

УДК 533.1

DOI 10.17223/19988621/54/7

К.В. Костюшин, В.А. Шуварики**СРАВНЕНИЕ СХЕМ ТИПА «MUSCL» ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ¹**

Проведено сравнение схем типа «MUSCL» при расчете одномерного течения идеального газа в сопловом блоке ракетного двигателя. Сравнение проводилось путем определения коэффициента расхода. При проведении расчетов использовались схема Годунова первого порядка точности, схемы «MUSCL» второго и третьего порядков точности, схема «MUSCL-Hancock» третьего порядка точности в комбинации с функциями-ограничителями «MINMOD», «Van Albada», «Van Leer», «Superbee». При определении потоков через грани расчетной ячейки использовались точное решение задачи о распаде произвольного разрыва, метод Роя или метод HLLC. Показано, что на точность определения интегральных характеристик основное влияние оказывает выбор базовой схемы.

Ключевые слова: сопло Лаваля, газовая динамика, коэффициент расхода, математическое моделирование, схемы типа Годунова, схема MUSCL, точное решение задачи Римана, метод Роя, метод HLLC.

При моделировании течений продуктов сгорания в газодинамических трактах ракетных двигателей широко применяются численные методы повышенного порядка точности, основанные на схеме Годунова [1–3]. Методы такого типа развиваются уже на протяжении более сорока лет, и существует огромное множество их вариантов и реализаций [4]. Впервые схема второго порядка точности по пространству, основанная на методе Годунова была предложена Колганом в 1972 году [5, 6]. Основная идея схемы Годунова–Колгана заключалась в замене кусочно-постоянного распределения функции внутри ячейки на кусочно-линейное распределение. Для удовлетворения условиям сохранения полной вариации (Total Variation Diminishing, TVD) Колган предложил использовать принцип минимального значения производной. В 1979 году подход, предложенный Колганом, получил свое развитие в работе Ван Лира [7, 8], в которой была предложена схема MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws). Схема приобрела большую популярность, и в результате её развития родилось большое семейство схем типа MUSCL [9].

Схемы типа MUSCL хорошо протестированы на течениях с разрывами (задачи: «Сода», «Лакса», «Mach 3», «Supersonic shock tube», «1-2-3», «High Mach», «Сильная ударная волна», «Подвижный контактный разрыв») [10]. Однако для решения инженерных задач газовой динамики ракетных двигателей, помимо определения структуры течения, важнейшей задачей является определение интегральных характеристик. В связи с этим требуется проведение исследований и определение комбинаций базовых схем, функций ограничителей и методов опре-

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 9.9063.2017/8.9.

деления потоков через грани расчетных ячеек, позволяющих с высокой точностью определять энерго-тяговые характеристики двигателей.

Математическая постановка

Система уравнений Эйлера, описывающая нестационарное течение сжимаемого невязкого газа в одномерном приближении имеет вид [11, 12]

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q}$ – вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ – вектор потоков:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность; t – время; p – давление; u – скорость движения газа; $e = \rho \varepsilon + \rho u^2 / 2$ – полная энергия единицы объема; ε – удельная внутренняя энергия. Система замыкается уравнением состояния идеального газа: $\varepsilon = p / (\gamma - 1) \rho$, где γ – показатель адиабаты.

Схема «Годунова»

Для системы уравнений (1) схема Годунова имеет вид [12]

$$\frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (3)$$

где Δt – шаг по времени, Δx – шаг по пространству; $\mathbf{Q}_i^n$ и $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ – значения вектора консервативных переменных на текущем и следующем шаге по времени соответственно, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ и $\mathbf{F}_{i-1/2}$ – потоки через правую и левую грани расчетной ячейки.

