

На правах рукописи



Шишмарев Алексей Александрович

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ
СИЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ,
ЗАДАННОГО ПОТЕНЦИАЛАМИ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА**

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Гаврилов Сергей Петрович

Официальные оппоненты:

Шабает Владимир Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», кафедра квантовой механики, профессор

Чуприков Николай Леонидович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный педагогический университет», кафедра теоретической физики, профессор

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита диссертации состоится 08 ноября 2018 года в 16 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория 211).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
<http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublication/ShishmarevAA08112018.html>

Автореферат разослан « ____ » сентября 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Киреева Ирина Васильевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Традиционно считалось, что квантовая теория предназначена для описания феноменов микромира, тогда как макроскопические явления должны описываться классической теорией. Однако, развитие квантово-полевой теории привело к пониманию того факта, что существуют нетривиальные квантовые явления (поляризация вакуума, парадокс Клейна, излучение Хокинга и рождение электрон-позитронных пар из вакуума сильными полями), которые нельзя описать классически. На заре развития релятивистской квантовой механики эти эффекты послужили причиной возникновения ряда парадоксов, поставив под вопрос корректность ее наивного применения к описанию процессов в сильных полях. Стало ясно, что квантовые эффекты могут, в определенных условиях, изменять классическую эволюцию сильных полей из-за эффекта обратного влияния (backreaction). Эффект рождения частиц сильным электромагнитным и гравитационным полями, или, иными словами, эффект нестабильности вакуума, имеет существенно квантовую природу. Впервые он был изучен в рамках релятивистской квантовой механики с пониманием того факта, что ответы на все поставленные вопросы могут быть найдены только при помощи квантовой теории поля (КТП).

В настоящее время, теория сильных полей имеет множество важных физических приложений в астрофизике, космологии, физике нейтрино, ядерной физике и физике наноструктур. Недавний прогресс в лазерной физике позволяет надеяться, что эффекты сильного поля скоро можно будет наблюдать в лабораторных условиях. Благодаря синтезу графена и других наноматериалов, рождение частиц внешними полями теперь стало наблюдаемым эффектом.

Как было установлено, эффект рождения частиц имеет решающее значение для понимания проводимости графена в нелинейном режиме. В определенной области, физика таких структур описывается моделью квантового поля с нестабильным вакуумом, где практически любые электрические поля могут рассматриваться как сильные. Таким образом, методы, развитые в рамках квантовой электродинамики (КЭД) с нестабильным вакуумом, позволяют проводить непертурбативные вычисления для этих физических систем. Все вышесказанное делает рассматриваемую теорию сильных полей не только академически интересной, но также важной и актуальной для физики конденсированного состояния.

В диссертации в рамках специальной КЭД, позволяющей непертурбативно учитывать взаимодействие с внешним электрическим полем, изучаются некоторые проблемы сильного поля в приложении к различным физическим системам. В тесной связи исследуются вопросы энтропии, квантовой запутанности и потерь информации

в квантовой системе с рождением пар, изучение характеристик нестабильности вакуума в присутствии постоянного пикового электрического поля, вопрос унитарной эквивалентности начальных и конечных фоковских состояний КЭД с постоянными сильными полями и деформация вакуумного состояния под действием внешнего постоянного электрического поля. Полученные результаты иллюстрируются на примере реальных физических систем.

Степень разработанности

Случай однородного и постоянного электрического поля, взаимодействующего с электронами, был изучен Швингером, который вычислил вероятность вакуумного состояния остаться вакуумным, используя разработанный им метод эффективного действия. Было показано, что рождение электрон-позитронных пар должно наблюдаться в полях, напряженность которых достигает так называемой критической величины, $E_c = m^2 c^3 / e \hbar$. Предложенный Фейнманом подход с использованием причинного пропагатора был обобщен Никишовым и Нарожным для изучения рождения и рассеяния пар в нулевом порядке приближения по радиационному взаимодействию. Были предложены и другие подходы к учету эффекта рождения пар в рамках релятивистской квантовой механики.

