ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 60, № 12 ФИЗИКА 2017

УДК 530.145

В.А. АБАКУМОВА, Д.С. КАПАРУЛИН, С.Л. ЛЯХОВИЧ

ОГРАНИЧЕННЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН В РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ЧЕРНА – САЙМОНСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА*

Рассматривается проблема построения альтернативных гамильтоновых формулировок в расширенной теории Черна – Саймонса с высшими производными. Показано, что расширенная теория четвёртого порядка допускает четырёхпараметрическое семейство альтернативных гамильтонианов, которые могут быть ограничены снизу, даже если каноническая энергия модели снизу не ограничена.

***Ключевые слова**: теории с высшими производными, неустойчивость Остроградского, расширенная теория Черна – Саймонса.*

Введение

Расширенная теория Черна – Саймонса с высшими производными представляет собой класс теорий векторного поля $A = A_\mu dx^\mu$ на $3d$-пространстве Минковского, описываемый функционалом действия

$$S[A] = \frac{1}{2}\int *A \wedge (\alpha_0 m^2 A + \alpha_1 m * dA + \alpha_2 * d * dA + \alpha_3 m^{-1} * d * d * dA + \ \dots), \tag{1}$$

где d – дифференциал де Рама; $*$ – оператор Ходжа; $\wedge$ – внешнее умножение; m – константа, имеющая размерность массы. Безразмерные константы α_0, α_1, α_2, α_3, … являются параметрами теории. Уравнения Эйлера – Лагранжа, соответствующие действию (1), имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta A} \equiv \alpha_0 m^2 A + \alpha_1 m * dA + \alpha_2 * d * dA + \alpha_3 m^{-1} * d * d * dA + \ \dots = 0. \tag{2}$$

Действие (1), в зависимости от входящих в него параметров, описывает многие известные модели, включая теорию Черна – Саймонса – Прока [1, 2], топологически массивную калибровочную теорию [3, 4], модель Максвелла – Черна – Саймонса – Прока [5, 6], электродинамику Ли – Вика [7, 8] и др. В настоящей работе изучается расширенная теория Черна – Саймонса 4-го порядка, т.е. когда $\alpha_4 = 1$, $\alpha_0 = \alpha_5 = \alpha_6 = \dots = 0$. Это наиболее общее калибровочно-инвариантное расширение 4-го порядка.

Расширенная теория Черна – Саймонса, как и многие другие теории с высшими производными, сталкивается с известной трудностью, заключающейся в неограниченности снизу канонической энергии, что приводит к неустойчивости динамики теории как на классическом, так и на квантовом уровне. Возможное решение данной проблемы состоит в построении альтернативных гамильтоновых формулировок теории, допускающих ограниченные снизу гамильтонианы. Впервые альтернативные гамильтоновы формулировки в контексте изучения проблемы устойчивости динамики с высшими производными были получены в теории осциллятора Пайса – Уленбека [9, 10].

В работе [11] было показано, что достаточно широкий класс теорий с высшими производными допускает семейства альтернативных законов сохранения, не сводящихся к закону сохранения канонической энергии-импульса. Эти семейства могут содержать ограниченные снизу законы сохранения и способны стабилизировать динамику даже в тех случаях, когда каноническая энергия модели не ограничена снизу. Более того, каждая альтернативная сохраняющаяся величина может быть связана с инвариантностью теории относительно пространственно-временных трансляций в рамках обобщения теоремы Нётер [12] на основе концепции лагранжева якоря [13]. Последнее обстоятельство позволяет ожидать существование семейства альтернативных тензоров энергии-импульса в данном классе моделей. В формализме первого порядка каждый лагранжев якорь оп-

* Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России, проект № 3.9594.2017/8.9.

ределяет некоторую скобку Пуассона, а соответствующая якорю энергия, выраженная как функция фазовых переменных, является гамильтонианом, отвечающим данной скобке [14]. С этой точки зрения существование нескольких различных законов сохранения и нескольких неэквивалентных лагранжевых якорей, связывающих эти сохраняющиеся величины с трансляцией по времени, указывает на наличие семейства гамильтоновых формулировок, задающих одну и ту же классическую динамику, т.е. как мультигамильтоновость теории.