Для расчета потоков может быть использовано точное решение задачи о распаде произвольного разрыва (определение потоков по методу Годунова) [12] либо другие методы, основанные на приближенных решениях задачи Римана: Рое, Ошера, HLL, HLLC, HLLC и другие [10]. Таким образом реализация шага по времени в схеме Годунова проводится в два этапа:

Этап 1 – «Решение задачи Римана». На данном этапе по известным значениям $\mathbf{Q}_i^n$, с использованием точного или приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, определяются потоки $\mathbf{F}_{i+1/2}$ и $\mathbf{F}_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \text{RimmanSolver}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i+1}^n). \quad (4)$$

Этап 2 – «Вычисление параметров на новом временном слое». На этом этапе по известным значениям $\mathbf{Q}_i^n$, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ и $\mathbf{F}_{i-1/2}$ с использованием (3) определяются параметры газа $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ на новом временном слое.

Схема «MUSCL»

Для повышения порядка точности по пространству часто используется техника квазимоноотонной интерполяции сеточных решений (MUSCL) [8, 13, 14], удовлетворяющая условию TVD. Основная идея схем MUSCL состоит в повышении точности схемы за счет изменения порядка интерполяции в пределах ячейки. В общем случае для большинства схем типа MUSCL параметры на гранях расчетных ячеек могут быть определены с использованием следующих соотношений [10]:

$$\mathbf{Q}_{i+1/2}^L = \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{4}[(1-k)(\nabla_i \mathbf{Q}) + (1+k)(\Delta_i \mathbf{Q})]; \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_{i-1/2}^R = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{4}[(1+k)(\nabla_i \mathbf{Q}) + (1-k)(\Delta_i \mathbf{Q})]; \quad (6)$$

$$\Delta_i \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n;$$

$$\nabla_i \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n,$$

где $\mathbf{Q}_{i+1/2}^L$ – параметр на левой границе ячейки; $\mathbf{Q}_{i-1/2}^R$ – параметр на правой границе ячейки; $\mathbf{Q}^n$ – параметры в центрах ячеек; k – коэффициент схемы.

Возможные варианты реализации схем типа MUSCL представлены в табл. 1. Значения коэффициента схемы $k = -1, 0, 1$ соответствуют схемам с линейной интерполяцией величин, а $k = 1/3$ – схеме третьего порядка точности с параболической интерполяцией.

Таблица 1

Типы схем MUSCL

Название схемы	Коэффициент схемы	Тип реконструкции	Порядок точности
MUSCL-Upwind	-1	Линейная	2-й
MUSCL-Fromm	0	Линейная	2-й
MUSCL-CDS	1	Линейная	2-й
MUSCL-CUS	1/3	Параболическая	3-й

Для выполнения условий сохранения полной вариации (TVD) схема (5), (6) должна быть дополнена функцией ограничителем наклона [15, 16]:

$$\mathbf{Q}_{i+1/2}^L = \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{4} \left[(1-k) \psi \left(\frac{\Delta_i \mathbf{Q}}{\nabla_i \mathbf{Q}} \right) \nabla_i \mathbf{Q} + (1+k) \psi \left(\frac{\nabla_i \mathbf{Q}}{\Delta_i \mathbf{Q}} \right) \Delta_i \mathbf{Q} \right]; \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}_{i-1/2}^R = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{4} \left[(1+k) \psi \left(\frac{\Delta_i \mathbf{Q}}{\nabla_i \mathbf{Q}} \right) \nabla_i \mathbf{Q} + (1-k) \psi \left(\frac{\nabla_i \mathbf{Q}}{\Delta_i \mathbf{Q}} \right) \Delta_i \mathbf{Q} \right], \quad (8)$$

где $\psi(r)$ – функция-ограничитель.

Для семейства схем MUSCL могут быть использованы следующие ограничители: MINMOD – $\psi(r) = \min \left(1, \frac{3-k}{1-k} r \right)$; Van Albada – $\psi(r) = \left(\frac{r+r^2}{1+r^2} \right)$; Van Leer – $\psi(r) = \left(\frac{2r}{1+r} \right)$; Superbee – $\psi(r) = \max [0, \min (2r, 1), \min (r, 2)]$ и другие [9].

Таким образом реализация шага по времени в схеме MUSCL проводится в три этапа:

Этап 1 – «Реконструкция». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , с использованием соотношений (7), (8) определяются параметры Q^L , Q^R для каждой грани расчетной ячейки.