Хорошо известным примером КТП с сильными полями является так называемая картина Фарри квантовой электродинамики, в которой поле материи (дираковское поле) квантуется при помощи точных решений уравнения Дирака в магнитных полях; таким образом, соответствующие диаграммы Фейнмана точно учитывают взаимодействие с этими магнитными полями. В работе Фрадкина и Гитмана¹ было предложено обобщение подхода Фарри на широкий класс электроподобных внешних полей, нарушающих стабильность вакуума (создающих из вакуума электрон-позитронные пары). Этот способ применим в том случае, когда известны точные решения уравнения Дирака в присутствии внешнего фонового поля. Данный класс фоновых полей ограничен полями, включающимися и выключающимися в некие начальный и конечный момент времени соответственно.

Однако, существует много физически интересных ситуаций, когда внешнее поле не попадает под указанный критерий. В качестве примера можно привести постоянные неоднородные поля, не меняющие своего направления и сконцентрированные в ограниченных областях пространства. Такие поля представляют собой пространственные потенциальные ступени для заряженных частиц. Они также могут создавать частицы из вакуума (парадокс Клейна тесно связан с этим процессом). Подходы, развитые для электрических потенциалов, зависящих от времени, не могут быть напрямую при-

¹Fradkin, E.S., Gitman, D.M. Furry Picture for Quantum Electrodynamics with Pair-Creating External Field // Fortschr. Phys. 1981. Vol. 29. P. 381.

менены к постоянным электрическим полям, заданным потенциальными ступенями. Некоторые эвристические вычисления, касающиеся рождения частиц потенциальными ступенями в рамках релятивистской квантовой механики, были проделаны Никишовым. Существующие работы, однако, не предоставляли никакого обоснования таких вычислений с точки зрения КТП. Не так давно, Гаврилову и Гитману² удалось построить согласованную версию КЭД с постоянными внешними электрическими полями, заданными потенциальными ступенями.

Цель и задачи

Целью диссертационной работы является изучение различных проблем сильного электрического поля в рамках квантовой электродинамики с внешними полями.

Задачи исследования:

1. Построить явный вид редуцированной измерением числа частиц матрицы плотности с вакуумным начальным условием для квантованных дираковских или клейн-гордоновских полей в присутствии зависящего от времени электрического поля, и рассмотреть деформацию вакуумного квантового состояния, возникающую в процессе измерения классическим прибором. Вычислить сопутствующую различным редукциям потерю информации и меру квантовой запутанности соответствующих квантовых подсистем.
2. Рассмотреть конкретный пример постоянного пикового электрического поля, заданного потенциальной ступенью, состоящего из экспоненциально возрастающей и экспоненциально убывающей частей, и исследовать его различные конфигурации. Изучить дифференциальные и интегральные характеристики поля, связанные с рождением пар из вакуума.
3. Продемонстрировать унитарную эквивалентность in- и out-пространств Фока в КЭД с постоянными неоднородными внешними электрическими полями, заданными потенциальной ступенью.
4. Изучить деформацию вакуумного начального состояния под действием постоянного неоднородного внешнего электрического поля, заданного потенциальной ступенью. Построить явный вид для общей матрицы плотности, соответствующий данной системе, а также для подсистем позитронов и электронов. Найти потерю информации, спровоцированную редукцией общей матрицы плотности по одной из подсистем.

²Gavrilov, S.P., Gitman, D.M. Quantization of charged fields in the presence of critical potential steps // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 93. P. 045002.

Научная новизна

1. Впервые в рамках КЭД с точным учетом внешнего поля получен явный вид матрицы плотности, редуцированной в процессе измерения числа рожденных из вакуума пар, электронов и позитронов.
2. Впервые вычислена энтропия фон Неймана для электронной и позитронной подсистем квантовой системы, находившейся в начальный момент времени в вакуумном или равновесном состоянии; вычислена энтропия фон Неймана для матрицы плотности системы с начальным вакуумным условием, редуцированной в результате измерения числа рожденных из вакуума пар, электронов или позитронов.
3. Впервые исследованы характеристики системы, связанные с нестабильностью вакуума в присутствии сильного постоянного электрического пикового поля, заданного ступенчатым потенциалом. Вычислены дифференциальные и интегральные числа частиц, рожденных из вакуума таким полем.
4. Впервые найдено условие унитарной эквивалентности in- и out-фоковских пространств для КЭД с постоянными внешними электрическими полями, заданными потенциальной ступенью. Показано, что для реалистичных ограниченных в пространстве и времени полей данное условие всегда выполняется.
5. Впервые исследована эволюция начального вакуумного состояния под действием постоянного неоднородного внешнего поля, заданного потенциальной ступенью. Получен явный вид общей матрицы плотности и редуцированных матриц плотности для электронной и позитронной подсистем. Найдена энтропия фон Неймана, соответствующая этим редуцированным матрицам плотности.