Теория (1) калибровочно-инвариантна, следовательно, в гамильтоновом формализме должны присутствовать связи. Поясним, что мы имеем в виду под мультигамильтоновой формулировкой для системы со связями. Прежде всего, заметим, что уравнения движения, содержащие высшие производные, сводятся к уравнениям 1-го порядка путём введения дополнительных переменных, поглощающих производные по времени более высоких порядков. Среди уравнений движения могут содержаться как уравнения эволюционного типа, так и алгебраические выражения, представляющие собой связи Θ_A. Уравнения первого порядка называются мультигамильтоновыми, если существует k-параметрическое семейство гамильтонианов $H(\beta\phi,\nabla\phi,\nabla^2\phi,\nabla^3\phi,...)$ и скобок Пуассона $\{\phi^a(\boldsymbol{x}),\phi^b(\boldsymbol{y})\}_\beta$ с постоянными параметрами $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, где ∇ означает производные по пространственным переменным, так что для любых значений β имеются следующие гамильтоновы уравнения движения:

$$\dot{\phi}^a = \{\phi^a, H_T(\beta)\}_\beta\,, \tag{3}$$

$$H_T(\beta) = H(\beta,\phi,\nabla\phi,\nabla^2\varphi,\nabla^3\phi,...) + \lambda^A\Theta_A(\phi,\nabla\phi,\nabla^2\varphi,\nabla^3\phi,...), \quad \Theta_A(\phi,\nabla\phi,\nabla^2\varphi,\nabla^3\phi,...) = 0. \tag{4}$$

Правая часть уравнений движения (3), в отличие от полного гамильтониана $H_T(\beta)$ и скобок Пуассона, не зависит от параметров β. Другими словами, изменяя параметры β, можно добиться одновременного изменения гамильтониана и скобки Пуассона при неизменных уравнениях движения.

Устойчивость расширенной теории Черна – Саймонса рассматривалась в работах [15, 16]. В частности, в [15] было показано, что расширенная теория Черна – Саймонса (1) порядка n допускает n-параметрическое семейство симметричных сохраняющихся тензоров второго ранга. Также были найдены необходимые и достаточные условия существования ограниченного закона сохранения в этом семействе. В калибровочном расширении порядка n, являющемся предметом изучения в настоящей работе, один из сохраняющихся тензоров вырождается и число независимых сохраняющихся тензоров становится равным n–1. Путём подходящего выбора лагранжева якоря все тензоры в этом n–1-параметрическом семействе могут быть связаны с трансляцией по времени и, следовательно, могут пониматься как гамильтонианы теории по отношению к некоторой скобке Пуассона. Тем самым из общего формализма следует, что калибровочно-инвариантное расширение порядка n допускает n–1-параметрическое семейство альтернативных гамильтоновых формулировок.

Альтернативные гамильтоновы формулировки с ограниченными снизу гамильтонианами в калибровочно-инвариантной расширенной теории Черна – Саймонса 3-го порядка построены в работе [17]. Полученное семейство содержит два свободных параметра и, в зависимости от параметров модели, может допускать представителей с ограниченным снизу гамильтонианом, в то время как каноническая энергия модели не ограничена снизу во всех случаях.

В настоящей работе мы строим мультигамильтоновы формулировки в калибровочно-инвариантной расширенной теории Черна – Саймонса 4-го порядка. Мы в целом следуем процедуре, предложенной в [17], которая состоит из трёх основных шагов. Сначала вводятся дополнительные переменные, поглощающие производные исходных переменных. В результате данного шага приходим к системе уравнений 1-го порядка. Далее в качестве гамильтониана рассматриваемой теории выбирается её наиболее общая сохраняющаяся величина. Для калибровочных теорий гамильтониан может содержать также члены, пропорциональные связям. Затем находятся соответствующие полученному гамильтониану скобки Пуассона. Отметим, что альтернативная гамильтонова формулировка допускает введение взаимодействия, согласованного с условием ограниченности гамильтониана. В работе [17] были построены такие взаимодействия для расширенной теории Черна – Саймонса 3-го порядка.

Работа организована следующим образом; в п. 1 рассматривается расширенная теория Черна – Саймонса 4-го порядка, вводятся необходимые обозначения; п. 2 посвящен нахождению семейства сохраняющихся тензоров теории, линейная комбинация которых понимается как гамильтониан теории на уравнениях движения; в п. 3 проводится построение альтернативных гамильтоновых формулировок для рассматриваемой модели в соответствии с изложенным выше алгоритмом, анализируются условия ограниченности снизу полученных гамильтонианов. Заключение содержит краткое изложение результатов работы.

