ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МАРЧУКОВСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ – 2017

25 июня – 14 июля 2017 года

Труды

Новосибирск
ИВМиМГ СО РАН
2017

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА С ВХОДЯЩИМ ПРОСТЕЙШИМ ПОТОКОМ

А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская

Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, Томск

УДК 519.872

В работе рассматривается двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Заявки поступают на первую фазу системы в соответствии с простейшим потоком, после завершения обслуживания на первой фазе каждая заявка переходит на вторую фазу. Каждая заявка имеет некоторый пакет данных (объем заявки). Время обслуживания не зависит от объема заявки. В работе получена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок на фазах и их суммарного объема.

Ключевые слова: двухфазная бесконечнолинейная система массового обсдуживания, требования случайного объема, простейший поток.

Введение

При моделировании работы современных технических систем, например, загрузки каналов передачи данных в сети [3], в качестве математической модели имеют применение системы массового обслуживания (СМО) требований случайного объема [1, 9].

СМО требований случайного объема так же позволяют решать задачи проектирования экономических и информационных процессов. В первых под объемом заявки понимаются денежные средства, которые клиент вносит на счет в банке. Во вторых объектом преобразования является информация, поступающая в виде сообщений случайного размера. Кроме того, задача исследования таких систем, как было замечено в работах [10, 11], играет важную роль при моделировании технических устройств, где необходимо рассчитать достаточный объем буфера для хранения данных.

В работах [6, 7] рассматривается СМО требований случайного объема вида $M/GI/\infty$. Для такой системы получена характеристическая функция двумерного распределения вероятностей числа заявок в системе и их суммарного объема.

Многофазные СМО [2] являются моделями, представляющими последовательную обработку заявок. Такая СМО представляет собой линейную последовательность из систем обслуживания, называемых фазами обслуживания.

Аналитические результаты для характеристик суммарного объема требований в многофазных системах ранее не были получены. Цель данной работы исследование суммарного объема требований на фазах в системе $M/(GI/\infty)^2$.

1 Постановка задачи

Рассмотрим двухфазную СМО с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v > 0$, $G(y) = P\{v > y\}$ — функция распределения случайной величины v. Объемы различных

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292.

требований независимы. Продолжительность обслуживания заявок на первой фазе имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов, которую обозначим $B_1(x)$, и на второй фазе — $B_2(x)$. После обслуживания на первой фазе заявка с тем же объемом переходит на вторую фазу, после обслуживания на второй фазе заявка покидает систему и «уносит» с собой свой объем.

Пусть $i_k(t)$ — число заявок на k-ой фазе в момент времени t, $V_k(t)$ — суммарный объем заявок на k-ой фазе в момент времени t, где $k = 1, 2$ — номер фазы.

Поставим задачу нахождения характеристик четырехмерного случайного процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания [8].

Изобразим три параллельных оси времени, пронумерованных от 0 до 2 (Рисунок 1). Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 — второму. Пусть имеется набор функций $S_1(t)$, $S_2(t)$, значения которых лежат в диапазоне $[0, 1]$ и обладают свойством $S_1(t) + S_2(t) \le 1$ для любых t.