Теоретическая и практическая значимость

Исследование эффектов рождения частиц в сильных полях представляет собой существенный интерес и имеет множество важных физических приложений в астрофизике, космологии, физике нейтрино, ядерной физике и физике наноструктур. Так, в астрофизике, где напряженность внешних полей может достигать огромных величин, их неоднородность становится чрезвычайно важным фактором.

Текущий прогресс в лазерной физике позволяет надеяться, что эффекты рождения частиц и вакуумной нестабильности скоро можно будет наблюдать в лабораторных условиях. Кроме того, изучение эффектов сильного поля, в частности, эффекта рождения частиц, приобрело серьезное практическое значение благодаря синтезу графена и других наноматериалов, таких как топологические изоляторы или полуметаллы Вейля. Этот факт объясняется тем, что проводники тока в этих материалах могут

быть описаны как безмассовые дираковские фермионы, для которых любое электрическое поле является критически сильным. К примеру, эффект рождения пар играет чрезвычайно важную роль для понимания проводимости графена в так называемом нелинейном режиме.

Кроме того, важно отметить, что используемый в диссертации формализм КТП позволяет в тесной связи изучать вопросы, связанные с квантовой запутанностью, потерями информации и изменением энтропии. Так как электрические поля постоянной направленности обеспечивают физическое разделение электронной и позитронной подсистем, результаты диссертационной работы могут представлять интерес в контексте исследований квантовой теории информации.

Результаты диссертационной работы, полученные в рамках КЭД с постоянными неоднородными электрическими полями, заданными потенциальными ступенями, фактически представляют собой первые реальные примеры применения этой новой теории, точно учитывающей эффекты не зависящих от времени сильных полей, к различным физическим проблемам и являются дополнительным подтверждением согласованности и непротиворечивости данной теории.

Методология и методы исследования

При изучении эффектов сильного поля как для зависящих от времени, так и для постоянных электрических полей использовался формализм КТП, а именно так называемая обобщенная картина Фарри. Эта формулировка основывается на квантовании дираковского поля с помощью неких подходящих точных решений уравнения Дирака. В том случае, когда уравнение Дирака может быть решено точно для конкретного вида потенциала, общая теория позволяет изучать любые процессы КЭД, точно (непертурбативно) учитывая взаимодействие с внешним полем, как в нулевом порядке по радиационному взаимодействию (без фотонов), так и с любым количеством фотонов. Анализ потерь информации при построении различных редукций общей матрицы плотности и запутанности квантовых подсистем проводился с помощью вычисления энтропии фон Неймана.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

1. Явный вид редуцированной измерением числа частиц матрицы плотности с вакуумным начальным условием для квантованных дираковских или клейн-гордоновских полей в присутствии зависящего от времени электрического поля. Энтропия фон Неймана для редуцированных матриц плотности, описывающих подсистемы электронов и позитронов, для различных начальных состояний системы. Энтропия фон Неймана, вычисленная для редуцированной матрицы плот-

ности после измерения числа электронов, позитронов или пар в системе в случае вакуумного начального состояния.

