

УДК 517.977

DOI: 10.17223/19988605/44/2

К.Б. Мансимов, Ш.Ш. Сулейманова

**К ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УПРАВЛЕНИЙ
В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
СИСТЕМАМИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ**

Рассматривается одна задача оптимального управления с переменной структурой для системы, описываемой уравнением Гурса–Дарбу. При предположении открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Исследованы на оптимальность особые, в классическом смысле, управления.

Ключевые слова: система Гурса–Дарбу; особые в классическом смысле управления; необходимые условия оптимальности; вариация функционала; уравнения в вариациях.

К настоящему времени различные аспекты задач оптимального управления для систем, описываемых уравнениями Гурса–Дарбу, изучены в работах многих авторов, начиная с работы А.И. Егорова [1]. Довольно подробный обзор соответствующих результатов имеется, например, в [2–10] и др.

При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [11–14]. Далее, применяя модифицированный вариант метода приращений, предложенный и развитый в работах [1–10, 15–21] и др., для систем Гурса–Дарбу выведено довольно общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Отдельно изучен случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша (в классическом смысле особый случай [10, 13, 15, 20, 21]).

В отличие от работ [1–10], предлагаемая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления с переменной структурой для систем, описываемых уравнениями Гурса–Дарбу.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1 = [t_0, t_1] \times [x_0, X], \tag{2}$$

$$v(t, x) \in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2 = [t_1, t_2] \times [x_0, X],$$

$$z_{tx} = f(t, x, z, u), \quad (t, x) \in D_1, \tag{3}$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, X], \tag{4}$$

$$z(t, x_0) = b_1(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$y_{tx} = g(t, x, y, v), \quad (t, x) \in D_2, \tag{5}$$

$$y(t_1, x) = G(z(t_1, x)), \quad x \in [x_0, X], \tag{6}$$

$$y(t, x_0) = b_2(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$G(z(t_1, x_0)) = b_2(t_1).$$

Здесь $f(t, x, z, u)$, $(g(t, x, y, v))$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная в $D_1 \times R^n \times R^r$ ($D_2 \times R^m \times R^q$) вместе с частными производными по (z, u) ((y, v)) до второго порядка включительно,

$G(z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая в R^n m -мерная вектор-функция, $a(x)$, $b_i(t)$, $i=1,2$ – заданные вектор-функции соответствующих размерностей, удовлетворяющие условию Липшица с некоторыми константами, t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданы, причем $t_0 < t_1 < t_2$, $x_0 < X$, управляющие вектор-функции $u(t,x)$ ($v(t,x)$) всюду в дальнейшем считаются измеримыми по Лебегу на прямоугольнике D_1 (D_2), U (V) – заданное непустое, открытое и ограниченное множество.

Пару $(u(t,x), v(t,x))$ таких управляющих воздействий назовем допустимой.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $(u^\circ(t,x), v^\circ(t,x))$ краевые задачи (3)–(4) и (5)–(6) имеют единственное абсолютно непрерывное (в смысле [2, 3]) решение $z^\circ(t,x)$ и $y^\circ(t,x)$ соответственно.

Допустимое управление $(u^\circ(t,x), v^\circ(t,x))$, доставляющее минимум функционалу (1), при ограничениях (2)–(6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^\circ(t,x), v^\circ(t,x), z^\circ(t,x), y^\circ(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Вычисление вариаций функционала качества

Пусть $(u^\circ(t,x), v^\circ(t,x), z^\circ(t,x), y^\circ(t,x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t,x) = u^\circ(t,x) + \Delta u(t,x), \bar{v}(t,x) = v^\circ(t,x) + \Delta v(t,x), \bar{z}(t,x) = z^\circ(t,x) + \Delta z(t,x), \bar{y}(t,x) = y^\circ(t,x) + \Delta y(t,x))$ обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда ясно, что приращение $(\Delta z(t,x), \Delta y(t,x))$ состояния $(z^\circ(t,x), y^\circ(t,x))$ будет решением краевой задачи

$$\Delta z_{tx} = f(t, x, \bar{z}, \bar{u}) - f(t, x, z^\circ, u^\circ), \quad (t, x) \in D_1, \quad (7)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, \quad x \in [x_0, X], \quad (8)$$

$$\Delta z(t, x_0) = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (9)$$

$$\Delta y_{tx} = g(t, x, \bar{y}, \bar{v}) - g(t, x, y^\circ, v^\circ), \quad (t, x) \in D_2, \quad (9)$$

$$\Delta y(t_1, x) = \Delta G(z^\circ(t_1, x)) = G(\bar{z}(t_1, x)) - G(z^\circ(t_1, x)), \quad (10)$$

$$\Delta y(t, x_0) = 0, \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$G(z^\circ(t_1, x_0)) = b_2(t_1).$$