Этап 2 – «Решение задачи Римана». На данном этапе по известным значениям Q^L , Q^R с использованием точного или приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва определяются потоки $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки:

$$F_{i+1/2} = \text{RimmanSolver}(Q_{i+1/2}^L, Q_{i+1/2}^R). \quad (9)$$

Этап 3 – «Вычисление параметров на новом временном слое». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ с использованием (3) определяются параметры газа Q_i^{n+1} на новом временном слое.

С х е м а « M U S C L - H a n c o c k »

Одним из простых способов повышения порядка точности по времени является использование схемы MUSCL-Hancock [17,18]. Идея схемы заключается в том, что потоки $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки определяются на половинном шаге по времени $(t + \Delta t/2)$, а затем эти значения используются для определения решения на следующем временном слое $(t + \Delta t)$. Реализация шага по времени в схеме MUSCL-Hancock проводится в четыре этапа:

Этап 1 – «Реконструкция». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , с использованием соотношений (7), (8) определяются параметры Q^L , Q^R для каждой грани расчетной ячейки.

Этап 2 – «Эволюция». На данном этапе по известным значениям Q^L , Q^R , определяются параметры $\bar{Q}^L$, $\bar{Q}^R$ на гранях расчетных ячеек для момента времени $(t + \Delta t/2)$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{i+1/2}^L &= Q_{i+1/2}^L + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(Q_{i+1/2}^L) - F(Q_{i+1/2}^R)]; \\ \bar{Q}_{i+1/2}^R &= Q_{i+1/2}^R + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(Q_{i+1/2}^L) - F(Q_{i+1/2}^R)], \end{aligned}$$

где $F(Q_{i+1/2}^L)$ и $F(Q_{i+1/2}^R)$ определяются с использованием (2).

Этап 3 – «Решение задачи Римана». На данном этапе по известным значениям $\bar{Q}^L$ и $\bar{Q}^R$, с использованием точного или приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, определяются потоки $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки:

$$F_{i+1/2} = \text{RimmanSolver}(\bar{Q}_{i+1/2}^L, \bar{Q}_{i+1/2}^R) \quad (10)$$

Этап 4 – «Вычисление параметров на новом временном слое». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ с использованием (3) определяются параметры газа Q_i^{n+1} на новом временном слое.

Численные исследования

Проведена серия расчетов квазиодномерного течения идеального газа в сопле Лавала [12] с использованием комбинаций схем «Годунова», «MUSCL», «MUSCL-Hancock», с функциями-ограничителями: «MINMOD», «Van Albada», «Van Leer», «Superbee» и методами нахождения потоков: «Роя», «HLLC», «Точное решение задачи Римана». Сравнительный анализ проводился по результатам определения коэффициента расхода. В качестве тестовой геометрии использовано сопло JPL (рис. 1), где R – радиус минимального сечения.

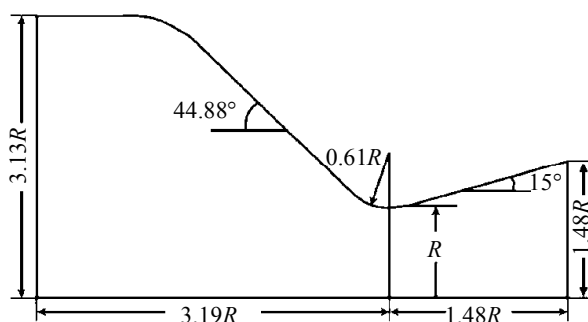


Рис. 1. Геометрия сопла JPL

Fig. 1. JPL nozzle geometry

На входе в сопло ставились граничные условия – постоянство энтальпии и энтропии, на срезе сопла – сверхзвуковое истечение. Рабочее тело: воздух. Расчет проводился методом установления. Количество узлов расчетной сетки: 500.

Коэффициент расхода определяется как

$$\varphi = \frac{G_*}{G_g},$$

где G_* – расчетный расход газа через критическое сечение сопла, G_g – теоретический расход, определенный для адиабатического течения.

