

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Учебно-методическое пособие

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра физической и вычислительной механики**

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО методической комиссией
механико-математического факультета

Протокол от 25.05.2018 г. № 3

Председатель комиссии Е.А. Тарасов

В методическом учебном пособии рассматриваются методы описания движения материальной точки в среде с сопротивлением и приложения этих методов для решения задач, возникающих в механике многофазных сред. Содержатся материалы для организации лабораторных работ с использованием персональных компьютеров: указания по решению задач, комплект заданий для выполнения лабораторных работ, примеры решения задач, список рекомендуемой литературы.

Методическое пособие разработано для студентов направления «Механика и математическое моделирование» механико-математического факультета, а также для студентов других специальностей, изучающих основы механики многофазных сред.

СОСТАВИТЕЛЬ: профессор кафедры физической и
вычислительной механики, д-р физ.-мат. наук О.В. Матвиенко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель работы

Целью работы является проведение моделирования и численного исследования движения материальной точки в поле силы тяжести с учетом силы сопротивления среды.

От студента требуется: составить уравнение движения материальной точки и сформулировать начальные условия, составить программу расчета характеристик движения, провести исследования движения материальной точки для различных значений начальных условий и параметров задачи.

Необходимые навыки

Для выполнения работы студенту необходимы знания по высшей математике (теория обыкновенных дифференциальных уравнений), информатике (языки программирования), численным методам и теоретической механике (динамика материальной точки).

Классификация многофазных течений

Многофазные течения широко распространены в энергетике, химической, обрабатывающей промышленности и имеют широкую область применения.

В инженерных приложениях приходится иметь дело с большим разнообразием многофазных сред, которые принято разделять на следующие классы:

- газозвеси, дым – смеси газа с твердыми частицами;
- аэрозоли, туман – смесь газа с жидкими каплями;
- суспензии – смесь жидкости с твердыми частицами;
- эмульсии – смесь жидкости с каплями другой жидкости;
- газожидкостные среды, пены – смесь жидкости с газовыми пузырями;
- зернистые (гранулированные) среды – упакованные твердые частицы, в зазорах которых содержится газ или жидкость;
- капиллярно-пористые среды – пористые тела, содержащие в порах газ или жидкость.

Твердые частицы, капли, пузырьки газа называются дисперсными частицами, или дисперсной фазой, а окружающую их фазу – несущей средой.

Рассмотрим характерные особенности поведения различных фаз, образующих многофазную систему.

Твердая фаза. Обычно твердая фаза существует в виде частиц или конгломератов частиц. Твердую фазу можно считать несжимаемой, она имеет недеформируемые границы с несущей средой. Характеристики потока существенно зависят от размеров частиц. Очень маленькие частицы переносятся как несущая среда и подвержены пульсационному движению, вызванному турбулентными пульсациями. Крупные частицы являются более инерционными и менее чувствительны к турбулентным пульсациям в жидкости. Как правило, размеры частиц неодинаковы, поэтому знание распределения частиц по размерам имеет большое значение при изучении таких течений. В большинстве случаев твердые частицы большей плотностью, чем несущая среда. В горизонтальном потоке это может вызвать

разделение или расслоение потока под действием силы тяжести. Твердые частицы могут оседать на стенки канала, прилипая к ним в виде неупорядоченных слоев, которые могут создавать дополнительное гидравлическое сопротивление.

Жидкость. В многофазных потоках жидкость может входить в виде несущей среды, содержащей диспергированные твердые частицы, пузырьки газа или капли других жидкостей. Жидкая фаза также может быть дисперсной в виде капель, взвешенных в газе или другой жидкости. От твердых тел жидкости отличаются своей реакцией на деформирование. Граница раздела жидкой фазы с другими текучими средами может изменяться в зависимости от режима течения и геометрии потока. Существование сил поверхностного натяжения накладывает определенные ограничения на процесс деформирования жидкой фазы. Например, когда жидкость представляет собой дисперсную фазу, имеется тенденция к образованию сферических капель, характеризующихся минимальной энергией поверхностного натяжения на единицу объема жидкости. Несмотря на то, что жидкости более сжимаемы, чем твердые тела, сжимаемость жидкости на практике можно не учитывать.

Газ. В качестве текучей среды газ имеет те же самые свойства с точки зрения реакции на воздействие силы, что и жидкость. Но по сравнению с жидкостями и твердыми телами газ обладает высокой сжимаемостью. Однако многие многофазные системы, в которые входит газ, можно считать несжимаемыми, если число Маха для газовой фазы мало.

Основные типы многофазных потоков

Рассмотрим основные типы многофазных потоков и примеры их использования.

Газожидкостные потоки – наиболее часто встречающийся вид многофазных течений. Они находят применение во всех отраслях промышленности. Целый ряд промышленных установок, таких, как системы трубопроводов для транспортировки газонефтяных смесей, испарители и котлы, установки кондиционирования воздуха включают в себя такие течения.

Течения систем газ – твердые частицы. Течения твердых частиц, взвешенных в газе, важны при пневматической транспортировке и горении распыленного топлива. Псевдооживленные слои также можно рассматривать как форму течения систем газ – твердые частицы. В таких слоях твердые частицы остаются внутри определенного резервуара, в то время как газ проходит сквозь него. Однако внутри самого слоя газ и твердые частицы совершают сложные перемещения.

Течения систем жидкость – жидкость. Примером применения таких систем служит поток водонефтяных эмульсий в трубопроводах и жидко-жидкостных системах извлечения растворителя.

Течения систем жидкость – твердое тело. Наиболее важным применением этого типа течений является гидравлическая транспортировка твердых материалов, центробежное разделение в гидроциклонных устройствах, в кристаллизационных системах для экстракции каолина.

Трехфазные течения также имеют практическое значение. Ниже приведены примеры таких течений.

Течения системы газ – жидкость – твердое тело. Эти течения встречаются в двухфазных химических реакторах, там где газ может барботировать через жидкость и псевдооживленный слой твердых частиц. Такие системы полезны для проведения каталитических газожидкостных реакций.

Течения систем газ – жидкость – жидкость. Смесь пара и двух несмешивающихся жидкостей является обычной в инженерных химических установках. Примером такой системы может служить конденсатор, в котором конденсируется смесь водяного пара и паров углеводорода. Конденсат представляет собой неперемешивающуюся смесь жидкого углеводорода и воды.

Газожидкостные потоки

Газожидкостные потоки являются наиболее сложными двухфазными потоками из-за существования деформируемой границы раздела двух фаз и вследствие того, что газовая фаза

является сжимаемой. В таких потоках возможен широкий диапазон конфигураций границ раздела фаз, но классификацию газожидкостных потоков можно упростить, рассматривая тип распределения фаз по отношению друг к другу и к стенкам канала. Ниже рассмотрены режимы течения течений для вертикальных и горизонтальных каналов.

Основными режимами течения, которые возникают в восходящих потоках в вертикальных каналах, являются следующие.

Пузырьковое течение – газовая фаза в виде отдельных пузырьков распределена в жидкой среде.

Пробковое (снарядное) течение реализуется при слиянии пузырьков, вследствие чего образуются большие, имеющие форму артиллерийского снаряда, пузыри, которые могут быть разделены областями жидкости, содержащей более мелкие пузырьки диспергированного газа.

Вспененное течение реализуется при больших скоростях потока, когда происходит разрушение пузырей снарядного течения.

Кольцевое течение – жидкость течет на стенках трубы, а газ течет в центре канала.

Для вертикальных нисходящих потоков режимы течения аналогичны. Однако, вспененное течение не реализуется, преобладающим является режим кольцевого течения.

К основным видам течения в горизонтальных трубах относятся следующие.

Расслоенное течение – полное разделение фаз под действием силы тяжести. Жидкость течет по дну канала, а газ вдоль верхней части канала с малым взаимодействием фаз.

Волновое течение возникает в расслоенном режиме течения, когда при увеличении скорости потока на границе раздела потоков формируются волны.

Пузырьковое течение характеризуется тем, что газовая фаза в виде пузырьков распределена в жидкости. В горизонтальных трубах пузырьки обычно собираются в верхней части канала. При

высоких скоростях потока пузырьки могут быть равномерно распределены в жидкости и *образовывать вспененное течение*.

Дисперсно-кольцевое течение аналогично кольцевому течению в вертикальных каналах. Исключение здесь составляет толщина пленки, которая на дне канала намного толще.

Потоки газа с частицами

Пневматическая транспортировка имеет большое прикладное значение для перемещения порошкообразных материалов. В зависимости от скорости газа, скорости стационарного осаждения твердых частиц, концентрации дисперсной фазы возникают различные режимы течения.

Потоки с однородным содержанием частиц существуют при низких относительных массовых расходах и высоких скоростях несущего газа.

Течения со скоплениями дисперсной фазы реализуются в потоках с более высоким массовым содержанием твердой фазы при относительно низкой скорости газа. Распределение твердых частиц неравномерно; возможна закупорка трубы.

Пробковый режим течения проявляется при низких скоростях газа и высокой концентрации твердых частиц.

Режим течения в кипящем слое реализуется для мелкодисперсных частиц. В этом случае можно достигнуть высокой концентрации твердых частиц.

Потоки жидкости с частицами

В отличие от пневмотранспортировки гидротранспортировку гранулированных и порошкообразных материалов можно использовать на большие расстояния. Используемые физические принципы здесь сходны с принципами пневмотранспортировки. Наиболее существенное отличие заключается здесь в несжимаемости жидкости и высокой плотности несущей среды. Из-за высокой плотности жидкости, силы, необходимые для транспортировки твердых частиц могут быть достигнуты при относительно низких скоростях потока.

Кроме того, выталкивающие силы, действующие на твердую частицу в жидкости, могут частично скомпенсировать силу тяжести.

При вертикальной транспортировке относительно слаба тенденция к расслоению. Поэтому вертикальное течение смеси можно рассматривать как квазигомогенное.

При горизонтальной транспортировке сила тяжести всегда приводит к расслоению смеси, которое зависит от размеров частиц и скорости потока.

Гранулометрические характеристики дисперсной фазы

Размер частицы обычно характеризуют диаметром. При теоретических рассмотрениях свойств частиц чаще всего пользуются радиусом, в то время как в практических приложениях предпочтение отдают диаметру.

Для упрощения анализа процессов, происходящих в многокомпонентных средах, удобно все частицы принимать за сферические. Для частиц неправильной формы вводят так называемые эквивалентные диаметры.

Двумя характеристиками размеров частицы служат диаметр Ферета и диаметр Мартина.

Диаметр Ферета – это максимальное расстояние между краями частицы, а диаметр Мартина – длина линии, которая делит частицу на две равные по площади половины. Эти измерения для всех частиц выполняются параллельно некоторой выбранной прямой и поэтому существенно зависят от расположения частицы, однако они справедливы, если усреднены для большого числа частиц и сделаны идентично.