1. Расширенная теория Черна – Саймонса 4-го порядка

Рассмотрим модель, описываемую функционалом действия, определённым на $3d$-пространстве Минковского с локальными координатами x^μ, $\mu = 0, 1, 2$:

$$S[A]=\frac{1}{2}\int *A\wedge(\alpha_1 m*dA+\alpha_2*d*dA+\alpha_3 m^{-1}*d*d*dA+m^{-2}*d*d*d*dA)\,. \tag{5}$$

Параметрами данной модели являются вещественные числа α_1, α_2, α_3. Соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа записываются в виде

$$\frac{\delta S}{\delta A}\equiv(\alpha_1 m*d+\alpha_2*d*d+\alpha_3 m^{-1}*d*d*d+m^{-2}*d*d*d*d)A=0. \tag{6}$$

Очевидно, что рассматриваемая теория допускает стандартное калибровочное преобразование симметрии.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}F_\mu\equiv\varepsilon_{\mu\rho\nu}\partial^\rho A^\mu=(*dA)_\mu,\qquad G_\mu\equiv\partial_\mu\partial^\nu A_\nu-\Box A_\mu=(*d*dA)_\mu,\\ K_\mu\equiv-\Box\varepsilon_{\mu\rho\nu}\partial^\rho A^\nu=(*d*d*dA)_\mu,\qquad \varepsilon_{012}=1.\end{gathered} \tag{7}$$

В данной работе используется метрика Минковского $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$.

2. Законы сохранения

Теория, описываемая действием (5), допускает трёхпараметрическое семейство сохраняющихся тензоров вида

$$T_{\mu\nu}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\beta_1(T_1)_{\mu\nu}+\beta_2(T_2)_{\mu\nu}+\beta_3(T_3)_{\mu\nu}, \tag{8}$$

где β_1, β_2, β_3 – параметры данного семейства. В обозначениях (7) явные выражения для $(T_a)_{\mu\nu}$, $a = 1, 2, 3$, записываются в следующем виде:

$$\begin{gathered}(T_1)_{\mu\nu}=\alpha_2(F_\mu F_\nu-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}F^\rho F_\rho)+\alpha_3 m^{-1}(F_\mu G_\nu+F_\nu G_\mu-\eta_{\mu\nu}F^\rho G_\rho)+\\ +m^{-2}(G_\mu G_\nu-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}G^\rho G_\rho+F_\mu K_\nu+F_\nu K_\mu-\eta_{\mu\nu}F^\rho K_\rho),\\ (T_2)_{\mu\nu}=-\alpha_1(F_\mu F_\nu-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}F^\rho F_\rho)+\alpha_3 m^{-2}(G_\mu G_\nu-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}G^\rho G_\rho)+\\ +m^{-3}(G_\mu K_\nu+G_\nu K_\mu-\eta_{\mu\nu}G^\rho K_\rho),\\ (T_3)_{\mu\nu}=-\alpha_1(F_\mu G_\nu+F_\nu G_\mu-\eta_{\mu\nu}F^\rho G_\rho)-\alpha_2 m^{-2}(G_\mu G_\nu-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}G^\rho G_\rho)+\\ +m^{-4}(K_\mu K_\nu-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}K^\rho K_\rho).\end{gathered} \tag{9}$$

Далее нам потребуется 00-компонента тензора $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{gathered}T_{00}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{2}[\beta_3 m^{-4}K_\mu K_\mu+2\beta_2 m^{-3}K_\mu G_\mu+2\beta_1 m^{-2}K_\mu F_\mu+(\beta_1+\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)m^{-2}G_\mu G_\mu+\\ +2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)m^{-2}F_\mu G_\mu+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)F_\mu F_\mu],\end{gathered} \tag{10}$$

суммирование по повторяющемуся на одном уровне индексу подразумевается. Эта величина, в зависимости от значений параметров β_a, $a = 1, 2, 3$, может быть как ограничена, так и не ограничена снизу. Выражение для T_{00} представляет собой квадратичную форму переменных F_μ, G_μ, K_μ. Используя критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы, получаем следующие условия ограниченности снизу закона сохранения $T_{00}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\beta_3>0,\quad (\alpha_2^3-\alpha_2)\beta_1^2+\alpha_1\alpha_3\beta_2^2+\alpha_1^2\beta_3^2+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_1\beta_2+(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)\beta_1\beta_3-\alpha_1\alpha_2\beta_2\beta_3<0,$$

$$\begin{gathered}\beta_1^3-\alpha_1\beta_2^3+\alpha_1^2\beta_3^3-\alpha_3\,\beta_1^2\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1^2\beta_3+\alpha_2\beta_2^2\beta_1+\alpha_1\alpha_3\beta_2^2\beta_3+(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2\beta_1-\\ -\alpha_1\alpha_2\beta_3^2\beta_2+(3\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_1\beta_2\beta_3<0.\end{gathered}\tag{11}$$