Через $\psi_i^\circ(t,x)$, $i=1,2$ обозначим пока неизвестные n и m -мерные вектор-функции соответственно. Умножая обе части соотношения (7) ((9)) слева скалярно на $\psi_1^\circ(t,x)$ ($\psi_2^\circ(t,x)$), а затем интегрируя по области D_1 (D_2) и вводя обозначения

$$H(t, x, z, u, \psi_1^\circ) = \psi_1^{\circ'} \cdot f(t, x, z, u), \quad M(t, x, y, v, \psi_2^\circ) = \psi_2^{\circ'} \cdot g(t, x, y, v),$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \psi_1^{\circ'}(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) - H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \right] dx dt, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \Psi_2^{\circ'}(t, x) \Delta y_{ix}(t, x) dx dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[M(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{v}(t, x), \Psi_2^{\circ}(t, x)) - M(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \Psi_2^{\circ}(t, x)) \right] dx dt. \quad (12)$$

Считая $\Psi_i^{\circ}(t, x)$, $i=1,2$ достаточно гладкими вектор-функциями и учитывая краевые условия (8), можно убедиться в (10) в справедливости тождеств

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \Psi_1^{\circ'}(t, x) \Delta z_{ix}(t, x) dx dt = \Psi_1^{\circ'}(t_1, X) \Delta z(t_1, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \Psi_1^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta z(t_1, x) dx -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Psi_1^{\circ'}(t, X)}{\partial t} \Delta z(t, X) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \Psi_1^{\circ'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z(t, x) dx dt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \Psi_2^{\circ'}(t, x) \Delta y_{ix}(t, x) dx dt = \Psi_2^{\circ'}(t_2, X) \Delta y(t_2, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t_2, x)}{\partial x} \Delta y(t_2, x) dx - \Psi_2^{\circ'}(t_1, X) \Delta y(t_1, X) +$$

$$+ \int_{x_0}^X \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta y(t_1, x) dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t, X)}{\partial t} \Delta y(t, X) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \Psi_2^{\circ'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta y(t, x) dx dt.$$

Поэтому с учетом тождеств (11), (12), а также того, что

$$\Delta y(t_1, x) = G(\bar{z}(t_1, x)) - G(z^{\circ}(t_1, x)),$$

формула для приращения критерия качества (1) записывается в виде:

$$\Delta S(u^{\circ}, v^{\circ}) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^{\circ}, v^{\circ}) = \left[\varphi_1(\bar{z}(t_1, X)) - \varphi_1(z^{\circ}(t_1, X)) \right] + \left[\varphi_2(\bar{y}(t_2, X)) - \varphi_2(y^{\circ}(t_2, X)) \right] +$$

$$+ \Psi_1^{\circ'}(t_1, X) \Delta z(t_1, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \Psi_1^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Psi_1^{\circ'}(t, X)}{\partial t} \Delta z(t, X) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \Psi_1^{\circ'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z(t, x) dx dt + \Psi_2^{\circ'}(t_2, X) \Delta y(t_2, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t_2, x)}{\partial x} \Delta y(t_2, x) dx - \Psi_2^{\circ'}(t_1, X) \Delta y(t_1, X) +$$

$$+ \int_{x_0}^X \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta y(t_1, x) dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t, X)}{\partial t} \Delta y(t, X) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \Psi_2^{\circ'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta y(t, x) dx dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \Psi_1^{\circ}(t, x)) - H(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \Psi_1^{\circ}(t, x)) \right] dx dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[M(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{v}(t, x), \Psi_2^{\circ}(t, x)) - M(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \Psi_2^{\circ}(t, x)) \right] dx dt. \quad (13)$$

Полагая

$$N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^{\circ}}{\partial x}, z(t_1, x)\right) = \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} y(t_1, x) = \frac{\partial \Psi_2^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} G(z(t_1, x)),$$

$$Q(\Psi_2^{\circ}, z(t_1, X)) = \Psi_2^{\circ'}(t_1, X) G(z(t_1, X))$$

и используя формулу Тейлора из (13), получим

$$\Delta S(u^{\circ}, v^{\circ}) = \frac{\partial \varphi_1(z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) + o_1(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_2(y^{\circ}(t_2, X))}{\partial z} \Delta y(t_2, X) + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^{\circ}(t_2, X))}{\partial y^2} \Delta y(t_2, X) + o_2(\|\Delta y(t_2, X)\|^2) +$$