Часто диаметр определяют по скорости осаждения частицы в жидкости или газе. При этом принимают, что все имеющие одинаковые скорости осаждения частицы равны по размерам независимо от их фактических размеров и формы. Для этого вводят соответствующие определения.

Аэродинамический диаметр — диаметр сферической частицы плотностью 1000 кг/м^3 , имеющей такие же аэродинамические

показатели, как и рассматриваемая частица. Это означает, что частицы любой формы и плотности имеют один и тот же аэродинамический диаметр, если их скорости осаждения равны. Этот диаметр, как правило, используется при исследовании поведения аэрозолей, пылей, дымов и туманов.

Стоксовский диаметр — диаметр шара, имеющего такие же плотность и скорость осаждения, как и рассматриваемая частица. Стоксовский и аэродинамический диаметры различаются лишь тем, что первый зависит от плотности частицы, а второй не зависит. Стоксовский диаметр имеет более широкую область применения и помимо перечисленных неоднородных сред используется для исследования движения эмульсий, суспензий и газожидкостных сред.

Как правило, многофазные среды состоят из частиц различных размеров, т. е. являются полидисперсными. В тех случаях, когда один размер недостаточно удовлетворительно характеризует какую-либо дисперсную фазу в неоднородной среде, используют информацию о распределении частиц по размерам. Однако и выбор обоснованного размера частиц, характеризующего полидисперсную фазу, также не может быть сделан без знания дисперсной характеристики фазы.

Применяя терминологию математической статистики, диаметр частиц рассматривают как одномерную случайную величину, вероятность появления или не появления которой в заданной области размеров определяется функциями распределения.

Содержание частиц различных размеров в полидисперсной системе полностью определяется заданием ее дифференциальной функции счетного распределения $f(x)$, где x — параметр, характеризующий размер индивидуальной частицы (радиус, диаметр, объем, масса, площадь поперечного сечения). При этом $df = f(x)dx$ — доля частиц, размеры которых лежат в пределах $(x - dx/2, x + dx/2)$. Функция $f(x)$ имеет смысл плотности

распределения вероятности, т.е. нормирована на единицу:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Для математического описания функций распределения $D(x)$ или плотности распределения $f(x)$ существует множество уравнений.

В редких случаях, когда процесс образования дисперсной фазы определяется случайными и независимыми друг от друга факторами, например получение гранулированных материалов или диспергирование жидкости через отверстия, их дисперсный состав подчиняется нормальному закону распределения Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^t \left(-\frac{y^2}{2}\right) dy,$$

где $t = (x - x_g) / \sigma_g$, x_g – математическое ожидание, σ_g – среднеквадратичное отклонение.

Анализ многочисленных литературных данных по гранулометрическому составу различных полидисперсных систем показал, что практически все природные и искусственно получаемые аэрозоли с унимодальной функцией распределения могут быть описаны либо с помощью обобщенного гамма-распределения (ОГР), либо с помощью логарифмически нормального распределения.

Наиболее распространено для описания дисперсного состава логарифмически-нормальное распределение (ЛНР). Оно получается, если в нормальную Гауссову функцию распределения подставить в качестве аргумента не размер частиц, а его логарифм:

$$f(\delta) = \frac{1}{\delta \ln(\sigma_g) \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t_g^2}{2}\right), \quad D(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_g} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy,$$

$$\left. \begin{aligned} t_g &= (\ln \delta - \ln \delta_g) / \sigma_g \\ \sigma_g &= \ln^2(\sigma_g) \end{aligned} \right\}.$$

Справедливость ЛНР для всех частиц вещества, полученных механическим измельчением в течение длительного времени, теоретически доказана А. Н. Колмогоровым. Применимость этого закона для многих видов порошков, пылей и аэрозолей подтверждена большим числом экспериментальных исследований.

Формулу для ОГР, предложенную К.С. Шифриным, запишем в виде

$$f(x) = ax^\alpha \exp(-bx^\beta),$$

где $a > 0$ – нормирующий множитель, $\alpha > -1$, β ($\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(\beta)$), b – параметры распределения. Нормирующий множитель для ОГР, определяемый из условия нормировки имеет вид

$$a = \beta b^{\frac{\alpha+1}{\beta}} \Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция аргумента x .

При $\beta = 1$ ОГР переходит в гамма-распределение $f(\delta) = a\delta^\alpha \exp(-b\delta)$, нормирующий множитель для которого $a = b^{\alpha+1} \Gamma^{-1}(\alpha+1)$.

Из ОГР можно получить большинство встречающихся в литературе распределений, варьируя α , β , b . Наиболее распространенные из них приведены в таблице.

Таблица 1

Эмпирические законы распределения частиц по размерам

α	b	β	$f(x)$	Распределение	Область использования
2	b	3	$ax^2 \exp(-bx^3)$	Смолуховского-Шумана	Физика атмосферы (облака, осадки), коллоидные системы
0	b	1	$a \exp(-bx)$	Мартина (Маршалла Пальмера)	Физика атмосферы (облака, осадки), продукты измельчения
2	b	2	$ax^2 \exp(-bx^2)$	Максвелла Больцмана	Дисперсность сажи в пламенах
1	b	2	$ax \exp(-bx^2)$	Ромашова	Промышленные пыли
-4	0	–	ax^{-4}	Юнге	Физика атмосферы (дымки, приземные аэрозоли)
2	b	β	$ax^2 \exp(-bx^\beta)$	Наукиямы Танасавы	Распыливание жидкости форсунками
α	b	2	$ax^\alpha \exp(-bx^2)$	Вейнинга	Продукты измельчения
$\beta - 4$	b	β	$ax^{\beta-4} \exp(-bx^\beta)$	Розина Раммлера Шперлинга Боннета	Распыливание жидкости форсунками, продукты измельчения

Основы динамики материальной точки

Из принципа инерции следует, что всякое изменение скорости происходит только от действия сил, приложенных к данному телу. Соотношение между силой и ускорением установлено в *основном законе динамики*.



ИСААК НЬЮТОН
Isaac Newton, 1642–1727

Ньютон¹ писал, что изменение скорости «всегда происходит по тому же направлению, как и производящая его сила», независимо от того, находилось тело в покое или в движении и действует сила по скорости, против скорости или же под углом к ней. Открытый Ньютоном основной закон динамики можно сформулировать такими словами:

¹ Ньютон (Newton) Исаак (1643–1727), английский математик, астроном и физик, создатель классической механики, член (1672) и президент (с 1703) Лондонского королевского общества. Директор Монетного двора (с 1699), привёл в порядок монетное дело в Англии. Фундаментальные труды «Математические начала натуральной философии» (1687) и «Оптика» (1704). Разработал (независимо от Г. Лейбница) дифференциальное и интегральное исчисление. Открыл дисперсию света, хроматическую aberrацию, исследовал интерференцию и дифракцию, развивал корпускулярную теорию света, высказал гипотезу, сочетавшую корпускулярные и волновые представления. Построил зеркальный телескоп. Сформулировал основные законы классической механики. Открыл закон всемирного тяготения; дал теорию движения небесных тел, создав основы небесной механики. Занимался алхимией, хронологией древних царств, теологией (толкование библейских пророчеств, большая часть не опубликована).

«Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, пропорциональное силе и направленное по силе». Математически этот закон можно записать в виде такой формулы:

$$\vec{a} = \vec{F} / m. \quad (1)$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то действие каждой из сил не зависит от действия остальных и каждая из сил сообщает точке такое ускорение, какое она ей сообщила бы, если бы действовала одна, а под действием нескольких сил точка получает ускорение $\vec{a}$, какое получила бы под действием их равнодействующей $\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i / m. \quad (2)$$

В этом заключается *принцип независимости действия сил*.

Пусть движение точки M задано в прямоугольных координатах: кинематическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (3)$$

Тогда основное уравнение динамики в проекции на координатные оси примет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^N F_{i,x}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{i=1}^N F_{i,y}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{i=1}^N F_{i,z}, \quad (4)$$

где $\sum_{i=1}^N F_{i,x}$, $\sum_{i=1}^N F_{i,y}$, $\sum_{i=1}^N F_{i,z}$ – проекции главного вектора системы сил на координатные оси.

Система трех дифференциальных уравнений (4) второго порядка эквивалентна системе шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{i,x}, \quad m \frac{dv_y}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{i,y}, \quad m \frac{dv_z}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{i,z},$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z. \quad (5)$$

Уравнения (4) или (5) называют дифференциальными уравнениями движения материальной точки в прямоугольных

координатах. Три совместных дифференциальных уравнения второго порядка (4) или шесть обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка (5) определяют координаты x, y, z в произвольный момент времени t . Если движущаяся точка M совершенно свободна, то приложенные к ней силы могут быть функциями ее координат x, y, z , проекций ее скорости v_x, v_y, v_z и времени t .

$$\Phi = \Phi(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t). \quad (6)$$

Проинтегрировать их в общем виде невозможно, но при некоторых видах функции Φ эти интегралы могут быть получены. В остальных случаях вычисления возможно проводить численными методами с использованием вычислительной техники.

Общие интегралы дифференциальных уравнений движения материальной точки содержат шесть постоянных интегрирования. Эти постоянные величины не являются произвольными. В каждой задаче, при решении которой приходится интегрировать дифференциальные уравнения движения, постоянные интегрирования должны быть определены из начальных условий. Если заданы положение и скорость движущейся точки в какой-то момент времени $t = t_0$ (t_0 может быть не равным нулю), то нужно определить эти постоянные таким образом, чтобы при $t = t_0$ координаты x, y, z получили заданные значения x_0, y_0, z_0 и и

производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ – заданные значения v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} .

Данным начальным условиям при заданной массе m и силе $\vec{F}$ соответствует только одно движение. Поэтому, если мы нашли какое-либо движение точки M , удовлетворяющее уравнениям (4) и начальным условиям, следовательно, мы определили именно то движение, которое искали.

Величина m в формуле (1) является не только коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, а имеет .большой

физический смысл. Всякая материальная частица стремится сохранить свое состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения. Свойство материальных тел сохранять механическое движение при отсутствии механического взаимодействия их с другими называют *инерцией*. Это же свойство инерции побуждает различные тела при одинаковых механических взаимодействиях изменять механическое движение постепенно и различно для каждого тела. Таким образом, в формуле (1) величина m представляет собой меру инерции материальной точки и выражает ее массу. Итак, *масса* является *мерой инерции*.

Распределение массы в теле обычно характеризует плотность, которая определяется как:

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (7)$$

где V - объем тела. Если известна средняя плотность ρ и объем тела V , то его масса найдется как $m = \rho V$.