Сохраняющиеся тензоры определены с точностью до добавления членов, исчезающих на массовой оболочке. Поэтому каждый сохраняющийся тензор задает класс эквивалентности сохраняющихся величин, совпадающих на массовой оболочке и отличающихся вне её. Мы учитываем эту неопределённость, поскольку она полезна при построении мультигамильтоновой формулировки, рассматриваемой в следующем пункте. Поскольку уравнения (6) допускают билинейные по полям калибровочно-инвариантные сохраняющиеся тензоры, то логично рассмотреть семейство законов сохранения с точностью до исчезающих на массовой оболочке вкладов. Наиболее общий калибровочно-инвариантный билинейный по полям и симметричный представитель класса эквивалентности сохраняющегося тензора (8) имеет вид

$$\begin{gathered}T_{\mu\nu}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6)=T_{\mu\nu}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)+\frac{\beta_4}{2}m^{-1}\left(F_\mu\frac{\delta S}{\delta A^\nu}+F_\nu\frac{\delta S}{\delta A^\mu}\right)+\\ +\frac{\beta_5}{2}m^{-2}\left(G_\mu\frac{\delta S}{\delta A^\nu}+G_\nu\frac{\delta S}{\delta A^\mu}\right)+\frac{\beta_6}{2}m^{-3}\left(K_\mu\frac{\delta S}{\delta A^\nu}+K_\nu\frac{\delta S}{\delta A^\mu}\right).\end{gathered}\tag{12}$$

Параметры β_4, β_5, β_6 определяют представителя в одном и том же классе эквивалентности сохраняющихся тензоров, в то время как β_1, β_2, β_3 определяют класс эквивалентности сохраняющейся величины как таковой. Далее 00-компонента сохраняющего тензора $T_{\mu\nu}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6)$ будет выбрана в качестве гамильтониана теории.

3. Мультигамильтонова формулировка

Перейдём от уравнений движения (6) к уравнениям первого порядка. Производные по времени x^0 переменных A_0 не содержатся в уравнениях. В качестве дополнительных переменных, поглощающих производные по времени переменных A_i, выбираем калибровочно-инвариантные величины F_i, G_i, K_i, $i=1,2$:

$$\begin{gathered}F_i=\varepsilon_{ij}(\dot A_j-\partial_jA_0),\qquad G_i=-\ddot A_i+\partial_i\dot A_0+\partial_j\,(\partial_jA_i-\partial_iA_j),\\ K_i=\varepsilon_{ij}[\partial_k\partial_k(\dot A_j-\partial_jA_0)-\dddot A_j+\partial_j\ddot A_0],\qquad i,j=1,2,\end{gathered}\tag{13}$$

где $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{0ij}$ – $2d$-символ Леви-Чивиты. Подставляя эти переменные в (6), получаем следующие уравнения движения 1-го порядка в терминах A_μ, F_i, G_i, K_i:

$$\begin{gathered}\dot A_i=\partial_iA_0-\varepsilon_{ij}F_j,\qquad \dot F_i=\varepsilon_{ij}[\partial_k(\partial_kA_j-\partial_jA_k)-G_j],\\ \dot G_i=\varepsilon_{ij}[\partial_k(\partial_kF_j-\partial_jF_k)-K_j],\qquad \dot K_i=\varepsilon_{ij}[\partial_k(\partial_kG_j-\partial_jG_k)+m^2(\alpha_3m^{-1}K_j+\alpha_2G_j+\alpha_1mF_j)];\end{gathered}\tag{14}$$

$$\Theta\equiv\varepsilon_{ij}\partial_i(m^{-2}K_j+\alpha_3m^{-1}G_j+\alpha_2F_j+\alpha_1mA_j)=0.\tag{15}$$

В терминах полей F, G, K уравнения (14) представляют собой пространственные компоненты уравнений движения (6) в формализме 1-го порядка. Нулевая компонента исходных уравнений движения представляет собой связь (15), не содержащую производных по времени. Связь Θ на уравнениях движения сохраняется во времени, следовательно, вторичных связей не возникает. Уравнения (14), (15) эквивалентны исходным уравнениям 4-го порядка (6).