Результаты численных исследований по определению коэффициентов расхода для различных комбинаций базовых схем, функций ограничителей и методов определения потоков через грани расчетных ячеек представлены в табл. 2.

Сравнение по базовым схемам. Для схемы «Годунова» первого порядка точности по пространству, расход газа через критическое сечение сопла отличается от теоретического на 1.33 – 1.34 %. Для схем второго порядка точности по пространству («MUSCL-Upwind», «MUSCL-Fomm», «MUSCL-CDS») – на 0.017–0.08 %. Схема «MUSCL-CUS» третьего порядка точности по пространству дает значения расхода газа, отличающиеся от теоретического на 0.017–0.07 %, а схема «MUSCL-Hancock» второго порядка точности по времени и третьего по пространству – на 0.07–0.17 %.

Таблица 2

Коэффициенты расходов для различных комбинаций схем типа «MUSCL»

№	Базовая схема	Порядок схемы	Ограничитель	Метод решения задачи Римана	Коэффициент расхода
1	Годунов	1	-	Точное решение	0.986510
2	Годунов	1	-	Рое	0.986682
3	Годунов	1	-	HLLC	0.986602
4	MUSCL-Upwind	2	minmod	Точное решение	0.999138
5	MUSCL-Upwind	2	Superbee	Точное решение	1.000170
6	MUSCL-Upwind	2	VanAlbda	Точное решение	0.999558
7	MUSCL-Upwind	2	VanLear	Точное решение	0.999637
8	MUSCL-Upwind	2	VanLear	Рое	0.999636
9	MUSCL-Upwind	2	VanLear	HLLC	0.999662
10	MUSCL-Fomm	2	minmod	Точное решение	0.999138
11	MUSCL-Fomm	2	Superbee	Точное решение	1.000171
12	MUSCL-Fomm	2	VanAlbda	Точное решение	0.999558
13	MUSCL-Fomm	2	VanLear	Точное решение	0.999637
14	MUSCL-Fomm	2	VanLear	Рое	0.999636
15	MUSCL-Fomm	2	VanLear	HLLC	0.999662
16	MUSCL-CDS	2	minmod	Точное решение	0.999138
17	MUSCL-CDS	2	Superbee	Точное решение	1.000173
18	MUSCL-CDS	2	VanAlbda	Точное решение	0.999558
19	MUSCL-CDS	2	VanLear	Точное решение	0.999637
20	MUSCL-CDS	2	VanLear	Рое	0.999636
21	MUSCL-CDS	2	VanLear	HLLC	0.999662
22	MUSCL-CUS	3	minmod	Точное решение	0.999138
23	MUSCL-CUS	3	Superbee	Точное решение	1.000170
24	MUSCL-CUS	3	VanAlbda	Точное решение	0.999558
25	MUSCL-CUS	3	VanLear	Точное решение	0.999637
26	MUSCL-CUS	3	VanLear	Рое	0.999636
27	MUSCL-CUS	3	VanLear	HLLC	0.999662
28	MUSCL-Hancock	3	minmod	Точное решение	0.998236
29	MUSCL-Hancock	3	Superbee	Точное решение	0.999213
30	MUSCL-Hancock	3	VanAlbda	Точное решение	0.998637
31	MUSCL-Hancock	3	VanLear	Точное решение	0.998710
32	MUSCL-Hancock	3	VanLear	Рое	0.998710
33	MUSCL-Hancock	3	VanLear	HLLC	0.998733

Сравнение по функциям-ограничителям. Использование ограничителя «minmod» дает значения расхода газа, отличающиеся от теоретического на 0.086 % (для схем «MUSCL-Upwind», «MUSCL-Fomm», «MUSCL-CDS», «MUSCL-CUS») и 0.176 % (для схемы «MUSCL-Hancock»). Ограничитель «Superbee» дает значения расхода газа, отличающиеся от теоретического на 0,017 % (для схем «MUSCL-Upwind», «MUSCL-Fomm», «MUSCL-CDS») и 0.078 % (для схемы «MUSCL-Hancock»), ограничитель «VanAlbda» – 0.044 и 0.136 %, а ограничитель «VanLear» – 0.036 и 0.129 % соответственно.