Таким образом, уравнение движения материальной точки (центра масс тела) можно записать в виде:

$$\rho V \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (9)$$

где ρ – средняя плотность; V – его объем; $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – главный вектор внешних сил, действующих сил.

Рассмотрим более подробно систему сил, действующих на материальную точку, движущуюся в плотной среде в поле силы тяжести. К основным силам, действующим на тело, движущееся в жидкости или газе, относятся: сила тяжести, архимедова сила и сила сопротивления. Силу тяжести можно определить по формуле

$$\vec{F}_G = \rho V \vec{g}. \quad (10)$$

Наличие локального градиента давления приводит к появлению силы, направленной в сторону градиента давления:

$$\vec{F}_p = - \int_s p \vec{n} ds = - \int_V \text{grad}(p) dV \approx - \text{grad}(p) V \quad (11)$$

Градиент давления, создаваемый статическим давлением равен $grad(p) = -\rho \vec{g}$ (ρ – плотность окружающей среды). Складывая силу тяжести и силу, вызванную градиентом статического давления, получим силу Архимеда:

$$\vec{F}_A = (\rho - \rho_e) V \vec{g}. \quad (12)$$

Сила сопротивления в однородном потоке газа определяется как:

$$\vec{F}_D = \frac{C_D}{8} \pi \delta^2 \rho_e |\vec{v} - \vec{v}_e| (\vec{v} - \vec{v}_e), \quad (13)$$

где C_D – коэффициент сопротивления; δ – диаметр частицы, $\vec{v}_e$ – вектор скорости несущей среды.

Для расчета траекторий движения приведенная выше система уравнений дополняется следующими кинематическими соотношениями:

$$\frac{dx_p}{dt} = u_p, \quad \frac{dy_p}{dt} = v_p, \quad \frac{dz_p}{dt} = w_p, \quad (14)$$

где x_p , y_p , z_p – координаты капли в декартовой системе координат.

Сила сопротивления

Ньютон одним из первых смог получить уравнение, связывающее силу сопротивления тела со скоростью его движения. Он предположил, что лобовая часть движущегося тела испытывает множество ударов со стороны частиц жидкости, непрерывно тормозящих его движение вперед. Таким образом, сопротивление должно быть пропорционально числу и массе набегающих частиц, т.е. оно должно быть тем больше, чем больше поперечное сечение тела и плотность среды. Скорость же отражает как число ударов о тело, так и силу каждого удара, т.е. сопротивление должно быть пропорционально квадрату скорости. В результате Ньютоном было получено уравнение

$$\vec{F} = -C' S \rho |\vec{v}| \vec{v}, \quad (15)$$

где ρ – плотность среды, v – скорость относительного движения; S – площадь миделева сечения (площадь проекции тела на плоскость, нормальную к направлению движения); C' – эмпирический коэффициент, зависящий от формы тела.

Формула Ньютона (15) достаточно точно описывает движение крупных тел с высокими скоростями. Однако для малых тел и низких скоростей сила сопротивления пропорциональна скорости в первой степени и зависит от вязкости среды μ . Для шара диаметром δ сила сопротивления имеет вид:

$$\vec{F} = 3\pi\mu v \delta. \quad (16)$$

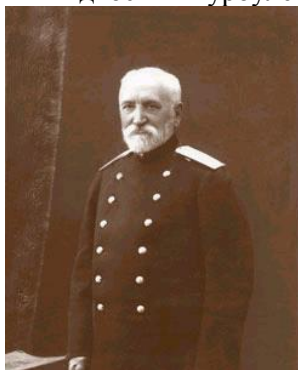
Формула (16), определяющая силу сопротивления при движении с малыми скоростями, была впервые получена Дж. Стоксом² и носит его имя.



СТОКС, ДЖОРДЖ ГАБРИЕЛ
George Gabriel, 1819–1903

² СТОКС, ДЖОРДЖ ГАБРИЕЛ (Stokes, George Gabriel) (1819–1903), английский физик и математик. Родился 13 августа 1819 в Скрине (Ирландия). В 1841 окончил Кембриджский университет, с 1849 – профессор математики этого университета. Работы Стокса относятся к области гидродинамики, оптики, спектроскопии, математической физики. В 1845 Стокс разработал математическую теорию движения вязких жидкостей. Вывел формулу (1851) для силы сопротивления, действующей на твердый шар малого размера при его движении в вязкой среде. Стокс внес значительный вклад в математику: исследовал сходимость бесконечных рядов. С 1885 по 1890 был президентом Лондонского королевского общества.

Причина различий в законе сопротивления связана с особенностями движения жидкости или газа вблизи движущегося тела. Впервые о двух видах движения слоистом и вихревом, которые определяют механизм трения, высказался русский инженер Н.П. Петров³. Он обосновал гипотезу И. Ньютона о пропорциональности напряжения трения внутри жидкости первой степени относительной скорости ее движения и дал возможность использовать эту гипотезу для изучения определенного режима течений вязких жидкостей, названных позднее ламинарными течениями. Он указал также на возможность существования другого режима течения жидкости – турбулентного.



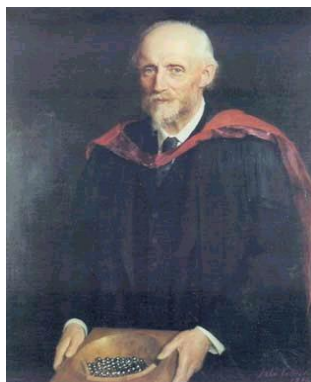
ПЕТРОВ НИКОЛАЙ ПАВЛОВИЧ
(1836 – 1920)

³ Петров Николай Павлович [13(25).5.1836, Трубчевск Орловской губернии, ныне Брянской области, — 15.1.1920, Туапсе], русский учёный и инженер в области ж.-д. транспорта, почётный член Петербургской АН (1894), инженер-генерал-лейтенант. С 1871 профессор Петербургского практического технологического института. На основе исследований трения в вагонных подшипниках пришёл к созданию основ гидродинамической теории смазки, сформулировал закон трения при смазке. Эти вопросы изложены в труде «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» (1883), за который он удостоен Ломоносовской премии АН (1884). Исследовал методы тяговых расчётов поездов, давление колёс на рельсы и их прочность, напряжения в колёсных парах, действие тормозных систем и др. В 1888—92 председатель Управления казённых железных дорог России, с 1892 председатель инженерного совета министерства путей сообщения, с 1893 в течение нескольких лет товарищ министра. Активно участвовал в строительстве Транссибирской магистрали.

Н.П. Петров тщательно проанализировал причины противоречий в результатах опытов ряда исследователей, и доказал, что наблюдаемое до него несоответствие закона Ньютона произведённым опытам, является следствием возникновения вихревого движения. Эта мысль Н.П. Петрова в наше время является общепризнанной.

Несколько лет позднее она была высказана в работах английского учёного-гидродинамика О Рейнольдса⁴ (1883г.), который ввел в практику знаменитый критерий, названный в последствие его именем:

$$Re = \frac{\rho v \delta}{\mu}. \quad (17)$$



РЕЙНОЛЬДС, ОСБОРН
(Reynolds, Osborne) (1842–1912)

⁴ РЕЙНОЛЬДС, ОСБОРН (Reynolds, Osborne) (1842–1912), английский инженер и физик. Родился в Белфасте 23 августа 1842. С 1868 по 1905 – профессор кафедры строительной механики Манчестерского университета. С 1888 возглавлял Витвортовскую инженерную лабораторию. Работы Рейнольдса посвящены механике, гидродинамике, теплоте, электричеству, магнетизму. В 1883 Рейнольдс установил, что ламинарное течение переходит в турбулентное, когда введенная им безразмерная величина превышает критическое значение. Число Рейнольдса широко используется при решении задач гидро- и аэродинамики в случае малых и средних дозвуковых скоростей.

Если схемы визуальных наблюдений за картиной обтекания шара поставить в соответствие значению числа Рейнольдса Re , то это будет выглядеть примерно так, как изображено на рис. 1.

Для малых чисел Рейнольдса Re картина обтекания имеет слоистый характер, для больших – вихревой.

В результате открытия Рейнольдса весь опыт, накопленный ранее, стал выстраиваться в стройную систему.

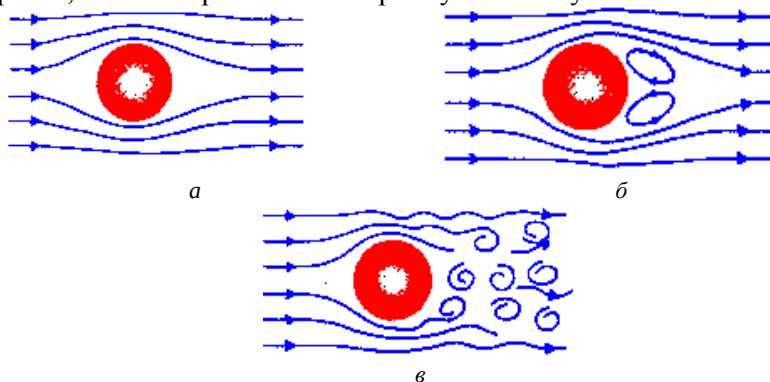


Рис. 1. Характерные картины обтекания шарообразной частицы.
 $a — Re < 1$; $б — 1 < Re < 600$ $в — 600 < Re$

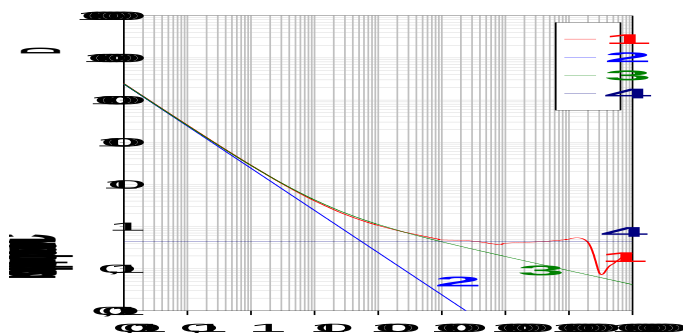
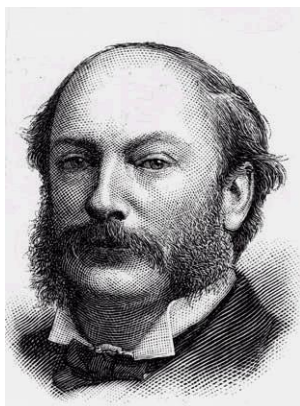


Рис. 2 Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. 1 – кривая Рэлея, 2 – закон сопротивления Стокса (уравнение (18)), 3 – закон сопротивления Клячко (уравнение (20)), 4 – закон сопротивления Ньютона (уравнение (21))

Рэлей⁵ систематизировал опытные данные для шара в виде функции $C_D(Re)$, где C_D – коэффициент сопротивления в уравнении (13). На рис. 2 этой зависимости соответствует кривая 1. Кривая 2 соответствует уравнению Стокса (16) и согласуется с кривой 1 до $Re < 1$. Коэффициент сопротивления одиночных твердых частиц C_D простейшем случае является однозначной функцией числа Re .