Полученные уравнения инвариантны относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\delta_\xi A_0=\partial_0\xi(x),\qquad \delta_\xi A_i=\partial_i\xi(x),\qquad \delta_\xi F_i=\delta_\xi G_i=\delta_\xi K_i=0,\tag{16}$$

где $\xi=\xi(x)$ – произвольная функция, являющаяся параметром калибровочного преобразования. Поле A_0 естественно рассматривать как множитель Лагранжа при связи Θ.

В формализме 1-го порядка 00-компонента сохраняющегося тензора (8) записывается в виде

$$T_{00}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{2}\{\beta_3 m^{-4}[\partial_i G_j(\partial_i G_j-\partial_j G_i)+(K_i)^2]+2\beta_2 m^{-3}[\partial_i G_j(\partial_i F_j-\partial_j F_i)+K_i G_i]+$$
$$+2\beta_1 m^{-2}[\partial_i G_j(\partial_i A_j-\partial_j A_i)+K_i F_i]+(\beta_1+\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)m^{-2}[\partial_i F_j(\partial_i F_j-\partial_j F_i)+(G_i)^2]+ \quad (17)$$
$$+2(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)m^{-2}[\partial_i F_j(\partial_i A_j-\partial_j A_i)+G_i F_i]+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)[\partial_i A_j(\partial_i A_j-\partial_j A_i)+(F_i)^2]\}.$$

Данная величина рассматривается как гамильтониан теории на уравнениях движения. Полный гамильтониан $H_T(\beta,\gamma)$ понимается как сумма (17) и выражения, пропорционального связям. Выберем следующий анзац для полного гамильтониана теории:

$$H_T(\beta,\gamma)=T_{00}(\beta)+[\beta_4(\beta,\gamma)\, m^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j+\beta_5(\beta,\gamma)\, m^{-2}\varepsilon_{ij}\partial_i F_j+$$
$$+\beta_6(\beta,\gamma)\, m^{-3}\varepsilon_{ij}\partial_i G_j+\beta_7(\beta,\gamma)A_0]\Theta, \quad (18)$$

где

$$\beta_4(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_3^3+\beta_1^2\beta_2-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\beta_2^2-\alpha_3(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)\beta_3^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+$$
$$+\frac{\alpha_3^2\beta_1\beta_2\beta_3+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\beta_5(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_2^2\beta_3^3-\alpha_3\beta_2^3+\beta_1^2\beta_3+(\alpha_2+\alpha_3^2)\beta_2^2\beta_3+(\alpha_1\beta_2-2\alpha_2(\beta_1+\alpha_3\beta_2))\beta_3^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+ \quad (19)$$
$$+\frac{\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\beta_6(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_1\beta_3^3-\beta_2^3+\alpha_3\beta_2^2\beta_3-(\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2)\beta_3^2+2\beta_1\beta_2\beta_3+\alpha_3\beta_1\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\beta_7(\beta,\gamma)=\frac{\Delta}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma};$$

$$\Delta\equiv\beta_1^3-\alpha_1\beta_2^3+\alpha_1^2\beta_3^3-\alpha_3\,\beta_1^2\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1^2\beta_3+\alpha_2\beta_2^2\beta_1+\alpha_1\alpha_3\beta_2^2\beta_3+$$
$$+(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2\beta_1-\alpha_1\alpha_2\beta_3^2\beta_2+(3\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_1\beta_2\beta_3, \quad (20)$$

$\beta\equiv\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma$ – постоянные параметры. С учётом связи (15), величины $H_T(\beta,\gamma)$ и $T_{00}(\beta)$ совпадают, поэтому они ограничены или не ограничены снизу одновременно. Таким образом, условия (11) ограниченности $T_{00}(\beta)$ являются условиями ограниченности снизу полного гамильтониана (18).

Отметим, что добавление к гамильтониану членов, содержащих связи, не меняет уравнений движения для калибровочно-инвариантных величин. Однако оно может влиять на уравнения для не калибровочно-инвариантных переменных, к которым в нашем случае относится исходное векторное поле A_μ. Для того чтобы полученные гамильтониан и скобки Пуассона в точности воспроизводили исходные уравнения движения (14), мы вводим параметр γ, контролирующий множитель при связи в выражении для полного гамильтониана (18).