2. Дифференциальные и интегральные числа частиц, рождающихся из вакуума под действием постоянного пикового электрического поля, вычисленные для трех различных его конфигураций: медленно меняющегося поля, острого пика и существенно асимметричного пика.
3. Условие унитарной эквивалентности фоковских in- и out-пространств для квантовой электродинамики в присутствии постоянных неоднородных электрических полей, заданных потенциалами ступенчатого типа. Показано, что для реалистичных полей, ограниченных в пространстве и времени, это условие всегда выполняется.
4. Явный вид общей матрицы плотности, описывающей квантовое состояние, возникшее из начального вакуумного состояния под действием постоянного неоднородного электрического поля. Редуцированные матрицы плотности для подсистем электронов и позитронов такой системы. Энтропия фон Неймана этих матриц плотности как мера потери информации при соответствующих редукциях и как мера квантовой запутанности подсистем электронов и позитронов.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов объясняется их внутренней самосогласованностью, а также совпадением в частных случаях с уже известными результатами.

Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях «XII Международная научная конференция по гравитации, астрофизике и космологии» (г. Москва, 2015), Международной конференции «Теоретическая физика и ее приложения» (г. Москва, 2015), на 17-ой Международной Байкальской летней Школе по Физике Элементарных Частиц и Астрофизике (г. Иркутск, 2015), а также научных семинарах кафедры квантовой теории поля и лаборатории квантовой теории интенсивных полей Томского государственного университета.

Публикации

Основные научные результаты диссертации, выводы и рекомендации автора изложены в 3 статьях в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 3 статьи в ведущих международных научных журналах, индексируемых Web of Science), что соответствует требованиям, установленным п.

11 и п. 13 «Положения о присуждении ученых степеней» к опубликованию основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук по физико-математическим наукам. В опубликованных работах достаточно полно изложены материалы диссертационного исследования. Список публикаций приведен в конце реферата.

Личный вклад автора

Совместно с научным руководителем осуществлена постановка задач, обсуждение результатов работы, формулировка выводов и положений, выносимых на защиту, написание научных статей по теме диссертации. Лично диссертантом произведены основные теоретические расчеты.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 113 страниц. Список литературы включает 89 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы и установлена связь результатов, представленных в диссертации, с результатами, полученными ранее другими авторами. Дано описание структуры диссертационной работы и сформулированы основные задачи.

В первой главе обсуждаются проблемы КЭД с зависящими от времени внешними электрическими полями, заданными потенциальными степенями.

В разделе 1.1 приводится краткий обзор общего формализма квантовой электродинамики с внешним полем, и обсуждаются некоторые важные детали квантования полей Дирака в зависящих от времени внешних электрических полях.

В разделе 1.2 приводится явный вид общих матриц плотности $\check{\rho}(J)$ для различных начальных состояний системы в присутствии зависящих от времени электрических полей, заданными потенциальными степенями, а также редуцированных по подсистемам электронов и позитронов матриц плотности $\check{\rho}_{\pm}(J)$. После этого обсуждается возможность возникновения декогеренции в ходе эволюции вследствие проведения измерения классическим прибором. С помощью принципа редукции фон Неймана находится явный вид матрицы плотности системы после измерения средних чисел

рожденных пар:

$$\begin{aligned}\check{\rho}_N &= |c_v|^2 \sum_f W_f \check{P}_f, \quad \sum_f = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{Z=1}^M \sum_{\{m,n\}}, \quad \check{P}_f = |f, \text{out}\rangle \langle f, \text{out}|, \\ W_f &= |w(+ - |0)_{n_1 n_1}|^{2m_1} \dots |w(+ - |0)_{n_Z n_Z}|^{2m_Z}, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_Z = M, \\ |f, \text{out}\rangle &= \frac{[a_{n_1}^\dagger(\text{out}) b_{n_1}^\dagger(\text{out})]^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{[a_{n_Z}^\dagger(\text{out}) b_{n_Z}^\dagger(\text{out})]^{m_Z}}{m_Z!} |0, \text{out}\rangle.\end{aligned}\quad (1)$$

Схожим образом отыскивается явный вид матрицы плотности системы после измерения числа электронов или позитронов:

$$\begin{aligned}\check{\rho}_{N_+} &= \sum_{s+} a \langle s_+, \text{out} | \check{\rho}(0) | s_+, \text{out} \rangle_a P_{s+}, \quad P_{s+} = |s_+, \text{out}\rangle_{aa} \langle s_+, \text{out}|, \\ \check{\rho}_{N_-} &= \sum_{s-} b \langle s_-, \text{out} | \check{\rho}(0) | s_-, \text{out} \rangle_b P_{s-}, \quad P_{s-} = |s_-, \text{out}\rangle_{bb} \langle s_-, \text{out}|, \\ \sum_{s+} &= \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{P=1}^L \sum_{\{i,l\}}, \quad \sum_{s-} = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{Q=1}^K \sum_{\{j,k\}}.\end{aligned}\quad (2)$$