$$\begin{aligned}
 & +\psi_1^{\circ}(t_1, X)\Delta z(t_1, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_1^{\circ}(t_1, x)}{\partial x} \Delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1^{\circ}(t, X)}{\partial t} \Delta z(t, X) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_1^{\circ}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z(t, x) dx dt + \\
 & +\psi_2^{\circ}(t_2, X)\Delta y(t_2, x) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_2^{\circ}(t_2, X)}{\partial x} \Delta y(t_2, x) dx - \frac{\partial Q(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) - \\
 & - \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) + o_3(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + \int_{x_0}^X \frac{\partial N' \left(x, \frac{\partial \psi_2^{\circ}}{\partial x}, z(t_1, x) \right)}{\partial z} \Delta z(t_1, x) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^X \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N \left(x, \frac{\partial \psi_2^{\circ}}{\partial x}, z(t_1, x) \right)}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) dx + \int_{x_0}^X o_4(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) dx - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi_2^{\circ}(t, X)}{\partial t} \Delta y(t, X) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_2^{\circ}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta y(t, X) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[H'_u(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta u(t, x) - H'_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) \right] dx dt - \quad (14) \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[M'_v(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta v(t, x) - M'_y(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta y(t, x) \right] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t, x) \times \right. \\
 & \times H_{uz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + \Delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\Delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta y(t, x) + 2 \Delta v'(t, x) \times \right. \\
 & \times M_{vy}(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta y(t, x) + \Delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta v(t, x) \left. \right] dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|^2) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X o_6(\|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta v(t, x)\|^2) dx dt.
 \end{aligned}$$

Если предполагать, что $\psi_i^{\circ}(t, x)$, $i=1, 2$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{\circ}(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial H(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x))}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi_1^{\circ}(t_1, x)}{\partial x} = - \frac{\partial N \left(x, \frac{\partial \psi_2^{\circ}}{\partial x}, z^{\circ}(t_1, x) \right)}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi_1^{\circ}(t_1, X)}{\partial t} = 0,$$

$$\psi_1^{\circ}(t_1, X) = - \frac{\partial \varphi_1(z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z} + \frac{\partial Q(\psi_2^{\circ}, z(t_1, X))}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{\circ}(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial M(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x))}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \psi_2^{\circ}(t_2, x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2^{\circ}(t, X)}{\partial t} = 0,$$

$$\Psi_2^\circ(t_2, X) = -\frac{\partial \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y}, \quad (18)$$

то формула приращения (14) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^\circ, v^\circ) = & -\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X H'_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \Delta u(t, x) dx dt - \\ & -\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X M'_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \Delta v(t, x) dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial z^2} \Delta y(t_2, X) - \\ & - \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^X \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \Delta z(t, x) + 2\Delta u'(t, x) \times \right. \\ & \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \Delta z(t, x) + \Delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \Delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\Delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \Delta y(t, x) + 2\Delta v'(t, x) \times \right. \\ & \times M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \Delta y(t, x) + \Delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \Delta v(t, x) \left. \right] dx dt + \\ & + o_1(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + o_2(\|\Delta y(t_2, X)\|^2) + o_3(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + \int_{x_0}^X o_4(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) dx - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|)^2 dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X o_6(\|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta v(t, x)\|)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Краевую задачу (15)–(18) назовем сопряженной системой в задаче оптимального управления (1)–(6).

Поскольку множества U и V открыты, то специальное приращение допустимого управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon \delta u(t, x), \\ \Delta v_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon \delta v(t, x). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине произвольное число, а $\delta u(t, x)$ и $\delta v(t, x)$ произвольные измеримые и ограниченные соответственно r и q -мерные вектор-функции со значениями из R^r и R^q соответственно.

Такие $\delta u(t, x)$ и $\delta v(t, x)$ назовем допустимыми вариациями управляющих функций $u^\circ(t, x)$ и $v^\circ(t, x)$ соответственно.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t, x; \varepsilon), \Delta y_\varepsilon(t, x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$, отвечающее приращению (20) управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$.

Из оценок, установленных, например, в [1–3], следует, что

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \|\Delta u(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (21)$$

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq L_2 \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \|\Delta v(\tau, s)\| ds d\tau + \|\Delta z(t_1, x)\| \right], \quad (22)$$

где $L_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$ – некоторое постоянное.

Из (22) с учетом (21) получаем, что

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq L_3 \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \|\Delta v(\tau, s)\| ds d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \|\Delta u(\tau, s)\| d\tau ds \right], \quad (23)$$

где $L_3 = \text{const} > 0$ – некоторое постоянное.

Из оценок (21), (23) следует, что $\|\Delta z(t, x; \varepsilon)\|$ и $\|\Delta y(t, x; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε .

А из краевых задач (7)–(10) получаем, что $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta z_{tx}(t, x; \varepsilon) = f_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \Delta z(t, x; \varepsilon) + \varepsilon f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \delta u(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (24)$$

$$\Delta z(t_0, x; \varepsilon) = 0, \quad \Delta z(t, x_0; \varepsilon) = 0, \quad (25)$$

$$\Delta y_{tx}(t, x; \varepsilon) = g_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \Delta y(t, x; \varepsilon) + \varepsilon g_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \delta v(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (26)$$

$$\Delta y(t_1, x; \varepsilon) = G_z(z^\circ(t_1, x)) \Delta z(t_1, x; \varepsilon) + o(\varepsilon; x), \quad (27)$$

$$\Delta y(t, x_0; \varepsilon) = 0.$$

При помощи (24)–(27) по схеме, аналогичной, например, схеме из [13], доказывается

Теорема 1. Для специального приращения $(\Delta z(t, x; \varepsilon), \Delta y_\varepsilon(t, x; \varepsilon))$ состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$

имеют место разложения

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \\ \Delta y(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta y(t, x) + o(\varepsilon; t, x). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $(\delta z(t, x), \delta y(t, x))$ – вариация вектора состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$(\delta z)_{tx} = f_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \delta z + f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \delta u(t, x), \quad (29)$$

$$\delta z(t_0, x) = 0, \quad x \in [x_0, X], \quad (30)$$

$$\delta z(t, x_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$(\delta y)_{tx} = g_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \delta y + g_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \delta v(t, x), \quad (31)$$

$$\delta y(t_1, x) = G_z(z^\circ(t_1, x)) \delta z(t_1, x), \quad (32)$$

$$\delta y(t, x_0) = 0.$$

Используя разложения (28) и (20) из формулы приращения (19) получаем справедливость соотношения

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u^\circ, v^\circ) &= S(u^\circ + \Delta u_\varepsilon, v^\circ + \Delta v_\varepsilon) - S(u^\circ, v^\circ) = \\ &= -\varepsilon \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X H'_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X M'_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) dx dt \right] + \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \right. \\
 & - \int_{x_0}^X \delta z(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx + \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) \times \right. \\
 & \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) + 2\delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \times \right. \\
 & \times \delta y(t, x) + \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) \left. \right] dx dt \Big\} + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Из разложения (33) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \delta^1 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = & - \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X H'_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) dx dt + \right. \\
 & \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X M'_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) dx dt \right], \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^2 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = & \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \\
 & - \int_{x_0}^X \delta z(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx - \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) \times \right. \\
 & \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) + 2\delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \times \right. \\
 & \times \delta y(t, x) + \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) \left. \right] dx dt. \tag{35}
 \end{aligned}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Из результатов классического вариационного исчисления (см. напр.: [11–14]) следует, что вдоль оптимального управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая неотрицательна, т.е. для всех $(\delta u(t, x), \delta v(t, x))$

$$\delta^1 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = 0, \tag{36}$$

$$\delta^2 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) \geq 0. \tag{37}$$

При помощи (36) по схеме, например, из [13, 22] доказывается справедливость утверждения

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ необходимо, чтобы

соотношения

$$H_u(\theta, \xi, x^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) = 0, \quad (38)$$

$$M_v(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) = 0 \quad (39)$$

выполнялись для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$ и $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$ ($(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$) – произвольная правильная точка (точка Лебега) [2, 3] управления $u(t, x)$ ($v(t, x)$).

Соотношения (38), (39) представляют собой аналог уравнения Эйлера [11–14] для рассматриваемой задачи и являются необходимым условием оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью для рассматриваемой задачи.

Неравенство (37) есть необходимое условие для оптимальности классических экстремалей, заданное в неявном виде. С его помощью получим необходимые условия оптимальности, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Через $R_i(t, x; \tau, s)$, $i = 1, 2$ – обозначим решения матричных интегральных уравнений

$$R_1(t, x; \tau, s) = E_1 + \int_{\tau}^t \int_s^x R_1(t, x; \alpha, \beta) f_z(\alpha, \beta, z^\circ(\alpha, \beta), u^\circ(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta, \quad (t, x) \in D_1,$$

$$R_2(t, x; \tau, s) = E_2 + \int_{\tau}^t \int_s^x R_2(t, x; \alpha, \beta) g_y(\alpha, \beta, y^\circ(\alpha, \beta), v^\circ(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta, \quad (t, x) \in D_2.$$