РЭЛЕЙ, ДЖОН УИЛЬЯМ
(Rayleigh, John William) (1842–1919)

Зависимость $C_D(Re)$ в этом случае называется стандартной кривой сопротивления и имеет четыре характерных участка (режима сопротивления).

⁵ РЭЛЕЙ, ДЖОН УИЛЬЯМ (Rayleigh, John William) (1842–1919), английский физик. В 1879 стал профессором экспериментальной физики Кембриджского университета, в 1884 – секретарем Лондонского королевского общества, с 1905 – президент Лондонского королевского общества, с 1908 – президент Кембриджского университета. Рэлей занимался теорией колебаний, акустикой, теорией теплового излучения, молекулярной физикой, электромагнетизмом, оптикой. В 1894 Рэлей совместно с У.Рамзаем открыл новый химический элемент – аргон, определил его свойства, установил место в периодической системе элементов. За эту работу в 1904 был удостоен Нобелевской премии по физике. В 1900 получил зависимость распределения энергии в спектре абсолютно черного тела от температуры (закон Рэля – Джинса).

1. Стоксовский режим ($Re < 1$)

При низких Re поток практически симметричен относительно плоскости симметрии, ортогональной к направлению движения, так как инерциальные силы слишком малы, чтобы воспрепятствовать смыканию линий тока позади частицы.

Для этого режима решение уравнений Навье-Стокса в пренебрежении и инерциальными членами дает формулу Стокса:

$$C_D = \frac{24}{Re}. \quad (18)$$

2. Переходный режим ($1 < Re < 10^3$)

С ростом Re увеличивается влияние сил инерции, и картина обтекания теряет симметрию. При $Re \sim 10 \div 25$ потока и за частицей образуется зона с замкнутыми линиями тока или со стационарным кольцевым вихрем. При дальнейшем увеличении Re ($Re \sim 300 \div 700$). Вихревые кольца, образующиеся в отрывной зоне, срываются и уносятся в след, а на их месте возникают новые.

В переходной области кривая сопротивления описывается различными формулами. В частности, стандартную кривую сопротивления можно аппроксимировать степенными зависимостями Бабухи – Шрайбера:

$$C_D = \frac{A}{Re^n}$$
$$A = 26.3, \quad n = 0.8 \quad \text{для} \quad 1 < Re < 10; \quad (19)$$
$$A = 12.3, \quad n = 0.5 \quad \text{для} \quad 10 < Re < 1000.$$

В переходной области также часто используется формула Клячко:

$$C_D = \frac{24}{Re}(1 + Re). \quad (20)$$

3. Ньютоновский режим ($Re > 10^3$)

При $Re > 10^3$ картина обтекания в некоторой степени стабилизируется, что в первом приближении приводит к независимости C_D от Re :

$$C_D \approx 0.44 = \text{const} . \quad (21)$$

4. Кризис сопротивления ($Re > 1.5 \cdot 10^5$)

При $Re > 1.5 \cdot 10^5$ имеет место кризис сопротивления, который характеризуется резким падением значений коэффициента сопротивления и связан с турбулизацией пограничного слоя и резким смещением точки отрыва в кормовую область. Этот эффект впервые обнаружил Эйфель⁶ (1912г.).



ЭЙФЕЛЬ, АЛЕКСАНДР ГЮСТАВ
(Eiffel, Alexandre Gustave) (1832–1923)

Для расчета коэффициента сопротивления в этом диапазоне чисел

Рейнольдса можно использовать формулы:

⁶ ЭЙФЕЛЬ, АЛЕКСАНДР ГЮСТАВ (Eiffel, Alexandre Gustave) (1832–1923), французский инженер. Родился 15 декабря 1832 в Дижоне. Окончил Центральную школу искусств и ремесел в Париже (1855). Специализировался на возведении металлических конструкций. Мировую известность Эйфелю принесло сооружение стальной решетчатой башни для Всемирной выставки 1889 в Париже. Эта башня высотой 300 м, носящая имя ее создателя, многие годы оставалась самым высоким сооружением в мире. С 1900 интересы Эйфеля сосредоточились на вопросах аэродинамики. Эйфель издал ряд книг по аэродинамике, в которых изложил результаты своих исследований, привел аэродинамические характеристики различных моделей самолетов, аэродинамических поверхностей и тел различной формы и разработал теорию летательных аппаратов тяжелее воздуха.

$$C_D = \begin{cases} 28.18 - 5.3 \lg Re & \text{для } 1.5 \cdot 10^5 < Re \leq 2 \cdot 10^5 \\ 0.1 \lg Re - 0.46 & \text{для } 2 \cdot 10^5 < Re \leq 5 \cdot 10^5 \\ 0.19 - 4 \cdot 10^{-4} Re^{-1} & \text{для } 5 \cdot 10^5 \leq Re \end{cases} \quad (22)$$

Влияние стенок на движение одиночной дисперсной частицы

При движении твердой частицы вблизи твердых стенок картина обтекания частицы существенно изменяется. При этом изменяется величина силы сопротивления, действующей на частицу. Взаимодействие частицы со стенками сосуда, в котором она движется, зависит от формы, начального движения и ориентации частицы, а также от геометрических особенностей стенок. Аналитическое решение задачи о движении одиночной частицы в жидкости с учетом влияния твердых стенок получено для малых чисел Рейнольдса, когда инерционными силами можно пренебречь.

Для сферической частицы, движущейся параллельно стенке при малых значениях числа Рейнольдса $Re < 1$ (рис. 3,а), коэффициент сопротивления определяется зависимостью, предложенной Факсенем в 1923г:

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 - \frac{9}{16} \left(\frac{\delta}{2h} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{2h} \right)^3 - \frac{45}{256} \left(\frac{\delta}{2h} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{\delta}{2h} \right)^5 \right]^{-1}, \quad (23)$$

где h – расстояние от центра масс частицы до стенки.

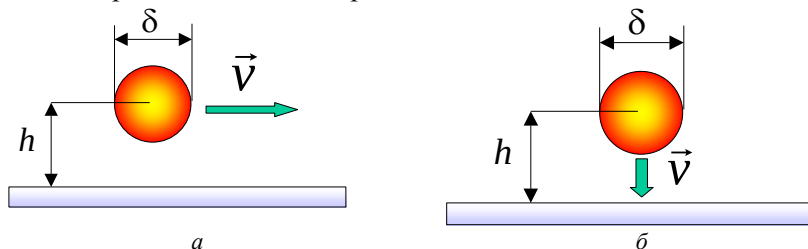


Рис. 3 Схемы движения частицы около стенки: а – параллельно стенке, б – по нормали

Бреннер (1961) исследовал случай движения частицы по нормали к стенке при малых значениях числа Рейнольдса $Re < 1$ (рис. 3,б).

В этом случае коэффициент сопротивления определяется как:

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{\delta}{2h} \right] \dots \dots \dots (24)$$

Нестационарный стоковский режим осаждения

Рассмотрим осаждение дождевых капель в режиме сопротивления Стокса. В этом случае коэффициент сопротивления C_D может быть рассчитан по формуле (18), а уравнение движения (5) примет вид:

$$\frac{\pi}{6} \delta^3 \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\pi}{6} \delta^3 \rho \vec{g} - 3\pi\mu\delta\vec{v}. \quad (26)$$

Для определения характеристик движения выпишем начальные условия: $t = 0$: $v = 0$, $z = H$.

В качестве масштабных величин выберем скорость седиментации характеризующей скорость движения капли в сопротивляющейся среде, время седиментации t_s и длина седиментации l_s . Эти масштабы в режиме сопротивления Стокса могут быть определены следующим образом:

$$v_s = \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g \delta^2, \quad t_s = \frac{\rho}{\rho - \rho_p} \frac{v_s}{g}, \quad l_s = v_s t_s. \quad (28)$$

С учетом введенных масштабов уравнение движения капли (26) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{v - v_s}{t_s}. \quad (29)$$

Интегрирование уравнения (29) с начальными условиями (27) позволяет определить изменение скорости капли со временем, а также закон ее движения.

$$v = v_s \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{t_s} \right) \right), \quad z = H - v_s \left(t + t_s \exp \left(-\frac{t}{t_s} \right) - t_s \right). \quad (30)$$

На рис. 4 показано изменение скорости частиц различного размера с течением времени. Из рисунка видно, что сначала происходит увеличение скорости движения капли, затем скорость выходит на практически постоянное значение близкое к v_s . С увеличением диаметра капли время выхода на стационарный режим увеличивается, также увеличивается и скорость капли.

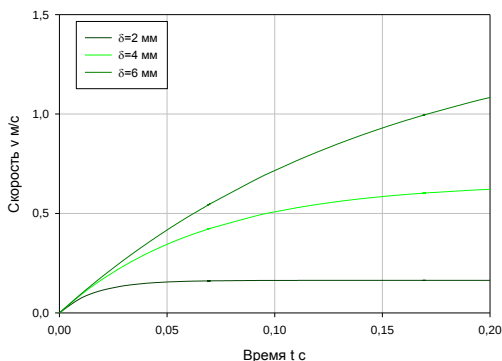


Рис. 4. Изменение скорости капель различного размера с течением времени (режим сопротивления Стокса)

Проведем расчеты скорости для разных диаметров капель воды. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

$\delta, \text{мм}$	0,1	0,4	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$v, \text{м/с}$	0,30	4,81	30,0	120,4	270,9	481,5	752,5
Re	1,65	106,4	165,9	1331,8	4495,0	10652	20796

Как видно из таблицы для капель с диаметром более 0.4мм числа $Re \gg 1$, то есть стоксовская зависимость дает лишь оценочные результаты. Поэтому для более точных расчетов необходимо использовать более сложную формулу для

коэффициента аэродинамического сопротивления C_D , учитывающую переходный и ньютоновский режимы.

Следует отметить, что результаты представленные в таблице 1 получены без учета изменения параметров атмосферы по высоте. С целью учета этих зависимостей, а так же с целью определения параметров движения капли в период ускоренного движения необходимо численное решение уравнений движения капли.