В разделе 1.3 при помощи вычисления энтропии фон Неймана,

$$S(\check{\rho}) = -k_B \text{tr} \check{\rho} \ln \check{\rho}, \quad (3)$$

находится мера квантовой запутанности электронной и позитронной подсистем для редуцированных матриц плотности с различными начальными условиями; обсуждается тот факт, что данная энтропия также должна быть ассоциирована с мерой потери информации о состоянии системы при соответствующей редукции матрицы плотности. Энтропия фон Неймана вычисляется также и для состояний, описанных матрицами плотности, редуцированными измерением числа частиц, электронов или позитронов, построенных в предыдущем разделе.

Устанавливается, что для всех рассмотренных случаев редукции энтропия фон Неймана имеет схожий вид, а именно,

$$S(\check{\rho}) = -k_B \sum_n \{ \kappa [1 - \kappa N_n(\text{out})] \ln [1 - \kappa N_n(\text{out})] + N_n(\text{out}) \ln N_n(\text{out}) \}, \quad (4)$$

где для каждого из случаев $N_n(\text{out})$ представляют собой конечные средние дифференциальные числа частиц (электронов/позитронов или пар), соответствующие различным начальным состояниям системы, описываемой редуцированной матрицей плотности $\check{\rho}$. Из этого заключается, что для матрицы плотности с начальным вакуумным

условием редукция по подсистеме электронов/позитронов приводит к такой же потере информации, что и измерение чисел частиц/электронов/позитронов.

В разделе 1.4 для иллюстрации полученных результатов используется конкретный пример так называемого T -постоянного поля,

$$\mathbf{E} = (0, E(t), 0, \dots, 0), \quad E(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq t_{\text{in}} \\ E > 0, & t_{\text{in}} < t < t_{\text{out}} \\ 0, & t_{\text{out}} \leq t < \infty \end{cases}, \quad (5)$$

вычисляется энтропия фон Неймана, соответствующая редуцированным матрицам плотности, для вакуумного и равновесного начального состояния, а также проводятся оценки ее величины для случаев сильного $E \gg E_c$, слабого $E \ll E_c$ и критического $E = E_c$ электрических полей. Устанавливается, что энтропия любой из двух подсистем (электронов и позитронов) для вакуумного начального состояния пропорциональна множителю $(eE)d/2$ и числу спиновых степеней свободы $J_{(d)}$; а также что она растет линейно с ростом времени действия поля T . Такое поведение сохраняется также для равновесного начального состояния системы при низких температурах; фактически, в этом случае энтропия не зависит от температуры.

Вторая глава посвящена изучению проблем КЭД с постоянными неоднородными электрическими полями, заданными потенциалами ступенчатого типа.

В разделе 2.1 приводится краткий обзор положений общей теории КЭД с постоянным неоднородным внешним полем, сформулированной Гитманом и Гавриловым: дается обзор соответствующего уравнения Дирака и приводятся его стационарные решения, затем обсуждаются проблемы ортогональности и нормированности таких стационарных решений. Приводятся необходимые детали квантования дираковского поля и трактовки начальных и конечных решений, а также связи наборов in- и out-операторов при помощи соответствующего канонического преобразования. Приводится трактовка одночастичных состояний для квантовых чисел вне и внутри зоны Клейна.