Уравнения в вариациях (29), (31) являются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями гиперболического типа с краевыми условиями Гурса (30), (32) соответственно. Решения краевых задач (29)–(30) и (31)–(32) допускают в соответствии с представлением [23]

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) f_u(\tau, s, z^\circ(\tau, s), u^\circ(\tau, s)) \delta u(\tau, s) ds d\tau, \quad (40)$$

$$\delta y(t, x) = \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s)) \delta v(\tau, s) ds d\tau + \int_{x_0}^x R_2(t, x; t_1, s) \frac{\partial \delta y(t_1, s)}{\partial s} ds. \quad (41)$$

Из (41) получим

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) &= R_2(t, x; t_1, x) \delta y(t_1, x) - \int_{x_0}^x \frac{\partial R_2(t, x; t_1, s)}{\partial s} \delta y(t_1, s) ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s)) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\delta y(t_1, s) = G_z(z^\circ(t_1, s)) \delta z(t_1, s),$$

то из (41) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) &= R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) \delta z(t_1, x) - \int_{x_0}^x \frac{\partial R_2(t, x; t_1, s)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, s)) \delta z(t_1, s) ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s)) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Введя обозначения

$$f_u(t, x) \equiv f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)), \quad g_v(t, x) \equiv g_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$$

и принимая во внимания представление (40), формулу (42) представим в виде:

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau - \\ & - \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t \int_{x_0}^s \frac{\partial R_2(t, x; t_1, s)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, s)) R_1(t_1, x; \tau, \beta) f_u(\tau, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau d\beta \Big] ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned}$$

Используя формулу Дирихле, получим

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau - \\ & - \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t \int_{x_0}^s \frac{\partial R_2(t, x; t_1, \beta)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, \beta)) R_1(t_1, x; \tau, s) d\beta \Big] f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) d\tau ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

Полагая

$$Q(t, x; \tau, s) = R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) - \int_s^x \frac{\partial R_2(t, x; t_1, \beta)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, \beta)) R_1(t_1, x; \tau, s) d\beta,$$

формула (43) записывается в виде:

$$\delta y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q(t, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \quad (44)$$

Представления (40), (44) позволяют вывести необходимые условия оптимальности второго порядка, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Используя произвольность $\delta u(t, x)$ и $\delta v(t, x)$, предположим, что $\delta v(t, x) = 0$. Тогда неравенство (37) с учетом (35) примет вид:

$$\begin{aligned} & \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^\circ, z(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \\ & - \int_{x_0}^X \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx + \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \\ & - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^X \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) \times \right. \\ & \left. \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) \right] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^t \int_{x_0}^X \delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) dx dt \geq 0, \end{aligned} \quad (45)$$

При этом представление (44) примет вид:

$$\delta y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q(t, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau. \quad (46)$$

Используя представления (40), (45), доказывается справедливость тождеств

$$\delta z'(t_1, X) \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \right] \delta z(t_1, X) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) R'_1(t, x; \tau, s) \times \quad (47)$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \right] R_1(t_1, X; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta,$$

$$\int_{x_0}^X \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx = \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x \int_{t_0}^x \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) R'_1(t_1, x; \tau, s) \times \quad (48)$$

$$\times \left. \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} R_1(t_1, x; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta \right] dx =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) \left[\int_{\max(s, \beta)}^X R'_1(t_1, x; \tau, s) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z(t_1, x)\right)}{\partial z^2} R_1(t_1, x; \alpha, \beta) dx \right] \times$$

$$\times f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) \times$$

$$\times \left[\int_{\max(\tau, \alpha)}^{t_1} \int_{\max(s, \beta)}^X R'_1(t_1, x; \tau, s) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) R_1(t_1, x; \alpha, \beta) dx dt \right] \times \quad (49)$$

$$\times f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(t, x) H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) dx dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\int_t^{t_1} \int_x^X \delta u'(\tau, s) H_{uz}(\tau, s, z^\circ(\tau, s), u^\circ(\tau, s), \Psi_1^\circ(\tau, s)) R_1(\tau, s; t, x) d\tau ds \right] f'_u(t, x) \delta u(t, x) dx dt,$$

$$\delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) = \int_{t_0}^{t_2} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) Q'(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \times \quad (50)$$

$$\times Q(t_2, X; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) \times$$

$$\times \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{\max(s, \beta)}^X Q'(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) Q(t, x; \alpha, \beta) dx dt \right] f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta.$$

