &= \frac{1}{E} \left(\frac{t_{22}(B_i) + t_{22}(D_i)}{2} - \nu \frac{t_{11}(A_i) + t_{11}(C_i)}{2} \right), \\ \frac{u_2(A_i) - u_2(C_i)}{2r} + \frac{u_1(B_i) - u_1(D_i)}{2r} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{t_{12}(A_i) + t_{12}(C_i) + t_{21}(B_i) + t_{21}(D_i)}{4}, \quad i = \overline{1, N} \\ \frac{u_1(A_i) + u_1(C_i)}{2} - \frac{u_1(B_i) + u_1(D_i)}{2} &= \xi \left(\frac{t_{11}(A_i) - t_{11}(C_i)}{2r} - \frac{t_{21}(B_i) - t_{21}(D_i)}{2r} \right), \\ -\frac{u_2(A_i) + u_2(C_i)}{2} + \frac{u_2(B_i) + u_2(D_i)}{2} &= \xi \left(-\frac{t_{12}(A_i) - t_{12}(C_i)}{2r} + \frac{t_{22}(B_i) - t_{22}(D_i)}{2r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где E, ν – упругие модуль Юнга и коэффициент Пуассона, r – радиус частиц, ξ – структурный параметр, он имеет размерность [кв.м./Па]. В случае $\xi = 0$ получаем дискретный аналог классической теории упругости, при $\xi \neq 0$ – аналог модели линейной теории упругости со структурным параметром. В дифференциальном приближении определяющие уравнения связывают макродеформации с напряжениями и вторыми производными напряжений по координатам [10].

Уравнения (1) вкпе с дискретными аналогами уравнений равновесия и краевых условий образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений высокого порядка [13]. Решение последней осуществляется численно методом Гаусса.

Рассмотрим задачу об одноосном растяжении пластины с эллиптическим вырезом, большая ось которого ориентирована ортогонально направлению растяжения. В упругой постановке эта задача имеет аналитическое решение [14]. Максимальная концентрация напряжений достигается в точках пересечения эллиптического выреза и его большой оси и равна $c = 1 + 2a/b$, где a, b – полуоси эллипса.

Численное решение на основе рассмотренной модели со структурным параметром в случае $\xi = 0$ (при соотношении полуосей $a/b = 1.5$) дает решение, совпадающее с аналитическим – максимальная концентрация напряжений равна $c = 4$.

Численные расчеты показывают, что при последовательном увеличении структурного параметра все большее влияние начинают оказывать локальные изгибы. Это приводит к расширению области влияния эллиптического выреза. Однако сама величина концентрации напряжений при этом снижается. Иными словами, максимальные напряжения, изначально сосредоточенные в отдельных точках, «размазываются» по пластине. В таблице 1 приведены значения максимальной концентрации в зависимости от значений структурного параметра:

Таблица 1.

Зависимость максимальной концентрации напряжений от величины структурного параметра.

ξ	0	$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
c	4.00	3.70	3.60	3.10	2.65	2.61	2.60

Дальнейшее увеличение параметра ξ уже слабо влияет на распределение напряжений в пластине и, соответственно, на величину максимальной концентрации.

Таким образом, отказ от гладкости поля перемещений в линейной теории упругости приводит к появлению в математической модели структурного параметра, описывающего локальные изгибы. Учет локальных изгибов влечет снижение максимальной концентрации напряжений в деформируемом теле за счет «размазывания» локальных максимумов на больший объем тела.

Исследование выполнено за счет средств Российского научного фонда, проект № 16-17-10121.

Литература

1. Панин В.Е. Физическая мезомеханика материалов / отв. ред. С.Г.Псахье. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2015. – т. 1,2. – 462с., 464 с.
2. Механика – от дискретного к сплошному. Под ред. акад. В.М.Фомина. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2008, 343с.
3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990, 223с.
4. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Моделирование процессов деформирования самонапряженных образцов горных пород // ФТПРПИ. – 2017. – № 1. – с 15-24.
5. Лавриков С.В., Микенина О.А., Ревуженко А.Ф. Моделирование процессов деформирования массива горных пород с использованием методов неархимедового анализа // ФТПРПИ. – 2008. - № 1. – с. 3-16.
6. Lavrikov S.V., Revuzhenko A.F. DEM code-based modeling of energy accumulation and release in structurally heterogeneous rock masses / AIP Conference Proceedings 1683 (2015) 020121
7. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. Численное моделирование процесса накопления и высвобождения упругой энергии в структурно-неоднородных геоматериалах // ФТПРПИ. – 2016. - № 4. – с. 22-28.
8. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975, 415с.
9. Эринген А.К. Теория микрополяриной упругости. М.: Мир, 1975, т. 2, с. 646-752.
10. Ревуженко А.Ф. Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // ПМТФ. – 2016. – № 5. – с. 45-52.
11. Микенина О.А., Ревуженко А.Ф. Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. – 2018. – № 2. – с. 167-176.
12. Трусков П.В. Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // Мат. моделирование систем и процессов. – 2009. – № 17. – с.85-95.
13. Lavrikov S.V., Revuzhenko A.F. Effect of structural parameter on stress concentration in linearly elastic body / AIP Conference Proceedings 1893 (2017) 030122.
14. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: изд-во Самарский университет, 2001. – 534с.