В разделе 2.2 рассматривается специальный случай пикового неоднородного поля, состоящего из двух частей, возрастающей и убывающей. Интервал возрастания такого поля S_L находится слева от условного нуля, $x \in (-\infty, 0]$, а интервал убывания S_R – справа, $x \in (0, +\infty)$. Само поле и соответствующие ему потенциалы имеют вид

$$E(x) = E \begin{cases} e^{k_1 x}, & x \in S_L \\ e^{-k_2 x}, & x \in S_R \end{cases}, \quad A_0(x) = E \begin{cases} k_1^{-1} (-e^{k_1 x} + 1), & x \in S_L \\ k_2^{-1} (e^{-k_2 x} - 1), & x \in S_R \end{cases}. \quad (6)$$

Уравнения Дирака с таким полем принимает вид:

$$i\partial_0\psi(X) = \check{H}\psi(X), \quad \check{H} = \gamma^0 (-i\gamma^j\partial_j + m) + U(x), \quad j = 1, \dots, D, \quad (7)$$

где $U(x) = -eA_0(x)$ это потенциальная энергия электрона в поле. Из-за структуры поля (6), дираковский спинор $\psi(X)$ в направлениях, перпендикулярных направлению поля, представляет собой простую плоскую волну, поэтому можно рассматривать стационарные решения уравнения Дирака (7) в форме

$$\begin{aligned}\psi_n(X) &= \exp[-ip_0t + i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}_\perp] \psi_n(x), \quad n = (p_0, \mathbf{p}_\perp, \sigma), \\ \psi_n(x) &= \{\gamma^0 [p_0 - U(x)] + i\gamma^1 \partial_x - \gamma^\perp \mathbf{p}_\perp + m\} \phi_n(x), \\ \mathbf{p}_\perp &= (p^2, \dots, p^D), \quad \gamma^\perp = (\gamma^2, \dots, \gamma^D).\end{aligned}\quad (8)$$

Отделяя спинорные переменные в функции $\phi_n(x)$, можно прийти к дифференциальному уравнению второго порядка, имеющему точное решение в каждом из интервалов S_L и S_R ,

$$\begin{aligned}\left(-\partial_x^2 - i\chi eE e^{k_1 x} - \left[p_0 + \frac{eE}{k_1} (-e^{k_1 x} + 1)\right]^2 + \pi_\perp^2\right) \varphi_n(x) &= 0, \quad x \in S_L, \\ \left(-\partial_x^2 - i\chi eE e^{-k_2 x} - \left[p_0 + \frac{eE}{k_2} (e^{-k_2 x} - 1)\right]^2 + \pi_\perp^2\right) \varphi_n(x) &= 0, \quad x \in S_R.\end{aligned}\quad (9)$$

При помощи подходящей замены переменных,

$$\begin{aligned}\varphi_n^j(x) &= e^{-\eta_j/2} \eta_j^{\nu_j} \rho_j(x), \quad \nu_1 = i \frac{|p^L|}{k_1}, \quad |p^L| = \sqrt{\pi_1^2 - \pi_\perp^2}, \\ \nu_2 &= i \frac{|p^R|}{k_2}, \quad |p^R| = \sqrt{\pi_2^2 - \pi_\perp^2}, \quad \pi_j = p_0 + (-1)^{j+1} \frac{eE}{k_j},\end{aligned}\quad (10)$$

где $j = 1$ если $x \in S_L$, $j = 2$ если $x \in S_R$, эти уравнения могут быть сведены к вырожденному гипергеометрическому уравнению на функции $\rho_j(x)$, фундаментальный набор решений которого хорошо известен. Это позволяет записать точное решение уравнения (7) в терминах коэффициентов взаимного перераспределения g :

$${}^+\varphi_n(x) = \begin{cases} \eta_L [{}^+\varphi_n(x) g(+|+) - {}^-\varphi_n(x) g(-|+)], & x \in S_L \\ {}^+\mathcal{N} \exp(i\pi\nu_2/2) y_2^2, & x \in S_R \end{cases}, \quad (11)$$

$${}^-\varphi_n(x) = \begin{cases} -\mathcal{N} \exp(i\pi\nu_1/2) y_2^1, & x \in S_L \\ \eta_R [{}^+\varphi_n(x) g(+|-) - {}^-\varphi_n(x) g(-|-)], & x \in S_R \end{cases}, \quad (12)$$

на всей оси x . Используя затем условия склеивания, можно найти явный вид коэффи-