Перейдем к рассмотрению скобок Пуассона полей A_i, F_i, G_i, K_i, $i=1,2$. Используя выражения (17), (18), а также правые части уравнений (14), получаем систему линейных алгебраических уравнений, определяющих семейство скобок Пуассона:

$$\{A_i,H_T(\beta,\gamma)\}_{\beta,\gamma}=\partial_i A_0-\varepsilon_{ij}F_j,\qquad \{F_i,H_T(\beta,\gamma)\}_{\beta,\gamma}=\varepsilon_{ij}[\partial_k(\partial_k A_j-\partial_j A_k)-G_j],$$
$$\{G_i,H_T(\beta,\gamma)\}_{\beta,\gamma}=\varepsilon_{ij}[\partial_k(\partial_k F_j-\partial_j F_k)-K_j], \quad (21)$$
$$\{K_i,H_T(\beta,\gamma)\}_{\beta,\gamma}=\varepsilon_{ij}[\partial_k(\partial_k G_j-\partial_j G_k)+m^2(\alpha_3 m^{-1}K_j+\alpha_2 G_j+\alpha_1 m F_j)].$$

Явные выражения для скобок Пуассона, определяемых данными уравнениями, имеют вид

$$\{K_i(\boldsymbol{x}),K_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{KK}(\beta)}{\Delta}m^5\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\qquad \{G_i(\boldsymbol{x}),K_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{GK}(\beta)}{\Delta}m^4\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{F_i(\boldsymbol{x}),K_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{FK}(\beta)}{\Delta}m^3\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad \{A_i(\boldsymbol{x}),K_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{AK}(\beta)}{\Delta}m^2\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$\{G_i(\boldsymbol{x}),G_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{GG}(\beta)}{\Delta}m^3\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad \{F_i(\boldsymbol{x}),G_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{FG}(\beta)}{\Delta}m^2\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\tag{22}$$
$$\{A_i(\boldsymbol{x}),G_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{AG}(\beta)}{\Delta}m\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad \{F_i(\boldsymbol{x}),F_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{FF}(\beta)}{\Delta}m\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$\{A_i(\boldsymbol{x}),F_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\omega_{AF}(\beta)}{\Delta}\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad \{A_i(\boldsymbol{x}),A_j(\boldsymbol{y})\}_{\beta,\gamma}=\frac{\gamma}{\Delta}m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

где

$$\omega_{KK}(\beta)=(\alpha_1-2\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^3)\beta_1^2+\alpha_1(\alpha_3^2-\alpha_2)\beta_2^2+\alpha_1^2\alpha_3\beta_3^2+(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2-\alpha_2\alpha_3^2)\beta_1\beta_2+$$
$$+\alpha_3(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)\beta_1\beta_3+\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3,$$
$$\omega_{GK}(\beta)=(\alpha_2-\alpha_3^2)\beta_1^2-\alpha_1\alpha_3\beta_2^2-\alpha_1^2\beta_3^2-(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_1\beta_2-(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)\beta_1\beta_3+\alpha_1\alpha_2\beta_2\beta_3,$$
$$\omega_{FK}(\beta)=\omega_{GG}(\beta)=\alpha_3\beta_1^2+\alpha_1\beta_2^2-\alpha_2\beta_1\beta_2-\alpha_1\beta_2\beta_3,\tag{23}$$
$$\omega_{AK}(\beta)=\omega_{FG}(\beta)=-\beta_1^2+\alpha_2\beta_1\beta_3-\alpha_1\beta_2\beta_3,$$
$$\omega_{AG}(\beta)=\omega_{FF}(\beta)=\alpha_1\beta_3^2+\beta_1\beta_2-\alpha_3\beta_1\beta_3,$$
$$\omega_{AF}(\beta)=-\beta_2^2-\alpha_2\beta_3^2+\beta_1\beta_3+\alpha_3\beta_2\beta_3.$$

Отметим, что параметр γ, контролирующий член, содержащий связи, в гамильтониане (18), определяет скобку Пуассона между компонентами A_i. Этот параметр не даёт вклад в скобки Пуассона между физически наблюдаемыми переменными, являющимися функциями от калибровочно-инвариантных величин, и поэтому может рассматриваться как вспомогательный.