Нестационарный ньютоновский режим осаждения

Рассмотрим осаждение капли в режиме сопротивления Ньютона. В этом случае коэффициент сопротивления C_D может быть рассчитан по формуле (21), а уравнение движения примет вид:

$$\frac{\pi}{6} \delta^3 \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\pi}{6} \delta^3 \rho \vec{g} - \frac{\pi}{18} \rho \delta^2 |\vec{v}| \vec{v}. \quad (31)$$

Для определения характеристик движения выпишем начальные условия:

$$t = 0: \quad v = 0, \quad z = H. \quad (32)$$

Скорость седиментации V_s , время седиментации t_s и длина седиментации l_s в режиме сопротивления Ньютона будут равны:

$$v_s = \sqrt{\frac{1}{3} \delta g}, \quad t_s = \frac{1}{3} \frac{\delta}{v_s}, \quad l_s = v_s t_s. \quad (33)$$

С учетом введенных масштабов уравнение движения капли (31) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{v^2 - v_s^2}{v_s t_s}. \quad (34)$$

Интегрирование уравнения (34) с начальными условиями (32) позволяет определить изменение скорости капли со временем, а также закон ее движения.

$$v = v_s \frac{\left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{2t}{t_s}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2t}{t_s}\right)} \right)}{1} = v_s \operatorname{th}\left(\frac{t}{t_s}\right),$$

$$z = H - v_s \left(t_s \ln \left(\frac{1}{2} \left(\exp\left(-\frac{2t}{t_s}\right) + 1 \right) \right) + t \right). \quad (35)$$

На рис. 5 показано изменение скорости каплей различного размера с течением времени.

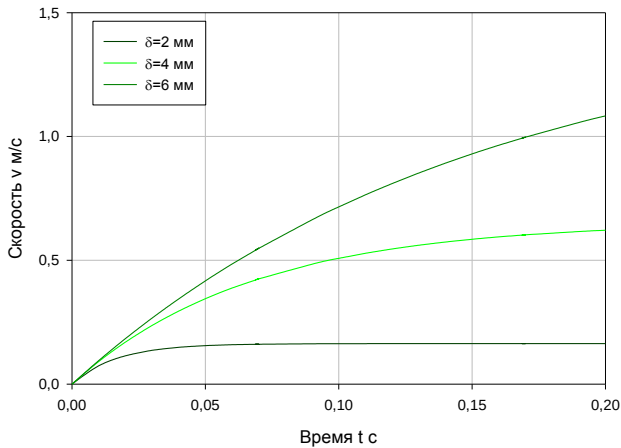


Рис. 5. Изменение скорости капель различного размера с течением времени (режим сопротивления Ньютона)

Из рисунка видно, что изменение скорости с течением времени в режиме сопротивления Ньютона аналогично зависимостям, полученным для режима сопротивления Стокса: сначала происходит увеличение скорости движения капли, затем скорость выходит на практически постоянное значение близкое к v_s .

увеличением диаметра капли время выхода на стационарный режим увеличивается, также увеличивается и скорость капли.

Стационарное осаждение капель в переходном режиме

В переходной области кривая сопротивления описывается различными формулами. В частности, стандартную кривую сопротивления можно аппроксимировать степенными зависимостями Бабухи – Шрайбера:

$$C_D = \frac{A}{Re^n}$$

$$A = 26.3, \quad n = 0.8 \quad \text{для} \quad 1 < Re < 10; \quad (36)$$

$$A = 12.3, \quad n = 0.5 \quad \text{для} \quad 10 < Re < 800.$$

К сожалению аналитическое интегрирование уравнения движения капли с законом сопротивления, определяемым формулой (33) не является возможным. Однако, поскольку время выхода капли на режим стационарного осаждения мало, достаточно определить только скорость стационарного осаждения.

Для оценки скорости стационарного осаждения капль использовано уравнение (3.6) в котором предполагается $d\vec{v}/dt = 0$. Пренебрегая силой Архимеда в виду ее малости, это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{1}{6} \pi d_p^3 \rho_p \vec{g} = \frac{C_D}{8} \pi \delta_p^2 \rho |\vec{v}| \vec{v}. \quad (37)$$

После некоторых преобразований получим следующие выражения для стационарной скорости осаждения:

$$v_s = \left[\frac{4}{3} A^{-1} (\rho_p - \rho) \rho g \right]^{5/6} \frac{\delta_p^{3/2}}{\rho \mu^{4/6}} \quad \text{для} \quad 1 < Re < 10; \quad (38)$$

$$v_s = \left[\frac{4}{3} A^{-1} (\rho_p - \rho) \rho g \right]^{2/3} \frac{\delta_p}{\rho \mu^{1/3}} \quad \text{для} \quad 10 < Re < 800. \quad (39)$$

Результаты вычислений скорости стационарного осаждения приведены в таблице 2 при следующих значениях физических

величин: $\rho=1.205 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха, $\mu=1.808 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м} \cdot \text{сек}$ – динамическая вязкость газа, $\rho_p=1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды.

Таблица 2

D, мм	0,1	0,2	0,4	0,6	0,1
v, м/с	0,25	0,69	1,59	2,45	3,8
Re	1,66	9,204	42,42	98,04	253,4

Примеры

Пример 1. С какой скоростью должен лететь волейбольный мяч, чтобы его коэффициент сопротивления был равен $C_D = 0.09$.

Данное значение коэффициента сопротивления соответствует кризису сопротивления. С помощью формулы (22) определим число Рейнольдса: $Re = 10^{(0.46+0.09)/0.1} = 398107$.

Формула (17) позволяет определить скорость, если известно число Рейнольдса, плотность и вязкость воздуха, а также диаметр мяча. Воздух при комнатной температуре имеет плотность $\rho = 1.25 \text{ кг/м}^3$ и вязкость $\mu = 19 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$. При диаметре волейбольного мяча $\delta = 0.2 \text{ м}$ искомая скорость будет равна:

$$v = \frac{Re \mu}{\delta \rho} = \frac{398107 \cdot 19 \cdot 10^{-6}}{0.2 \cdot 1.25} = 30.25 \text{ м/с}.$$

Полученное значение скорости соответствует полету мяча при так называемой в волейболе силовой подаче.

Пример 2. Определить скорость равномерного падения сферической частицы диаметром $\delta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, плотностью $\rho_p = 1000 \text{ кг/м}^3$ в воздухе с $\rho = 1.25 \text{ кг/м}^3$ и $\mu = 19 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Скорость стационарного осаждения частицы зависит от режима сопротивления, который в свою очередь зависит от скорости движения (точнее от значения числа Рейнольдса).

Вычислим скорость стационарного осаждения частицы для различных режимов сопротивления (диапазонов изменения числа Рейнольдса) и соответствующее значение числа Рейнольдса.

Для $Re < 1$ скорость стационарного осаждения равна

$$v_s = \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g \delta^2 = 114.6 \text{ м/с.}$$

Соответствующее этой скорости число

Рейнольдса равно: $Re = \frac{\rho v_s \delta}{\mu} = 15078$. Так как рассчитанное

число Рейнольдса выходит за рамки определения закона сопротивления, можно сделать вывод, что режим сопротивления частицы не является стоксовским.

Рассмотрим переходную область сопротивления для $1 < Re < 10$. В этом случае скорость осаждения частицы и рассчитанное по этой скорости число Рейнольдса соответственно

равны:
$$v_s = \left[\frac{4\rho g}{3 \cdot 26.3} (\rho_p - \rho) \right]^{5/6} \frac{\delta_p^{3/2}}{\rho \mu^{4/6}} = 21.36 \text{ м/с}, \quad Re = 2810.$$

Таким образом, данный закон сопротивления не описывает движение частицы.

Если предположить, что число Рейнольдса, характеризующее движение частицы лежит в диапазоне $10 < Re < 800$, то скорость стационарного осаждения будет равна

$$v_s = \left[\frac{4}{3 \cdot 12.3} (\rho_p - \rho) \rho g \right]^{2/3} \frac{\delta_p}{\rho \mu^{1/3}} = 7.24 \text{ м/с.}$$

Число Рейнольдса,

соответствующее этой скорости равно $Re = 953$, то есть также выходит за пределы диапазона определения зависимости, описывающей закон сопротивления.

Скорость стационарного осаждения в ньютоновском режиме $800 < Re$ может быть рассчитана как

$$v_s = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 0.44} \frac{\rho_p - \rho}{\rho}} g \delta = 6.89 \text{ м/с.}$$

Соответствующее этой

скорости число Рейнольдса равно $Re = 906.8$

Таким образом, стационарная скорость осаждения частицы происходит со скоростью $v_s = 6,89$ м/с. Процесс осаждения описывается ньютоновской зависимостью.

Пример .3. Определить размер частиц плотностью $\rho_p = 2600$ кг/м³, осаждение которых в воздухе или в воде подчиняется закону Стокса.

Скорость стационарного осаждения в режиме сопротивления Стокса определяется зависимостью (25) и равна $v_s = \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g \delta^2$. Закон сопротивления Стокса справедлив для чисел Рейнольдса $Re = \frac{\rho v_s \delta}{\mu} < 1$. Таким образом, должно выполняться соотношение

$$Re = \frac{\rho \delta}{\mu} \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g \delta^2 < 1.$$

Разрешая полученное соотношение относительно диаметра частицы, получим:

$$\delta < \sqrt[3]{18 \frac{\mu^2}{\rho(\rho_p - \rho)g}}.$$

Если частица осаждается в воздушной среде с параметрами $\rho = 1.25$ кг/м³ и $\mu = 19 \cdot 10^{-6}$ Па·с, то режим сопротивления Стокса будет иметь место для частиц диаметр которых не превышает

$$\delta < \sqrt[3]{18 \frac{\mu^2}{\rho(\rho_p - \rho)g}} = \sqrt[3]{18 \frac{(19 \cdot 10^{-6})^2}{1.25(2600 - 1.25)9.81}} = 5.89 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Если частица осаждается в воде ($\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с), то максимальный размер частицы, допускающий осаждение в режиме Стокса равен $\delta = 1.05 \cdot 10^{-4}$ м.

Численный метод

Систему дифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки, можно представить в каноническом виде в так называемой форме Коши:

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_k(t=0) = y_{k0}. \quad (40)$$

Решение уравнений (40) осуществляется методом Рунге⁷-Кутты⁸-Мерсона четвертого порядка точности.



РУНГЕ КАРЛ ДАВИД ТОЛЬМЕ (Runge Karl David Tolme),
1856 — 1927

⁷ Рунге Карл Давид Тольме (Runge Karl David Tolme) (1856, Бремен — 3.1.1927). Немецкий физик и математик. Учился в Мюнхенском (1876—77) и Берлинском (1878—80) университетах. Работал в Берлине, Ганновере, Гёттингене. Основные математические труды относятся к численным методам решения дифференциальных уравнений.

⁸ Кутта Мартин Вильгельм (Kutta Martin Wilhelm), (3.11.1867 - 25.12.1944) Немецкий физик и математик. Работал в Высшей технической школе в Штутгарте. В математике развил (1901) метод К. Рунге) численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.