циентов g . Так, выражение для коэффициента $g(-|+)$ принимает вид

$$g(-|+) = C\Delta, \quad C = \frac{-\eta_L}{2} \sqrt{\frac{|\pi_1 + \chi|p^L|}{|p^L||p^R| |\pi_2 - \chi|p^R|}} \exp\left[\frac{i\pi}{2}(\nu_2 - \nu_1)\right],$$

$$\Delta = \left[k_1 h_1 y_2^2 \frac{\partial}{\partial \eta_1} y_1^1 + k_2 h_2 y_1^1 \frac{\partial}{\partial \eta_2} y_2^2 \right] \Big|_{x=0}. \quad (13)$$

Это выражение позволяет вычислять средние дифференциальные числа частиц, рожденных из вакуума в зоне Клейна и коэффициенты прохождения и отражения вне ее. Так, относительные амплитуды отражения $|R_{\zeta,n}|^2$ и прохождения $|T_{\zeta,n}|^2$ для электронов в области Ω_1 (и позитронов в области Ω_5) есть, соответственно,

$$|T_{\zeta,n}|^2 = 1 - |R_{\zeta,n}|^2, \quad |R_{\zeta,n}|^2 = \left[1 + |g(-|+)|^{-2} \right]^{-1}, \quad \zeta = \pm, \quad (14)$$

а число дираковских частиц, рождаемых из вакуума в зоне Клейна, $n \in \Omega_3$, имеет вид

$$N_n^{\text{cr}} = N_{n,-}^{\text{cr}} = N_{n,+}^{\text{cr}} = \langle 0, \text{in} | {}^+ a_n^\dagger (\text{out}) {}^+ a_n (\text{out}) | 0, \text{in} \rangle = |g(-|+)|^{-2} = |C\Delta|^{-2}. \quad (15)$$

После нахождения точного решения уравнения Дирака рассматриваются проблемы рассеяния и отражения частиц как вне зоны Клейна, где вакуум стабилен и рождения частиц электрическим полем не происходит, так и внутри нее. В зоне Клейна изучаются дифференциальные и интегральные характеристики поля, связанные с рождением частиц из вакуума; вычисляются средние числа частиц, рождаемых пиковым полем, и вычисляется вероятность вакуума остаться вакуумом.

Полученные результаты анализируются для трех различных конфигураций поля. Так, сначала анализируется конфигурация поля, соответствующая случаю малого градиента поля, т.е. так называемое медленно меняющееся пиковое поле, в котором оба параметра в уравнении (6) малы, то есть $k_1, k_2 \rightarrow 0$. За ней следует обсуждение конфигурации, соответствующей случаю крайне острого пика, где $k_1, k_2 \rightarrow \infty$, т.е. оба параметра достаточно велики, но их отношение k_1/k_2 представляет собой некое конечное небольшое число. Наконец, изучается несимметричная полевая конфигурация, в которой возрастающая и убывающая часть пика существенно отличаются друг от друга. Для случая медленно меняющегося поля, в частности, показано, что в достаточно широкой области число рождаемых частиц может быть приближенно представлено как

$$N_n^{\text{cr}} \approx \exp\left[-\frac{2\pi}{k_1}(\pi_1 - |p_L|)\right], \quad (16)$$

для отрицательных энергий частиц,

$$N_n^{\text{cr}} \approx \exp \left[-\frac{2\pi}{k_2} (|\pi_2| - |p_R|) \right], \quad (17)$$

для положительных энергий частиц. Можно также заметить, что в центре зоны Клейна значения этих величин стремятся к результату, полученному Никишовым для постоянного и однородного электрического поля, но стремятся к нулю при приближении к границам зоны.

В разделе 2.3 изучается вопрос унитарной эквивалентности in- и out-пространств Фока в КЭД с неоднородными внешними полями. Начальное и конечное пространство унитарно эквивалентны в том случае, когда выполняется соответствующий критерий Гильберта-Шмидта. Демонстрируется, что данное условие для рассматриваемой теории может быть в конце концов сведено к виду

$$\sum_n (N_n^a + N_n^b) = N < \infty, \quad (18)$$

то есть выполняется в том случае, когда полное число пар, рождаемых полем, конечно. Таким образом, демонстрируется, что унитарная эквивалентность в такой КЭД имеет место для любых реалистичных полей, ограниченных в пространстве и времени.