Для любых значений параметров β, γ скобки Пуассона (22) образуют невырожденный тензор. Обратный к нему представляет собой симплектическую 2-форму, порождающую следующее семейство функционалов действия:

$$S(\beta,\gamma)=\int\{(\Omega_{AA}(\beta,\gamma)mA_i+2\Omega_{FA}(\beta,\gamma)F_i+2\Omega_{GA}(\beta,\gamma)m^{-1}G_i+2\Omega_{KA}(\beta,\gamma)m^{-2}K_i)\varepsilon_{ij}\dot{A}_j+$$
$$+(\Omega_{FF}(\beta,\gamma)m^{-1}F_i+2\Omega_{GF}(\beta,\gamma)m^{-2}G_i+2\Omega_{KF}(\beta,\gamma)m^{-3}K_i)\varepsilon_{ij}\dot{F}_j+\tag{24}$$
$$+(\Omega_{GG}(\beta,\gamma)m^{-3}G_i+2\Omega_{KG}(\beta,\gamma)m^{-4}K_i)\varepsilon_{ij}\dot{G}_j+\Omega_{KK}(\beta,\gamma)m^{-5}K_i\varepsilon_{ij}\dot{K}_j-H_T(\beta,\gamma)\}d^3x,$$

где

$$\Omega_{AA}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_1\Delta}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$
$$\Omega_{FA}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_2\Delta}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$
$$\Omega_{GA}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_3\Delta}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$
$$\Omega_{KA}(\beta,\gamma)=\frac{\Delta}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$
$$\Omega_{FF}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_3\beta_1^3+\alpha_1^2\alpha_3\beta_3^3+[(\alpha_2-\alpha_3^2)\beta_2+(\alpha_1-2\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^3)\beta_3]\beta_1^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+$$
$$+\frac{[2\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3^2)\beta_1-\alpha_1^2\beta_2]\beta_3^2+2\alpha_1\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3+[(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_1-\alpha_1\alpha_2\beta_2+\alpha_1^2\beta_3]\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\Omega_{GF}(\beta,\gamma)=\frac{\beta_1^3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3^3+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_3\beta_1^2+[(\alpha_2-\alpha_3^2)\beta_1+\alpha_1\alpha_3\beta_3]\beta_2^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+$$

$$+\frac{[(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3^2)\beta_1-\alpha_1\alpha_3^2\beta_2]\beta_3^2+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^3)\beta_1\beta_2\beta_3+[(\alpha_2\alpha_3-\alpha_1)\beta_1-\alpha_1\alpha_3\beta_2]\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}, \quad (25)$$

$$\Omega_{KF}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_1\alpha_2\beta_3^3+\beta_1^2\beta_2-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\beta_2^2-\alpha_3(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\beta_3^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+$$

$$+\frac{\alpha_3^2\beta_1\beta_2\beta_3+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\Omega_{GG}(\beta,\gamma)=\frac{(\alpha_2-\alpha_3^2)\beta_2^3+\alpha_2^2\alpha_3\beta_3^3+(\beta_2+\alpha_3\beta_3)\beta_1^2-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\beta_2^2-2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_3^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+$$

$$+\frac{\alpha_2(\alpha_2-2\alpha_3^2)\beta_2\beta_3^2+2(\alpha_3^2-\alpha_2)\beta_1\beta_2\beta_3+[\alpha_3^2\beta_1-\alpha_1(\beta_2+\alpha_3\beta_3)]\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\Omega_{KG}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_2^2\beta_3^3-\alpha_3\beta_2^3+\beta_3\beta_1^2+(\alpha_2+\alpha_3^2)\beta_3\beta_2^2-[2\alpha_2\beta_1-(\alpha_1-2\alpha_2\alpha_3)\beta_2]\beta_3^2}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma}+$$

$$+\frac{\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$$\Omega_{KK}(\beta,\gamma)=\frac{\alpha_1\beta_3^3-\beta_2^3+\alpha_3\beta_3\beta_2^2-(\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2)\beta_3^2+2\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\gamma}{\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+(\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)\beta_3^2-\alpha_3\beta_1\beta_2+(\alpha_3^2-2\alpha_2)\beta_1\beta_3+(\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)\beta_2\beta_3-\alpha_1\gamma},$$

$H_T(\beta, \gamma)$ определяется выражением (18), Δ – формулой (20).