КУТТА МАРТИН ВИЛЬГЕЛЬМ (Kutta Martin Wilhelm),
1867 - 1944

Схему решения можно привести к следующему виду, удобному для программирования:

$$y_K(t_0 + h) = y_{K0} + \frac{1}{2}(q_{K4} + q_{K5}) + O(h^5), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} q_{K1} &= \frac{1}{3} h f_K(t_0, y_0), \\ q_{K2} &= \frac{1}{3} h f_K\left(t_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + q_{K1}\right), \\ q_{K3} &= h f_K\left(t_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{2}(q_{K1} + q_{K2})\right), \\ q_{K4} &= q_{K4} + \frac{4}{3} h f_K\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{3}{8}(q_{K1} + q_{K3})\right), \\ q_{K5} &= \frac{1}{3} h f_K\left(t_0 + h, y_0 + \frac{3}{2}(q_{K4} - q_{K3})\right). \end{aligned}$$

Схема Мерсона требует на каждом шаге вычислять правую часть обыкновенного дифференциального уравнения в пяти точках. При этом за счет только одного дополнительного коэффициента по сравнению с классической схемой Рунге-Кутты на каждом шаге можно определить погрешность решения R_s по формуле

$$R_s = \frac{1}{10}(2q_4 - 3q_3 - q_5). \quad (42)$$

Для автоматического выбора шага интегрирования используется следующий критерий. Если абсолютное значение величины R_s , вычисленное по формуле(14), окажется больше допустимой заданной погрешности ε : $|R_s| > \varepsilon$, то шаг интегрирования h уменьшается в два раза и вычисления по схеме (27) повторяются. При условии $|R_s| < \frac{1}{32}\varepsilon$ шаг h можно удвоить.

Автоматический выбор шага позволяет значительно сократить время вычислений.

Описание программы

Программа *RUNGE* предназначена для решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными значениями методом Рунге—Кутта четвертого порядка. Входные данные программы: число уравнений в системе *NDIM*, начальные значения $X0, Y0(I), I=1, 2, 3, \dots, NDIM$; конечное значение независимой переменной XF ; шаг интегрирования H , конечное значение шага интегрирования $HOUT$, величина допуска, входящего в критерий устойчивости TOL . Программа печатает входные данные для контроля, а также таблицу, содержащую рассчитанные значения $Y(I)$ и значения переменной X от $X0$ до XF с шагом $HOUT$. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = DERY(1),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = DERY(2),$$

$$\frac{dy_n}{dt} = F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = DERY(n)$$

с начальными значениями $x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)$. Программа *RUNGE* вычисляет решение этой системы в точках X от X_0 до X_F , взятых с шагом $HOUT$, с помощью следующей процедуры:

1. С использованием начальных значений вычисляется приближенное решение в точке $X = X_0 + H$ методом четвертого порядка.

2. Для оценки погрешности полученной аппроксимации метод с шагом $H/2$ применяется из исходной точки дважды, а затем полученный результат сравнивается с предыдущим по формуле

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i(H/2) - y_i(H)}{y_i(H/2)} \right|,$$

где $y_i(H)$ и $y_i(H/2)$ являются решениями, полученные с шагом H и $H/2$ соответственно. Если эта сумма оказывается меньше заданной величины допуска TOL , то полученное решение считается устойчивым.

3. Если X имеет одно из значений $X_0 + j \cdot HOUT$, $j = 1, 2, 3, \dots$, то программа печатает решение. В противном случае формируются новые начальные значения $X_0 = X + H_0$, $y_{i_0} = y_{i_0}(X + H_0)$, и процедура возобновляется с пункта 1.

4. Если полученное решение неустойчиво, шаг интегрирования еще раз делится пополам, метод применяется из исходной точки четыре раза и полученное решение сравнивается с предыдущим. Допускается выполнение $ITMAX$ итераций, и, если после этого устойчивое решение не будет получено, программа прекращает работу.

Текст программы

! MAIN PROGRAMM RUNGE

! организация программы:

! основная программа – ввод данных и вывод результатов,
управление

! итеративной процедурой,

! подпрограмма FCT – формирование правых частей
дифференциальных

! уравнений,

! подпрограмма RK4-реализация метода Рунге - Кутты
четвертого

! порядка

! Обозначения

! NDIM - число дифференциальных уравнений,

! XO - начальное значение независимой переменной,

! XF - конечное значение независимой переменной,

! HO - начальная величина шага интегрирования,

! HOUT - шаг изменения независимой переменной,

! TOL - допуск, входящий в критерий устойчивости,

! ITMAX - максимально допустимое число делений шага
пополам,

! SUM - сумма относительных изменений компонент
вектора

! решения

! YO(10) - начальные значения Y

! YHOLD(10) - рабочий массив

! Y(10) - решение системы

! DERY(10) - правые части дифференциальных уравнений

! (подпрограмма FCT)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

        DIMENSION Y(6),YHOLD(6),YO(6)

        OPEN(1, FILE='OUTPUT.TXT')

! ВВОД НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ
        WRITE(*,'(2X,"NDIM= ",$)')
        READ(*,*) NDIM
        WRITE(*,'(2X,"XO = ",$)')
        READ(*,*) XO
        WRITE(*,'(2X,"XF = ",$)')
        READ(*,*) XF
        WRITE(*,'(2X,"HOUT= ",$)')
        READ(*,*) HOUT
        WRITE(*,'(2X,"HO = ",$)')
        READ(*,*) HO
        WRITE(*,'(2X,"TOL = ",$)')
        READ(*,*) TOL

        DO I=1,NDIM
        WRITE(*,'I= ', '(2X,"YO(I)= ",$)')
        READ(*,*) YO(I)
        END DO

! ПЕЧАТЬ ВХОДНЫХ ДАННЫХ
        WRITE(1,*) 'NDIM= ', NDIM
        WRITE(1,*) 'HO = ', HO
        WRITE(1,*) 'HOUT= ', HOUT
        WRITE(1,*) 'TOL = ', TOL
        H=0.
        WRITE(1,66) XO,H,(YO(I), I=1,10)

!  ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ
        NOUT=DABS((XF-XO)/HOUT)
        NINT=HOUT/HO
        ITMAX=10

```

! ВНЕШНИЙ ЦИКЛ 100 ПРЕДНАЗНАЧЕН ДЛЯ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШАГА HOUT
DO 100 IOUT=1,NOUT

! СРЕДНИЙ ЦИКЛ 10 ПРЕДНАЗНАЧЕН ДЛЯ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШАГА H
DO 10 I=1,NINT
K=1

! ВЫЗОВ ПОДПРОГРАММЫ RK4 ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ
ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
CALL RK4(XO,YO,YHOLD,HO,NDIM,K)

! ВНУТРЕННИЙ ЦИКЛ 20 ПРЕДНАЗНАЧЕН ДЛЯ
КОНТРОЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ

! ПЕРВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

DO 20 IHLF=1,ITMAX
K=2*K
H=HO/K
CALL RK4(XO,YO,Y,H,NDIM,K)

SUM=0.
DO 40 IJK=1,NDIM
SUM=SUM+DABS(Y(IJK)-YHOLD(IJK))

40 CONTINUE
IF(SUM.LT.TOL)GOTO 50
DO 45 KJJ=1,NDIM
YHOLD(KJJ)=Y(KJJ)

45 CONTINUE
20 CONTINUE

! ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПОСЛЕ ITMAX
ИТЕРАЦИЙ

WRITE(1,*)'SOLUTION IS UNSTABLE'
STOP

50 XO=XO+HO

```

        DO 60 KJJ=1,NDIM
        YO(KJJ)=Y(KJJ)
60    CONTINUE
10    CONTINUE
        WRITE(1,66)XO,H,(Y(KJJ),KJJ=1,NDIM)
100   CONTINUE
        HOUT=(XF-XO)/4.
        IF(HOUT .LT. H) GOTO 13
        WRITE(1,66)XO,H,(Y(KJJ),KJJ=1,NDIM)
66    FORMAT(26(E8.3,3X))
        END

```

! RK4

! ПОДПРОГРАММА, РЕАЛИЗУЮЩАЯ МЕТОД РУНГЕ-
КУТТЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

```

SUBROUTINE RK4(XO,YO,Y,H,NDIM,K)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(60),YY(60),YO(60),DERY(60),RK(60)
X=XO
DO 2 I=1,NDIM
Y(I)=YO(I)
2  CONTINUE
DO 100 JJ=1,K
CALL FCT(X,Y,DERY)
DO 10 I=1,NDIM
YY(I)=Y(I)+H*DERY(I)/2.
RK(I)=DERY(I)
10  CONTINUE
X=X+H/2.
CALL FCT(X,YY,DERY)
DO 20 I=1,NDIM
YY(I)=Y(I)+H*DERY(I)/2.
RK(I)=RK(I)+2.*DERY(I)
20  CONTINUE

```

```

      CALL FCT(X,YY,DERY)
      DO 30 I=1,NDIM
      YY(I)=Y(I)+H*DERY(I)
      RK(I)=RK(I)+2.*DERY(I)
30   CONTINUE
      X=X+H/2
      CALL FCT(X,YY,DERY)
      DO 40 I=1,NDIM
      RK(I)=H*(RK(I)+DERY(I))
      Y(I)=Y(I)+RK(I)/6.
40   CONTINUE
100  CONTINUE
      RETURN
      END

```

! FCT

! РАСЧЕТ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

```

      SUBROUTINE FCT(X,Y,DERY)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION
DERY(10),Y(10),FORCE(3,10),WIND(3),FORCES(3)

```

```

      SMALL=1.E-30
      PI=4.*ATAN(1.)
      DENAIR=1.2
      DENPART=2.
      VISCOSITY=0.000019
      GRAVITY=9.81
      DIAMETER=0.1
      AREA=PI*DIAMETER**2
      VOLUME=AREA*DIAMETER/6.
      WIND(1)=0.
      WIND(2)=0.

```

```

WIND(3)=2.*DMAX1(Y(6),SMALL)*1.25

NFORCES=2
DO J=1,3
FORCES(J)=0.
END DO

! ARCHIMEDES FORCE
IARCHIMEDE=1
FORCE(1,IARCHIMEDE)=0.
FORCE(2,IARCHIMEDE)=0.
FORCE(3,IARCHIMEDE)=(DENAIR/DENPART-
1.)*GRAVITY

! DRAG FORCE
IDRAG=2
VELREL=SQRT((Y(1)-WIND(1))**2+(Y(3)-
WIND(2))**2+(Y(5)-WIND(3))**2)

REY=DENAIR*DIAMETER/VISCOSITY
REYNOLDS=REY*VELREL
CDRAG=24./REY
!+3.73/DSQRT(REY)*DSQRT(VELREL)+(0.49-
0.00483*DSQRT(REYNOLDS)/(1+0.000003*REYNOLDS))*VELRE
L