Введя обозначение

$$K(\tau, s; \alpha, \beta) = - \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\max(s,\beta)}^X R_1'(t_1, x; \tau, s) \frac{\partial^2 N \left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z(t_1, x) \right)}{\partial z^2} R_1(t_1, x; \alpha, \beta) dx - \\
 & - Q'(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} Q(t_2, X; \alpha, \beta) + \\
 & + \int_{\max(\tau, \alpha)}^{t_2} \int_{\max(s, \beta)}^X R_1'(t, x; \tau, s) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) R_1(t, x; \alpha, \beta) dx dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\max(s, \beta)}^X Q'(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) Q(t, x; \alpha, \beta) dx dt,
 \end{aligned}$$

и учитывая тождества (47)–(50), из неравенства (45) получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_1} \int_{D_1} \delta u'(\tau, s) f_u(\tau, s) K(\tau, s; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta + \\
 & + 2 \int_{D_1} \left[\int_t^{t_2} \int_x^X \delta u'(\tau, s) H_{uz}(\tau, s, z^\circ(\tau, s), u^\circ(\tau, s), \Psi_1^\circ(\tau, s)) R_1(\tau, s; t, x) d\tau ds \right] f_u(t, x) \delta u(t, x) dx dt + \\
 & + \int_{D_1} \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) dx dt \leq 0.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Теперь предположим, что $\delta u(t, x) \equiv 0$, $\delta v(t, x) \neq 0$. При этом предположении неравенство (37) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) + \right. \\
 & \quad + 2 \delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) + \\
 & \quad \left. + \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) \right] dx dt \geq 0.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Используя представление (44) (с учетом того, что $\delta u(t, x) = 0$), получим

$$\begin{aligned}
 & \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta v'(\tau, s) g_v'(\tau, s) R_2'(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} R_2(t_2, X; \alpha, \beta) g_v(\alpha, \beta) \delta v(\tau, s) ds d\tau d\alpha d\beta, \\
 & \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) dx dt = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\int_t^{t_2} \int_{x_0}^X \delta v'(\tau, s) M_{vy}(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s), \Psi_2^\circ(\tau, s)) R_2(\tau, s; t, x) ds d\tau \right] g_v(t, x) \delta v(t, x) dx dt.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Далее имеет место тождество

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) dx dt = \\
 & = \int_{D_1} \int_{D_2} \delta v'(\tau, s) g_v'(\tau, s) \left[\int_{t=\max(\tau, x)}^{t_2} \int_{x=\max(s, \beta)}^X R_2'(t, x; \tau, s) M_{yy}(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s), \Psi_2^\circ(\tau, s)) R_2(t, x; \alpha, \beta) dx dt \right] \times \\
 & \quad \times g_v(\alpha, \beta) \delta v(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Введя обозначение

$$N(\tau, s; \alpha, \beta) = \int_{t=\max(\tau, x)}^{t_2} \int_{x=\max(s, \beta)}^X R'_2(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) R_2(t, x; \alpha, \beta) dx dt - \\ - R_2(t_2, x; \tau, s) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} R_2(t_2, x; \alpha, \beta)$$

и учитывая тождества (53)–(55), из неравенства (52) получим

$$\int_{D_1} \int_{D_1} \delta v'(\tau, s) g'_v(\tau, s) N(\tau, s; \alpha, \beta) g_v(\alpha, \beta) \delta v(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta + \\ + 2 \int_{D_2} \left[\int_{t, x}^{t_2, X} \delta v'(\tau, s) M_{vy}(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s), \psi_2^\circ(\tau, s)) R_2(\tau, s; t, x) d\tau ds \right] g_v(t, x) \delta v(t, x) dt dx + \\ + \int_{D_2} \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) dx dt \leq 0. \quad (56)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства (51), (56) выполнялись для всех $\delta u(t, x) \in R^r$, $(t, x) \in D_1$ и $\delta v(t, x) \in R^q$, $(t, x) \in D_2$ соответственно.

Неравенства (51) и (56) являются довольно общими необходимыми условиями оптимальности второго порядка. Из них можно получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности, и в частности аналог условия Лежандра–Клебша.

Теорема 4. (Аналог условия Лежандра–Клебша) Для оптимальности классической экстремали $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u' H_{uu}(\theta, \xi, x^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) u \leq 0, \quad (57)$$

для всех $u \in R^r$, $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$,

$$v' M_{vv}(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) v \leq 0, \quad (58)$$

для всех $v \in R^q$, $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$.

Неравенства (57), (58) являются аналогом условия Лежандра–Клебша.

Рассмотрим случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша.