В случае, когда $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \gamma = 0$, мы получаем каноническое гамильтоново действие Остроградского для рассматриваемой модели:

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{Canonical}} &= \int\{\alpha_1 m A_i+2\alpha_2 F_i+2\alpha_3 m^{-1}G_i+2m^{-2}K_i)\varepsilon_{ij}\dot{A}_j+\\ &+(\alpha_3 m^{-1}F_i+2\alpha_2 m^{-2}G_{ii})\varepsilon_{ij}\dot{F}_j-A_0\Theta-(T_1)_{00}\}d^3x.\end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $(T_1)_{00}$ представляет собой 00-компоненту канонического тензора энергии-импульса. Формула (26) следует из (24) при любых значениях параметров $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ теории.

В случае, когда β_2, $\beta_3 \neq 0$, мы получаем семейство неканонических гамильтоновых действий, из которых тем не менее следуют те же исходные уравнения движения (6). Различные действия из семейства (24) не связаны между собой каноническими преобразованиями. Это очевидно по той причине, что гамильтонианы семейства (18) могут быть ограничены снизу, в то время как гамильтониан Остроградского не ограничен снизу всегда. Замены координат, переводящей неограниченный гамильтониан в ограниченный, не существует, что означает неэквивалентность рассматриваемых формулировок.

Заключение

В работе показано, что расширенная теория Черна – Саймонса 4-го порядка является мультигамильтоновой и допускает четырёхпараметрическое семейство альтернативных гамильтоновых формулировок, не эквивалентных канонической формулировке Остроградского. Среди найденных гамильтонианов имеются ограниченные снизу величины. Условие ограниченности снизу гамильтониана задается определенным диапазоном значений параметров, описывающих трёхпараметрическое семейство законов сохранения рассматриваемой калибровочной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Townsend P.K., Pilch K., and van Nieuwenhuizen P. // Phys. Lett. B. – 1984. – V. 136. – P. 38–42.
2. Deser S. and Jackiw R. // Phys. Lett. B. – 1984. – V. 139. – P. 371–373.
3. Deser S., Jackiw R., and Templeton S. // Ann. Phys. – 1982. – V. 140. – P. 372–411.
4. Deser S., Jackiw R., and Templeton S. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 48. – P. 975–978.
5. Banerjee R., Chakraborty B., and Scaria T. // Int. J. Mod. Phys. A. – 2001. – V. 16. – P. 3967–3989.
6. Deser S. and Tekin B. // Class. Quant. Grav. – 2002. – V. 19. – P. 97–100.
7. Lee T. and Wick G. // Nucl. Phys. B. – 1969. – V. 9. – P. 209–243.
8. Lee T. and Wick G. // Phys. Rev. D. – 1970. – V. 2. – P. 1033–1048.
9. Bolonek K. and Kosinski P. // Acta Phys. Polon. B. – 2005. – V. 36. – P. 2115–2131.
10. Damaskinsky E.V. and Sokolov M.A. // J. Phys. A. – 2006. – V. 39. – P. 10499.
11. Kaparulin D.S., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // Eur. Phys. J. C. – 2014. – V. 74. – P. 3072.
12. Kaparulin D.S., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // J. Math. Phys. – 2010. – V. 51. – P. 082902.
13. Kazinski P.O., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // JHEP. – 2005. – V. 0507. – P. 076.
14. Kaparulin D.S., Lyakhovich S.L., and Sharapov A.A. // J. Geom. Phys. – 2013. – V. 74. – P. 164–184.
15. Kaparulin D.S., Karataeva I.Yu., and Lyakhovich S.L. // Eur. Phys. J. C. – 2015. – V. 75. – P. 552.
16. Капарулин Д.С., Каратаева И.Ю., Ляхович С.Л. // Изв. вузов. Физика. – 2016. – Т. 59. – № 11. – С. 172–177.
17. Abakumova V.A., Kaparulin D.S., and Lyakhovich S.L. // arXiv:1711.07897 [hep-th].

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 03.07.17.

Абакумова Виктория Александровна, лаборантка лаб. теоретической и математической физики, e-mail: abakumova@phys.tsu.ru;

Капарулин Дмитрий Сергеевич, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. лаб. теоретической и математической физики, e-mail: dsc@phys.tsu.ru;

Ляхович Семен Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, гл. науч. сотр. лаб. теоретической и математической физики, e-mail:sll@phys.tsu.ru.