FORCE(1,IDRAG)=AREA/(2.*VOLUME)*CDRAG*(WIND(1)-Y(1))
FORCE(2,IDRAG)=AREA/(2.*VOLUME)*CDRAG*(WIND(2)-Y(3))
FORCE(3,IDRAG)=AREA/(2.*VOLUME)*CDRAG*(WIND(3)-Y(5))

! MAIN FORCE VECTOR
DO NFORCE=1,NFORCES
DO J=1,3

```

```
FORCES(J)=FORCES(J)+FORCE(J,NFORCE)
END DO
END DO
```

```
DERY(1)=FORCES(1)
DERY(2)=Y(1)
DERY(3)=FORCES(2)
DERY(4)=Y(3)
DERY(5)=FORCES(3)
DERY(6)=Y(5)
RETURN
END
```

Пример выполнения задания

Определить траекторию движения и зависимость изменения скорости от времени шара, брошенного под углом к горизонту.

При решении задачи учесть силу тяжести, силу Архимеда, силу сопротивления и действие ветра. Задать зависимость для определения коэффициента сопротивления. Направления скорости ветра совпадает с направлением оси OX . Скорость ветра определяется зависимостью: $v_x = 2z^{1.25}$ м/с.

Начальные условия:

$$\begin{array}{lll} t = 0.с & x = x_0 = 0 & v_x = v_{x,0} = 8 \text{ м/с} \\ & y = y_0 = 0 & v_y = v_{y,0} = 2 \text{ м/с} \\ & z = z_0 = 0 & v_z = v_{z,0} = 4 \text{ м/с} \end{array}$$

Данные для решения задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{диаметр шара:} & d = 0.1 \text{ м,} \\ \text{плотность шара:} & \rho = 2.0 \text{ кг/м}^3 \\ \text{плотность воздуха:} & \rho = 1.2 \text{ кг/м}^3 \\ \text{вязкость воздуха} & \mu = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с} \end{array}$$

Для решения задачи необходимо с учетом заданных сил записать подпрограмму FCT.

Далее следует запустить программу и ввести необходимую информацию: количество уравнений ($NDIM$), начальное время (TO), конечное время (TF), начальную величину шага интегрирования (HO), шаг изменения независимой переменной ($HOUT$), точность вычислений (TOL), а также координаты и проекции вектора скорости на координатные оси в начальный момент времени ($YO(I), I = 1, NDIM$).

При этом необходимо иметь в виду, что

1. $YO(1)$ - скорость v_x ,
2. $YO(2)$ координата x ,

3. YO(3) - скорость v_y ,
4. YO(4) - координата y ,
5. YO(5) - скорость v_z ,
6. YO(6) - координата z .

Пример диалогового окна приводится ниже (рис.6)

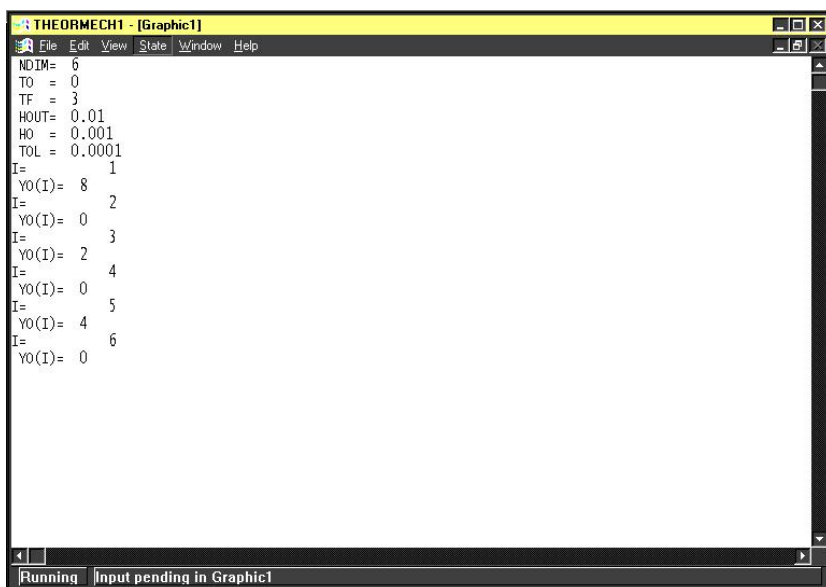


Рис.6 Пример диалогового окна

Ниже приводятся результаты расчета программы:

```

NDIM= 6
HO = 1.000000000000000E-003
HOUT= 1.000000000000000E-002
TOL = 1.000000000000000E-004
.0000E+00 .0000E+00 .8000E+01 .0000E+00 .2000E+01 .0000E+00 .4000E+01 .0000E+00
.1000E-01 .5000E-03 .7991E+01 .7995E-01 .1998E+01 .1999E-01 .3956E+01 .3978E-01
.2000E-01 .5000E-03 .7982E+01 .1598E+00 .1995E+01 .3995E-01 .3913E+01 .7913E-01
.3000E-01 .5000E-03 .7973E+01 .2396E+00 .1993E+01 .5990E-01 .3869E+01 .1180E+00
.4000E-01 .5000E-03 .7964E+01 .3193E+00 .1991E+01 .7982E-01 .3826E+01 .1565E+00

```

.2260E+01	.5000E-03	.6183E+01	.1594E+02	.1546E+01	.3985E+01	-.3985E+01	-.3192E+00
.2270E+01	.5000E-03	.6176E+01	.1600E+02	.1544E+01	.4000E+01	-.4020E+01	-.3593E+00
.2280E+01	.5000E-03	.6169E+01	.1606E+02	.1542E+01	.4016E+01	-.4055E+01	-.3996E+00
.2290E+01	.5000E-03	.6162E+01	.1612E+02	.1540E+01	.4031E+01	-.4089E+01	-.4404E+00

На основе выполненных расчетов можно построить траекторию (рис. 7) зависимость скорости от времени (рис. 8).

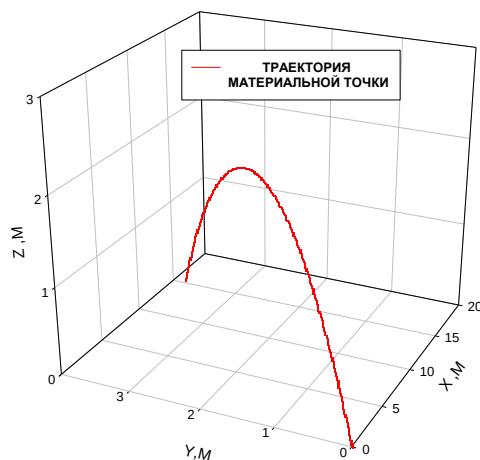


Рис. 7. Траектория материальной точки

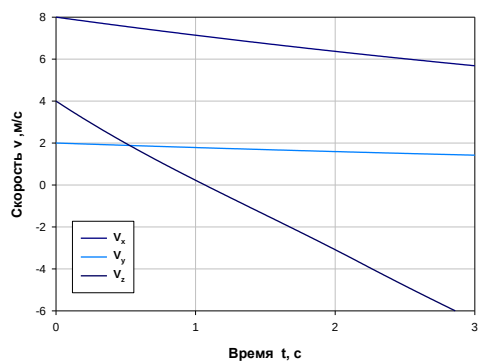


Рис. 8 Зависимость компонент скорости от времени

Задания

1. Определить траекторию движения и зависимость изменения скорости от времени сферической частицы плотностью $\rho_p = 1000 \text{ кг/м}^3$ и диаметром $\delta = 0.001 \text{ мм}$. Параметры среды: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. В начальный момент времени частица была неподвижна и находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Скорость движения жидкости определяется уравнениями:

	1	2	3	4	5
v_x	$2\sin(10t)$	$4t \cos(5t)$	$\frac{6\sin(4t)}{1+t}$	$2\sin^2(10t)$	$4\cos^3(5t)$
v_y	0	e^{-4t}	0	$\frac{6}{1+t}$	0
v_z	$1 - e^{-2t}$	0	$\frac{t+1}{t^2+1}$	0	$\frac{2}{1+e^{2t}}$

2. Определить траекторию и зависимость изменения скорости падения дождевой капли ($\rho_p = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\delta = 0.003 \text{ м}$.) в воздухе с параметрами $\rho = 1.25 \text{ кг/м}^3$ и $\mu = 19 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$. В начальный момент времени частица была неподвижна и находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1000 \text{ м}$. Скорость движения жидкости определяется уравнениями:

	1	2	3	4	5
v_x	$0.1z$	$0,002z^2$	$2\ln\left(\frac{z+1}{10}\right)$	$20\sin\left(\frac{\pi z}{500}\right)$	$5\sqrt{z}$
v_y	0	$4t \cos(5t)$	0	e^{-2t}	0
v_z	$4e^{-2t} \sin(5t)$	0	$4t \sin(8t)$	0	$2\cos(10t)$

3. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы в вихревом потоке ($\rho_p = 2600$ кг/м³). В начальный момент времени частица была неподвижна и находилась в точке с координатами $x_0 = 1$ м, $y_0 = 1$ м, $z_0 = 0$. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = 10(x^2 + y^2)\cos(5t)$ м/с, $v_y = -10(x^2 + y^2)\sin(5t)$, $v_z = 4e^{-2t}$. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно:

	1	2	3	4	5
δ_m	0.001	0.0001	0.0005	0.004	0.00005
ρ кг/м ³	1000	1.25	1500	0.75	1200
μ Па·с	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-4}$

4. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600$ кг/м³), движущейся по нормали к горизонтальной стенке. В начальный момент времени частица была неподвижна и находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1$ м. Жидкость неподвижна. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно:

	1	2	3	4	5
δ_m	0.001	0.0001	0.0005	0.004	0.00005
ρ кг/м ³	1000	1.25	1500	0.75	1200
μ Па·с	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-4}$

5. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600$ кг/м³) вблизи колеблющейся горизонтальной стенки ($z = 0$). В начальный момент времени частица была неподвижна и находилась в точке с

координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1$ м. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = v_0 e^{-\sqrt{\frac{\rho \omega t}{\mu}}} \cos(\omega t)$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м³. Диаметр частицы, вязкость среды и частота колебаний пластины равны соответственно:

	1	2	3	4	5
δ м	0.001	0.0001	0.0005	0.004	0.00005
μ Па·с	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-4}$
ω с ⁻¹	0.1	0.01	0.001	1	10

6. Определить траекторию и зависимость изменения скорости всплытия сферического пузыря ($\rho_p = 1.25$ кг/м³) вблизи колеблющейся горизонтальной стенки ($z = 0$). В начальный момент времени пузырь был неподвижен и находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = v_0 e^{-\sqrt{\frac{\rho \omega t}{\mu}}} \cos(\omega t)$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Вязкость среды равна $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Диаметр пузыря, плотность среды и частота колебаний пластины равны соответственно:

	1	2	3	4	5
δ м	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
ρ кг/м ³	1000	700	1200	1500	500
ω с ⁻¹	0.1	0.01	0.001	1	10

7. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферического пузыря ($\rho_p = 1.25$ кг/м³) в сдвиговом потоке воды. В начальный момент времени пузырек воздуха был неподвижен и находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1$ м. Скорость движения жидкости определяется

уравнениями: $v_x = \gamma z$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Вязкость и плотность среды равны $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 1000$ кг/м³. Диаметр и плотность частицы, а также интенсивность сдвига потока равны соответственно:

	1	2	3	4	5
δ_m	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
ρ_p кг/м ³	1000	700	1500	900	400
γ с ⁻¹	0.1	0.5	1.2	9	10

8. Определить траекторию движения и зависимость изменения скорости от времени сферической частицы плотностью $\rho_p = 2600$ кг/м³ и диаметром $\delta = 0.001$ м. Параметры среды: $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. В начальный момент времени частица была неподвижна и находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Скорость движения жидкости определяется уравнениями:

	1	2	3	4	5
v_x м/с	$2z$	$4z^2$	$8z^3$	$16z^4$	$\sqrt{z}$
v_y м/с	0	e^{-4t}	0	$\frac{6}{1+t}$	0
v_z м/с	$1 - e^{-2t}$	0	$\frac{t+1}{t^2+1}$	0	$\frac{2}{1+e^{2t}}$

9. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2500$ кг/м³) в сдвиговом потоке воды. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1$ м. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = \gamma z$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Диаметр, вязкость и плотность среды равны

$\delta = 0.001\text{ м}$, $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Компоненты скорости частицы в начальный момент времени равны соответственно:

	1	2	3	4	5
$v_{px} \text{ м/с}$	1	10	0.05	4	5
$v_{py} \text{ м/с}$	10	7	15	9	40
$v_z \text{ м/с}$	0.1	0.5	1.2	19	10

10. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферического пузыря ($\rho_p = 1.26 \text{ кг/м}^3$) в вихревом потоке. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = 10\sqrt{x^2 + y^2} \cos(5t) \text{ м/с}$, $v_y = -10\sqrt{x^2 + y^2} \sin(5t)$, $v_z = 4e^{-2z}$. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно $\delta = 0.001\text{ м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Координаты пузыря в начальный момент времени равны:

	1	2	3	4	5
$x_0 \text{ м}$	0	1	0	2	1
$y_0 \text{ м}$	0	1.	15	2	0
$z_0 \text{ м}$	0	0	2	3	0

11. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600 \text{ кг/м}^3$), движущейся параллельно вертикальной стенке ($x_w = 0.1\text{ м}$). В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0.99\text{ м}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1\text{ м}$. Жидкость неподвижна. Плотность жидкости равна $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Вязкость среды, диаметр

частицы, и компоненты ее скорости в начальный момент времени равны:

	1	2	3	4	5
μ Па·с	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-4}$
δ м	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
v_z м/с	0.1	0.5	1.2	19	10

12. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения пузырька воздуха ($\rho_p = 1.25 \text{ кг/м}^3$), движущейся параллельно вертикальной стенке ($x_w = 0.1 \text{ м}$). В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0.99 \text{ м}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1 \text{ м}$. Жидкость неподвижна. Диаметр частицы, вязкость среды равны соответственно: $\delta = 0.001 \text{ м}$, $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па·с}$. Плотность среды, диаметр частицы, и компоненты ее скорости в начальный момент времени равны:

	1	2	3	4	5
ρ кг/м ³	1000	700	1200	1500	500
δ м	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
v_z м/с	-0.1	-0.5	-1.2	-19	-10

13. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения пузырька воздуха ($\rho_p = 1.25 \text{ кг/м}^3$). В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1 \text{ м}$. Жидкость неподвижна. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно: $\delta = 0.001 \text{ м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па·с}$. На частицу действует внешняя сила с компонентами:

	1	2	3	4	5
F_x мН	10	7	12	1.5	50
F_y мН	0.1	10.	0.5	40	5
F_z мН	-1	5	2	19	-10

14. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600 \text{ кг/м}^3$). В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1 \text{ м}$. Жидкость неподвижна. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно: $\delta = 0.001 \text{ м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. На частицу действует внешняя сила с компонентами:

	1	2	3	4	5
$F_{x \text{ мН}}$	0.1	10.	0.5	40	5
$F_{y \text{ мН}}$	10	7	12	1.5	50
$F_{z \text{ мН}}$	-1	5	2	19	-10

15. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения пузырька воздуха ($\rho_p = 1.25 \text{ кг/м}^3$). В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1 \text{ м}$. Жидкость неподвижна. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно: $\delta = 0.001 \text{ м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. На частицу действует внешняя сила с компонентами:

	1	2	3	4	5
$F_{x \text{ мН}}$	$10 \sin(5t)$	7	2	$10 \sin(5t)$	$2 \sin(0.5t)$
$F_{y \text{ мН}}$	0.1	$10 \cos(50t)$	5	$10 \cos(50t)$	5
$F_{z \text{ мН}}$	0	5	$2 \sin(0.5t)$	9	$10 \cos(50t)$

16. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600 \text{ кг/м}^3$). В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами

$x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1$ м. Жидкость неподвижна. Диаметр частицы, плотность и вязкость среды равны соответственно: $\delta = 0.001$ м, $\rho = 1000$ кг/м³. $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. На частицу действует внешняя сила с компонентами:

	1	2	3	4	5
F_x мН	$10 \sin(5t)$	7	2	$10 \sin(5t)$	$2 \sin(0.5t)$
F_y мН	0.1	$10 \cos(50t)$	5	$10 \cos(50t)$	5
F_z мН	0	5	$2 \sin(0.5t)$	9	$10 \cos(50t)$

17. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 1000$ кг/м³) в потоке. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = v_\infty x/l$ м/с, $v_y = -v_\infty y/l$ м/с, $v_z = 0$. Плотность и вязкость среды равны $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0.2$ м, $y_0 = 0.5$ м, $z_0 = 0$. На частицу действует сила с компонентами $F_x = \frac{1}{3} \pi \delta^3 \rho (v_\infty/l)^2 x$, $F_y = \frac{1}{3} \pi \delta^3 \rho (v_\infty/l)^2 y$, $F_z = 0$. Диаметр частицы и параметры потока равны:

	1	2	3	4	5
δ м	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
v_∞ м/с	1.	-0.5	2.	9	10.
l м	0.1	2	0.5	1.5	0.01

18. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600$ кг/м³) в потоке.

Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = v_\infty x/l$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = -v_\infty z/l$. Плотность и вязкость среды равны $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0.2$ м, $y_0 = 0.5$ м, $z_0 = 0$. На частицу действует сила с компонентами $F_x = \frac{1}{3} \pi \delta^3 \rho (v_\infty/l)^2 x$, $F_y = 0$, $F_z = \frac{1}{3} \pi \delta^3 \rho (v_\infty/l)^2 z$. Диаметр частицы и параметры потока равны:

	1	2	3	4	5
δ м	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
v_∞ м/с	1.	-0.5	2.	9	10.
l м	0.1	2	0.5	1.5	0.01

19. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферической частицы ($\rho_p = 2600$ кг/м³) в плоском диффузоре. Скорость движения жидкости определяется уравнениями: $v_x = v_0 D^2 / (D - x \operatorname{tg} \alpha)^2$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Плотность и вязкость среды равны $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ м, $z_0 = 0$. На частицу действует сила с компонентами $F_x = -8 \rho v_0^2 \operatorname{tg} \alpha / D$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. Диаметр частицы и параметры потока равны:

	1	2	3	4	5
δ м	0.001	0.0001	0.05	0.004	0.005
v_0 м/с	1.	-0.5	2.	9	10.
D м	0.1	2	0.5	1.5	0.01

20. Определить траекторию и зависимость изменения скорости движения сферического пузыря ($\rho_p = 1.2$ кг/м³, $\delta = 0.001$ м) в потоке. Скорость движения жидкости определяется уравнениями:

$v_x = v_0 D^2 / (D + x \operatorname{tg} \alpha)^2$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = -v_\infty z / l$. Плотность и вязкость среды равны $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0.2$ м, $y_0 = 0.5$ м, $z_0 = 0$. На частицу действует сила с компонентами $F_x = 8\rho v_0^2 \operatorname{tg} \alpha / D$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. Параметры потока равны:

	1	2	3	4	5
α^0	15	30	45	60	75
v_∞ м/с	1.	-0.5	2.	9	10.
l м	0.1	2	0.5	1.5	0.01

Список рекомендованной литературы

Основная литература

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа. 1998.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. М.: Лань. 1998. 768 с.
3. Шиляев М.И., Шиляев А.М., Грицко Е.П. Методы расчета пылеуловителей. Томск: Изд-во ТГАСУ. 2006. – 385 с.
4. Шиляев М.И., Шиляев А.М. Аэродинамика и теплообмен газодисперсных потоков. Томск: Изд-во ТГАСУ. 2003. – 272 с.
5. Джонсон К. Численные методы в химии М.: Мир, 1983.

Дополнительная литература

1. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. – СПб.: Наука, 2000. – 359с.
2. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955, 351с.
3. Васенин И. М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Газовая динамика двухфазных течений в соплах. – Томск: Изд-во ТГУ, 1986. 264 с.
4. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир. 1975. 536с.

Содержание

Введение.....	3
Классификация многофазных течений.....	4
Основные типы многофазных потоков.....	5
Газожидкостные потоки.....	6
Потоки газа с частицами.....	8
Потоки жидкости с частицами.....	8
Гранулометрические характеристики дисперсной фазы.....	9
Основы динамики материальной точки.....	14
Сила сопротивления.....	18
Стоксовский режим.....	24
Переходный режим.....	24
Ньютоновский режим.....	24
Кризис сопротивления.....	25
Влияние стенок на движение одиночной дисперсной частицы.....	26
Нестационарный стоксовский режим осаждения.....	27
Нестационарный ньютоновский режим осаждения.....	29
Стационарное осаждение капель в переходном режиме.....	31
Примеры.....	32
Пример 1.....	32
Пример 2.....	32
Пример 3.....	34
Численный метод.....	35
Описание программы.....	37
Текст программы.....	39
Пример выполнения задания.....	46
Задания.....	50
Список рекомендованной литературы.....	60
Основная литература.....	60
Дополнительная литература.....	60

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 3220 от «31» мая 2018 г. Тираж 50 экз.