Определение. Классическую экстремаль назовем особым, в классическом смысле, управлением, если для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$ и $u \in R^r$

$$u' H_{uu}(\theta, \xi, x^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) u = 0, \quad (59)$$

а для всех $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$ и $v \in R^q$

$$v' M_{vv}(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) v = 0. \quad (60)$$

Имеет место

Теорема 5. Для оптимальности особого в классическом смысле, управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u' \left[f'_u(\theta, \xi) K(\theta, \xi; \theta, \xi) f_u(\theta, \xi) + 0,5 H_{uz}(\theta, \xi, z^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) f_u(\theta, \xi) \right] u \leq 0, \quad (61)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$, $u \in R^r$,

$$v' \left[g'_v(\theta, \xi) N(\theta, \xi; \theta, \xi) g_v(\theta, \xi) + 0,5 M_{vv}(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) g_v(\theta, \xi) \right] v \leq 0, \quad (62)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$ и $v \in R^q$.

Докажем, например, соотношение (61). Неравенство (62) доказывается симметричными рассуждениями. Считая $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ классически особым оптимальным управлением, вариацию $\delta u(t, x)$ управляющей функции $u^\circ(t, x)$ определим по формуле

$$\delta u_\mu(t, x) = \begin{cases} u, & (t, x) \in [\theta, \theta + \sqrt{\mu}] \times [\xi, \xi + \sqrt{\mu}], \\ 0, & (t, x) \in D_1 \setminus [\theta, \theta + \sqrt{\mu}] \times [\xi, \xi + \sqrt{\mu}], \end{cases} \quad (63)$$

где $\mu > 0$ достаточно малое произвольное число, такое что $\theta + \sqrt{\mu} < t_1$, $\xi + \sqrt{\mu} < X$, а $u \in R^r$ произвольный вектор.

Принимая во внимание (63) в неравенстве (51) и учитывая (59), после некоторых преобразований получим

$$\mu^2 \left\{ u' \left[f'_u(\theta, \xi) K(\theta, \xi; \theta, \xi) f_u(\theta, \xi) + 0, 5H_{uz}(\theta, \xi, z^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi^\circ(\theta, \xi)) f_u(\theta, \xi) \right] u \right\} + o(\mu^2) \leq 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\mu > 0$ следует неравенство (61). Этим теорема 5 доказана.

Заключение

В статье рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. При предположении открытости областей управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Отдельно изучен случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша. Выведено необходимое условие оптимальности (в классическом смысле особых управлений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. № 5. С. 613–623.
2. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системой Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–77.
3. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький : Изд-во Горьковского гос. ун-та, 1986. 87 с.
4. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1972. № 5. С. 12–16.
5. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск : Наука, 1990. Ч. 2: Оптимальное управление. 151 с.
6. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород : Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 1992. Ч. 1. 110 с.
7. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1989. 160 с.
8. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 2. С. 52–67.
9. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.
10. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2003. 96 с.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Физматлит, 2005. 335 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 2013. 256 с.
14. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высшая школа, 2005. 335 с.
15. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2013. 224 с.
16. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса–Дарбу // Известия АН Азербайджана. 1981. № 2. С. 100–104.

17. Мансимов К.Б. Об оптимальности квазисобых управлений в системах Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1952–1960.
18. Мансимов К.Б. Интегральные необходимые условия оптимальности квазисобых управлений в системах Гурса–Дарбу // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 36–43
19. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
20. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. № 10. С. 1505–1520.
21. Мансимов К.Б. Условия оптимальности второго порядка в системах Гурса–Дарбу при наличии ограничений // Дифференциальные уравнения. 1990. № 6. С. 954–965.
22. Мордухович Б.И. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1988. 359 с.
23. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1973. № 2. С. 116–120.

Поступила в редакцию 8 апреля 2018 г.

Mansimov K.B., Suleymanova Sh.Sh. (2018) TO THE OPTIMALITY OF SINGULAR CONTROLS IN THE CLASSICAL SENSE IN ONE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 10–24

DOI: 10.17223/19988605/44/2

The paper deals with the problem of the minimization the functional

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)),$$

under constraints

$$\begin{aligned} u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1 = [t_0, t_1] \times [x_0, X], \\ v(t, x) \in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2 = [t_1, t_2] \times [x_0, X], \\ z_x = f(t, x, z, u), \quad (t, x) \in D_1, \\ z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, X], \\ z(t, x_0) = b_1(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ y_x = g(t, x, y, v), \quad (t, x) \in D_2, \\ y(t_1, x) = G(z(t_1, x)), \quad x \in [x_0, X], \\ y(t, x_0) = b_2(t), \quad t \in [t_1, t_2], \\ G(z(t_1, x_0)) = b_2(t_1). \end{aligned}$$

Here $f(t, x, z, u)$, $(g(t, x, y, v))$ is a given n (m)-dimensional vector-function continuous in $D_1 \times R^n \times R^r$ ($D_2 \times R^m \times R^q$) together with their partial derivatives with respect to (z, u) ((y, v)) up to the second order inclusive, $G(z)$ is a given twice continuously differentiable in R^n m -dimensional vector-function, $a(x)$, $b_i(t)$, $i = 1, 2$, are given vector-functions of the corresponding dimensions satisfying a Lipschitz condition with some constants, t_0, t_1, t_2, x_0, X are given, so that $t_0 < t_1 < t_2$, $x_0 < X$, control vector-function $u(t, x)$ ($v(t, x)$) everywhere is Lebesgue measurable on a rectangle D_1 (D_2), U (V) is a given non-empty, open, and bounded set.