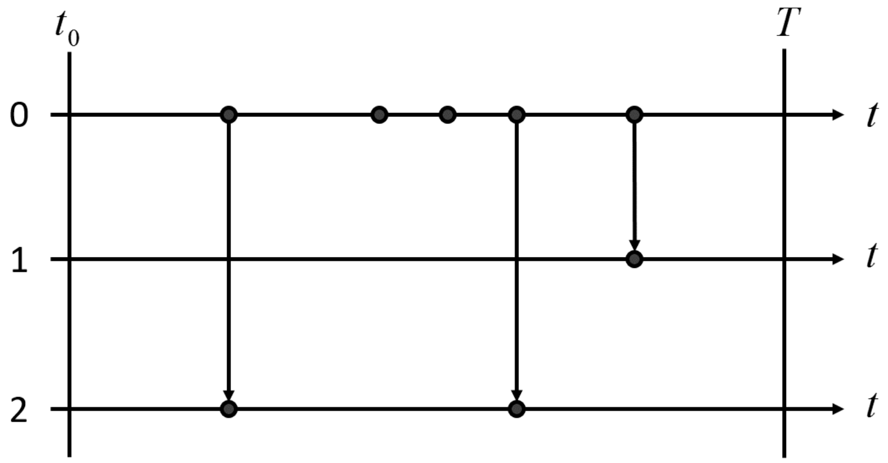

Рис. 1: Просеивание заявок входящего потока

Событие входящего потока может просеяться только на одну из осей 1 или 2. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$ к моменту времени T не закончит обслуживание на первой фазе, то есть просеется на ось 1 равна $S_1(t) = 1 - B_1(T - t)$. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$ к моменту времени T закончит обслуживание на первой фазе и не закончит на второй, то есть просеется на ось 2 равна $S_2(t) = B_1(T - t) - B_2^*(T - t)$, где $B_2^*(\tau) = (B_1 * B_2)(\tau)$ — свертка функций распределения $B_1(x)$, $B_2(x)$ длительности обслуживания на фазах системы. Причем заявка может не просеяться ни на одну из фаз с вероятностью $S_0(t) = 1 - S_1(t) - S_2(t)$, то есть к моменту времени T заявка закончит обслуживание на обеих фазах и покинет систему.

Обозначим через $n_k(t)$ — число событий, наступивших на k-ой оси просеянного потока до момента t, $W_k(t)$ — суммарный объем просеянных заявок на k-ю ось.

Как показано в [5], многомерное распределение вероятностей числа заявок на стадиях системы в момент времени T совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{i_1(T) = m_1, i_2(T) = m_2\} = P\{n_1(T) = m_1, n_2(T) = m_2\}$$

для любых $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots$. Нетрудно показать, что для исследуемого процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ справедливо:

$$P\{i_1(T) = m_1, V_1(T) < z_1, i_2(T) = m_2, V_2(T) < z_2\} =$$
$$= P\{n_1(T) = m_1, W_1(T) < z_1, n_2(T) = m_2, W_2(T) < z_2\} \tag{1}$$

для любых $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots$ и $z_1, z_2 > 0$. Будем использовать равенство (1) для исследования процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ с помощью исследования процесса $\{n_1(t), W_1(t), n_2(t), W_2(t)\}$.

2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Введем обозначение для распределения вероятностей двумерного Марковского процесса $P(n_1, w_1, n_2, w_2, t) = P\{n_1(t) = n_1, W_1(t) < w_1, n_2(t) = n_2, W_2(t) < w_2\}$. Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности получим:

$$P(n_1, z_1, n_2, z_2, t + \Delta t) = P(n_1, z_1, n_2, z_2, t)(1 - \lambda\Delta t) + P(n_1, z_1, n_2, z_2, t)(1 - S_1(t) - S_2(t))$$
$$+\lambda\Delta t S_1(t)\int\limits_0^{z_1} P(n_1 - 1, z_1 - y, n_2, z_2, t)\,dG(y) + \lambda\Delta t S_2(t)\int\limits_0^{z_2} P(n_1, z_1, n_2 - 1, z_2 - y, t)\,dG(y) + o(\Delta t) \qquad (2)$$

при этом будем считать, что

$$P(n_1, z_1, n_2, z_2, t_0) = \begin{cases} 1, & n_1 = z_1 = n_2 = z_2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из (2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(n_1, z_1, n_2, z_2, t)}{\partial t} = \lambda\left[S_1(t)\left(\int\limits_0^{z_1} P(n_1 - 1, z_1 - y, n_2, z_2, t)\,dG(y) - P(n_1, z_1, n_2, z_2, t)\right) +\right.$$
$$\left. +S_2(t)\left(\int\limits_0^{z_2} P(n_1, z_1, n_2 - 1, z_2 - y, t)\,dG(y) - P(n_1, z_1, n_2, z_2, t)\right)\right]. \qquad (3)$$

3 Характеристическая функция

Введем характеристическую функция вида:

$$h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1n_1}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1z_1}\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2n_2}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2z_2}P(n_1, dz_1, n_2, dz_2, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Учитывая, что

$$e^{ju_1}\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{ju_1(n_1-1)}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1y}e^{j\alpha_1(z_1-y)}\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2n_2}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2z_2}\int\limits_0^{z_1} P(n_1 - 1, d(z_1 - y), n_2, dz_2)\,dG(y) =$$
$$= e^{ju_1}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1y}\sum_{n_1=1}^{\infty} e^{ju_1(n_1-1)}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1(z_1-y)}\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2n_2}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2z_2}P(n_1 - 1, d(z_1 - y), n_2, dz_2)\,dG(y) =$$
$$= e^{ju_1}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1y}h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t)\,dG(y) = e^{ju_1}G^*(\alpha_1)\,h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t)$$

и

$$e^{ju_2}\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1n_1}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1z_1}\sum_{n_2=1}^{\infty} e^{ju_2(n_2-1)}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2y}e^{j\alpha_2(z_2-y)}\int\limits_0^{z_2} P(n_1, dz_1, n_2 - 1, d(z_2 - y))\,dG(y) =$$
$$= e^{ju_2}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2y}\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1n_1}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_1z_1}\sum_{n_2=1}^{\infty} e^{ju_2(n_2-1)}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2(z_2-y)}P(n_1, dz_1, n_2 - 1, d(z_2 - y))\,dG(y) =$$
$$= e^{ju_2}\int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha_2y}h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t)\,dG(y) = e^{ju_2}G^*(\alpha_2)\,h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t),$$