В разделе 2.4 исследуется деформация начального вакуумного состояния дираковского поля внешним электрическим полем, заданного потенциальной ступенью. Построены два различных явных представления для матрицы плотности системы, исходное состояние которой является вакуумом: представление в виде упорядоченной функциональной экспоненты от операторов рождения и уничтожения электронов и позитронов,

$$\begin{aligned} \check{\rho}_K |c_v\rangle^{-2} = : \exp \left\{ - \sum_{n \in \Omega_3} [{}^+ a_n^\dagger(\text{out}) {}^+ a_n(\text{out}) + {}^+ b_n^\dagger(\text{out}) {}^+ b_n(\text{out}) \right. \\ \left. + {}^+ a_n^\dagger(\text{out}) w_n (+ - |0) {}^+ b_n^\dagger(\text{out}) + {}^+ b_n(\text{out}) w_n (+ - |0)^* {}^+ a_n(\text{out}) \right] \} : , \quad (19) \end{aligned}$$

и представление в виде набора фоковских векторов состояний:

$$\begin{aligned} \check{\rho}_K |c_v\rangle^{-2} = \prod_{n \in \Omega_3} [1 - {}^+ a_n^\dagger(\text{out}) w_n (+ - |0) {}^+ b_n^\dagger(\text{out})] \\ \times P_{K,n} [1 - {}^+ b_n(\text{out}) w_n (+ - |0)^* {}^+ a_n(\text{out})] , \\ P_{K,n} = |0, \text{out}\rangle_n^{(K)} \langle 0, \text{out}|_n^{(K)}. \quad (20) \end{aligned}$$

Оба построенных представления, разумеется, эквивалентны.

Далее, изучается редукция полученной матрицы плотности по позитронной и электронной подсистемам, и при помощи энтропии фон Неймана (3) вычисляется мера квантовой запутанности подсистем, также как и мера потери информации о системе при такой редукции. Общие формулы, полученные ранее, иллюстрируются на примере деформации вакуума постоянным электрическим полем между пластинами плоского конденсатора (так называемого L -постоянного поля), имеющего вид

$$E_x(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -L/2] \\ E = \text{const} > 0, & x \in (-L/2, L/2) \\ 0, & x \in [L/2, \infty) \end{cases} . \quad (21)$$

Проводится оценка этой энтропии для слабого, сильного и критического поля. Энтропия в рассматриваемом случае пропорциональна множителю $(eE)d/2$, числу спиновых степеней свободы $J_{(d)}$, и объему конденсатора $V = V_{\perp}L$ (т.е. объему, занятому электрическим полем). Можно заметить, что в случае достаточно протяженного L -постоянного поля основной вклад в энтропию, полученный для такого поля, совпадает с основным вкладом в энтропию, полученным для достаточно долго действующего T -постоянного поля.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе и выносимые на защиту, а также возможные направления дальнейших исследований.

В приложении приведены некоторые необходимые асимптотические выражения для гипергеометрических функций, использованные при анализе эффектов рождения частиц пиковым полем.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. Gavrilov S. P. Statistical properties of states in QED with unstable vacuum / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, **A. A. Shishmarev** // Physical Review A. – 2015. – Vol. 91, is. 5. – P. 052106. – 13 p. – DOI: 10.1103/PhysRevA.91.052106. – 1,5 / 0,5 а.л. (*Web of Science*)
2. Gavrilov S. P. Unitarity and vacuum deformation in QED with critical potential steps / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, **A. A. Shishmarev** // Physical Review D. – 2016. – Vol. 93, is. 10. – P. 105040. – 8 p. – DOI: 10.1103/PhysRevD.93.105040. – 0,9 / 0,3 а.л. (*Web of Science*)

3. Gavrilov S. P. Particle scattering and vacuum instability by exponential steps / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, **A. A. Shishmarev** // *Physical Review D.* – 2017. – Vol. 96, is. 9. – P. 096020. – 17 p. – DOI: 10.1103/PhysRevD.96.096020. – 2,0 / 0,7 а.л. (*Web of Science*)

Тираж 100 экз. Заказ 264.
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.