When the control domain is open, the first and second orders necessary optimality conditions are derived. Optimal singular controls in the classical sense are studied.

Keywords: Goursat–Darboux system; singular control the classical sense; necessary optimality conditions; variation of the functional; equations in variations.

MANSIMOV Kamil Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

SULEYMANOVA Shabnam Shakir gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kmansimov@mail.ru

REFERENCES

1. Egorov, A.I. (1964) Ob optimal'nom upravlenii protsessami v nekotorykh sistemakh s raspredelennymi parametrami [On the optimal control of processes in some systems with distributed parameters]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 613–623.
2. Plotnikov, V.I. & Sumin, V.I. (1972) The optimization of objects with distributed parameters, described by Goursat–Darboux systems. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1. pp. 61–77. (In Russian).
3. Novozhenov, M.M., Sumin, V.I. & Sumin, M.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of systems of mathematical physics]. Gorkiy: Gorky State University.
4. Akhmedov, K.T. & Akhiyev, S.S. (1972) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti dlya nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniya [Necessary optimality conditions for some problems in optimal control theory]. *Doklady AN Azerbaydzhanskoj SSR*. 5. pp. 12–16.
5. Vasilyev, O.V., Srochko, V.A. & Terletskiy, V.A. (1990) *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization methods and their applications]. Vol. 2. Novosibirsk: Nauka.
6. Sumin, V.I. (1992) *Funktional'nyye vol'terrovyye uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University.
7. Srochko, V.A. (1989) *Variatsionnyy printsip maksimuma i metody linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Variational Maximum Principle and Linearization Methods in Optimal Control Problems]. Irkutsk: Irkutsk State University.
8. Lisachenko, I.V. & Sumin, V.I. (2011) The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye Nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2. pp. 52–67. (In Russian).
9. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of Goursat–Darboux systems]. Baku: ELM.
10. Melikov, T.K. (2003) *Osobyie v klassicheskom smysle upravleniya v sistemakh Gursa–Darbu* [Special in the classical sense of control in Goursat–Darboux systems]. Baku: ELM.
11. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Alsevizh, V.V. & etc. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
12. Alekseyev, V.M., Fomin, S.V. & Tikhomirov, V.M. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
13. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyie optimal'nyye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Nauka.
14. Demyanov, V.F. (2005) *Usloviya ekstremuma i variatsionnoye ischisleniye* [Extremum conditions and calculus of variations]. Moscow: Vysshaya Shkola.
15. Abdullayev, A.A. & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyyemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type]. Baku: ELM.
16. Mansimov, K.B. (1981) Ob odnoy skheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme for investigating a special case in Goursat–Darboux systems]. *Izvestiya AN Azerbaidjana*. 2. pp. 100–104.
17. Mansimov, K.B. (1986) Optimality of quasisingular controls in Goursat–Darboux systems. *Differentsial'nyye uravneniya – Differential Equations*. 22(11). pp. 1952–1960. (In Russian).
18. Mansimov, K.B. (1993) Integral necessary conditions for optimality of quasi-singular controls in Goursat–Darboux systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 36–43. (In Russian).
19. Mansimov, K.B. (1994) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Necessary conditions for optimality of special processes in optimal control problems]. Abstract of Physics and Mathematics Dr. Diss. Baku.
20. Mansimov, K.B. (2001) On the theory of necessary optimality conditions in a problem with distributed parameters. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 10. pp. 1505–1520. (In Russian).
21. Mansimov, K.B. (1990) Conditions for second-order optimality in Goursat–Darboux systems in the presence of constraints. *Differentsial'nyye uravneniya – Differential Equations*. 6. pp. 954–965. (In Russian).
22. Mordukhovich, B.Sh. (1988) *Metody aproksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
23. Akhiyev, S.S. & Akhmedov, K.T. (1973) Ob integral'nom predstavlenii resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy [On the integral representation of solutions of certain differential equations]. *Izvestiya AN Azerbaidjana. Seriya Fiziko-Tekhnicheskikh i Matematicheskikh Nauk*. 2. pp. 116–120.