где

$$G^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{j\alpha y} dG(y),$$

можно записать следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial h(u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2,t)}{\partial t} = \lambda h(u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2,t)\left[S_1(t)\left(e^{ju_1}G^*(\alpha_1)-1\right)+S_2(t)\left(e^{ju_2}G^*(\alpha_2)-1\right)\right]. \qquad (4)$$

Найдем решение диффиренциального уравнения (4):

$$\frac{dh(u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2,t)}{h(u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2,t)} = \lambda\left[S_1(t)\left(e^{ju_1}G^*(\alpha_1)-1\right)+S_2(t)\left(e^{ju_2}G^*(\alpha_2)-1\right)\right]dt,$$

очевидно, оно имеет вид:

$$h(u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2,t) = \exp\left\{\lambda\left[\left(e^{ju_1}G^*(\alpha_1)-1\right)\int_{t_0}^{t} S_1(\tau)\,d\tau + \left(e^{ju_2}G^*(\alpha_2)-1\right)\int_{t_0}^{t} S_2(\tau)\,d\tau\right]\right\}.$$

Полагая $t = T$ и $t_0 \to -\infty$ для характеристической функции четырехмерного процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ в стационарном режиме получим:

$$h(u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2) = \exp\left\{\lambda\left[\left(e^{ju_1}G^*(\alpha_1)-1\right)b_1+\left(e^{ju_2}G^*(\alpha_2)-1\right)b_2\right]\right\},$$

где

$$b_1 = \int_0^\infty (1-B_1(\tau))\,d\tau,$$

$$b_2 = \int_0^\infty\left(B_1(\tau)-\int_0^\tau B_2(\tau-y)\,dB_1(y)\right)d\tau.$$

Аналогично, для двумерного процесса суммарного объема заявок на фазах $\{V_1(t), V_2(t)\}$ характеристическая функция распределения вероятностей в стационарном режиме имеет вид:

$$h(\alpha_1,\alpha_2) = \exp\left\{\lambda b_1\left(G^*(\alpha_1)-1\right)+\lambda b_2\left(G^*(\alpha_2)-1\right)\right\},$$

которая совпадает с [4].

Заключение

В работе рассмотрена двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на фазах. Заявки поступают на первую фазу системы в соответствии с простейшим потоком, после завершения обслуживания на первой фазе каждая заявка переходит на вторую фазу. Каждая заявка имеет некоторый пакет данных (объем заявки). Время обслуживания не зависит от объема заявки. В работе получена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок на фазах и их суммарного объема.

Список литературы

[1] Morozov E.V., Potakhina L.V. Speed-Up estimation of a system with random volume customers // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах. Под общей редакцией В.М. Вишневского и К.Е. Самуйлова. 2016. С. 334–336.

[2] Reich E. Waiting Times When Queues are in Tandem // Annals of Mathematical Statistics. 1957. V. 28, Iss. 3, P. 768–773.

[3] Вихрова О.Г., Сопин Э.С. Анализ показателей качества сети LTE с помощью систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом и случайными требованиями // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2. № 11. С. 185–191.

[4] Галилейская А.А. Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в двухфазной системе массового обслуживания с простейшим входящим потоком // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2017: Математика / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. с. 105.

[5] Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2012. Т. 2. № 2 (26). С. 248–251.

[6] Лисовская Е.Ю. Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в системе $M/GI/\infty$ // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016 Новосибирский государственный университет. 2016. С. 108.

[7] Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Исследование суммарного объема требований в бесконечнолинейной системе массового обслуживания вида $M/GI/\infty$ // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем материалы Всероссийской конференции с международным участием. Российский университет дружбы народов. 2016. С. 28–30.

[8] Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.

[9] Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Самуйлов А.К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2016. № 8. С. 125–132.

[10] Тихоненко О.М. Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций. Минск : БГУ, 2008.

[11] Тихоненко О.М Системы обслуживании требований случайной длины с ограничениями // Автоматика и телемеханика., 1991, № 10, С. 126–134.

Анастасия Александровна Галилейская — студент Национального исследовательского Томского государственного университета;
e-mail: lusta.nastya@mail.ru;
Екатерина Юрьевна Лисовская — аспирант Национального исследовательского Томского государственного университета;
e-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru.
Дата поступления — 12 мая 2017 г.