Сравнение по методам решения задачи Римана. Коэффициент расхода, вычисленный по схеме «Годунова» с использованием приближенных методов решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва (метод Роя, метод HLLC) отличается от коэффициента расхода, вычисленного с использованием точного ме-

тогда решения задачи Римана на 0.009 – 0.071%. Коэффициент расхода, вычисленный по схемам «MUSCL» второго и третьего порядка точности по пространству, с использованием приближенных методов решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва отличается от коэффициента расхода, вычисленного с использованием точного метода решения задачи Римана на 0 – 0.002 %

Заключение

По результатам расчетов локальных и интегральных характеристик в сопле Лавала, можно сделать следующие выводы. Схема «Годунова» первого порядка точности по пространству дает достаточно высокую погрешность при определении коэффициента расхода (1.4 %). Схемы «MUSCL» второго и третьего порядка точности по пространству дают достаточно низкую погрешность при определении коэффициента расхода (0.017–0.17 %) вне зависимости от функции ограничителя. Следует отметить, что результаты, полученные с использованием схем второго порядка точности по пространству, незначительно отличаются от результатов, полученных с использованием схем третьего порядка точности. Выбор функции-ограничителя и метода решения задачи Римана (точное решение задачи Римана, метод Роя, метод HLLC) влияют на точность определения интегральных характеристик в пределах сотых долей процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vasin I.M., Shrager E.R., Glazunov A.A., et al. Modeling of the Process of Motion of a Scramjet in the Atmosphere // Russ. Phys. J. 2013. V. 56. P. 908 – 913. DOI: 10.1007/s11182-013-0117-2
2. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н. и др. Исследование газодинамических особенностей ствольного старта модели с импульсным реактивным двигателем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 45–51. DOI: 10.17223/19988621/35/6.
3. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. Two Approaches for Simulating the Burning Surface in Gas Dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
4. Родионов А.В. О взаимосвязи разрывного метода Галёркина со схемами MUSCL-типа // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 10. С. 96–116.
5. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчёта разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
6. Kolgan V.P. Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. Iss. 7. P. 2384–2390. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.033.
7. B. van Leer. A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme // J. Comp. Phys. 2011. V. 230. Iss. 7. P. 2378–2383. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.032.
8. B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
9. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Third Edition. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2009. 724 p. DOI: 10.1007/b79761.
10. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. и др. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
11. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
12. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

13. *B. van Leer*. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme III. Upstream-Centered Finite Difference Schemes for Ideal Compressible Flow // *J. Comput. Phys.* 1977. V. 23. Iss. 3. P. 263–275. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90094-8.
14. *B. van Leer*. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme IV. A New Approach to Numerical Convection. // *J. Comput. Phys.* 1977. V. 23. Iss. 3. P. 276–299. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90095-X.
15. *Sweby P.K.* High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM J. Numer. Anal.* V. 21. Iss. 5. P. 995–1011. DOI: 10.1137/0721062.
16. *Sweby P.K.* TVD Schemes for Inhomogeneous Conservation Laws. In *Notes on Numerical Fluid Mechanics // Non-Linear Hyperbolic Equations – Theory, Computation Methods and Applications*. 1989. V. 24. P. 599–607. DOI: 10.1007/978-3-322-87869-4_58.
17. *Quirk J.J.* An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two dimensional bodies // *Computers and Fluids*. 1994. V. 23. Iss. 1. P. 125–142. DOI: 10.1016/0045-7930(94)90031-0.
18. *B. van Leer*. On the Relation Between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1985. V. 5. Iss. 1. P. 1–20. DOI: 10.1137/0905001.

Статья поступила 03.05.2018 г.

Kostyushin K.V., Shuvarikov V.A. (2018) Comparison of the MUSCL-type schemes for a gas flow calculation in de Laval nozzles. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 79–87

DOI 10.17223/19988621/54/7

Keywords: de Laval nozzle, gas dynamics, mass flow rate, mathematical modeling, Godunov-type schemes, MUSCL-type schemes, exact solution of the Riemann problem, Roe's Riemann solver, HLLC Riemann solver.

In this paper, MUSCL-type schemes applied for the calculation of a one-dimensional inviscid flow of ideal gas in the JPL nozzle of rocket engine are compared. The comparison was carried out on the basis of determined mass flow coefficient. The calculations were performed using the first-order Godunov scheme, the second- and third-order MUSCL schemes, and the third-order MUSCL-Hancock scheme in a combination with the slope limiters such as MINMOD, Van Albada, Van Leer, and Superbee. The Godunov method, the Roe approximate Riemann solver, and the HLLC Riemann solver were used to calculate the numerical fluxes. The Godunov scheme, which is first order accurate in space, leads to a high error in the mass flow rate (1.4%). The MUSCL schemes, which are second and third order accurate in space, give a low error in the mass flow rate (0.017–0.17%). Both the limiter function and the method of solving the Riemann problem (an exact solution of the Riemann problem, the Roy method, and the HLLC method) affect the accuracy in determination of integral characteristics within the limits of hundredths of a percent.

KOSTYUSHIN Kirill Vladimirovich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

SHUVARIKOV Vladimir Andreevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shuvaa@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Vasenin I.M., Shrager E.R., Glazunov A.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2013) Modeling of the process of motion of a scramjet in the atmosphere. *Russ. Phys. J.* 56. pp. 908–913. DOI: 10.1007/s11182-013-0117-2.
2. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S. (2015) Issledovanie gazodinamicheskikh osobennostey stvol'nogo starta modeli s impul'snym

- reaktivnym dvigatelem [Investigation of gas-dynamic features of a moving model with a pulse jet engine (CPJE) inside a barrel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 45–51. DOI 10.17223/19988621/35/6.
3. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
 4. Rodionov A.V. (2016) Correlation between the discontinuous Galerkin method and MUSCL-type schemes. *Math Models Comput Simul.* 8(3). pp. 285–300. DOI: 10.1134/S207004821603008X.
 5. Kolgan V.P. (1972) Primenenie printsipa minimal'nykh znacheniy proizvodnoy k postroeniyu konechnoraznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki [Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI Science Journal*. 3(6). pp. 68–77.
 6. Kolgan V.P. (2011) Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics. *J. Comput. Phys.* 230(7). pp. 2384 – 2390. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.033.
 7. B. van Leer. (2011) A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme. *J. Comp. Phys.* 230(7). pp. 2378 – 2383. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.032.
 8. B. van Leer. (1979) Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comp. Phys.* 32. pp. 101–136. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
 9. Toro E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3d Edition. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/b79761.
 10. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N., Kozelkov A.S., Karpenko A.G., Teterina I.V. (2015) *Raznostnye skhemy v zadachakh gazovoy dinamiki na nestrukturirovannykh setkakh* [Difference schemes in the problems of gas dynamics using unstructured grids]. Moscow: Fizmatlit.
 11. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. (2000) *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Boca Raton: CRC Press.
 12. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multi-dimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
 13. B. van Leer. (1977) Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible flow. *J. Comput. Phys.* 23(3). pp. 263–275. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90094-8.
 14. B. van Leer. (1977) Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection. *J. Comput. Phys.* 23(3). pp. 276–299. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90095-X.
 15. Sweby P.K. (1984) High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 21(5). pp. 995–1011. DOI: 10.1137/0721062.
 16. Sweby P.K. (1989) “TVD” schemes for inhomogeneous conservation laws. In notes on numerical fluid mechanics. *Non-Linear Hyperbolic Equations–Theory, Computation Methods and Applications*. 24. pp. 599–607. DOI: 10.1007/978-3-322-87869-4_58.
 17. Quirk J.J. (1994) An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two dimensional bodies. *Computers and Fluids*. 23(1). pp. 125–142. DOI: 10.1016/0045-7930(94)90031-0.
 18. B. van Leer. (1985) On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Enguist-Osher and Roe. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 5(1). pp. 1–20. DOI: 10.1137/0905001.