

Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство образования и науки Республики Бурятия
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук
Бурятский государственный университет
Иркутский государственный университет

МАТЕМАТИКА,
ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(МПМО17)

Материалы VI Международной конференции

26 июня – 1 июля 2017 г.

г. Улан-Удэ, Байкал

Улан-Удэ
Издательство ВСГУТУ
2017

международной научно-практической конференции – Новосибирск: СибАК, 2014.URL: <https://sibac.info/conf/econom/xliiii/39761> (дата обращения: 15.04.17).

3. Елтошкина Е.В., Бодякина Т.В., Васильева С.Е., Маслов Н. Математическая подготовка бакалавров в системе аграрного образования // Современные тенденции развития науки и технологий: сб. научных трудов по материалам XIII Международной научно-практической конференции. – Белгород, 2016 – С. 110-115.

УДК 519.216.3

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ АДДИТИВНЫХ ЗАВИСИМЫХ ШУМОВ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА

Емельянова Т.В.

Томский государственный университет, Россия, Томск, tv_em@mail.ru

Рассматривается задача оценивания периодического сигнала, наблюдаемого в дискретные моменты времени на фоне аддитивного шума авторегрессионного типа с неизвестной спектральной плотностью и распределением. Предлагается оценка для параметров сигнала по методу наименьших квадратов (МНК) со специальным правилом прекращения наблюдений. В отличие от классической оценки МНК такая оценка позволяет контролировать среднеквадратическую точность оценок. Получены формулы для среднеквадратической погрешности последовательной оценки, а также средней длительности предложенной процедуры. Приводятся результаты численного моделирования по методу Монте-Карло, дается сравнение с оценками МНК.

Ключевые слова: *последовательное оценивание, заданная среднеквадратическая точность, тригонометрическая регрессия, момент остановки, авторегрессионный шум.*

ON SEQUENTIAL ESTIMATION OF A PERIODIC SIGNAL DISTORTED BY AN ADDITIVE AUTOREGRESSIVE NOISE

Emelyanova T.V.

Tomsk State University, Russia, Tomsk, tv_em@mail.ru

The problem of estimating coefficients of a periodic signal in a discrete time from observations with an additive noise described by a stationary autoregressive process with unknown parameters and unknown distribution is considered. One-step sequential procedure to estimate signal coefficients is proposed, which provides a given mean-square accuracy of estimates for any values of the nuisance parameters. An asymptotic formula for the mean duration of the procedure is constructed. The results of Monte-Carlo simulation of the sequential procedure and its comparison with the LS-estimates are given.

Key words: *sequential estimation, given mean-square accuracy, trigonometric regression, stopping time, autoregressive noise*

Введение

В прикладных задачах, связанных с анализом сигналов в информационно-измерительных комплексах, с обработкой изображений, с автоматическим управлением и адаптивным регулированием широко используются регрессионные модели с дискретным и непрерывным временем. Для оценивания неизвестных параметров таких моделей часто применяют МНК, который является оптимальным во многих случаях, в том числе и в случае некоррелированных помех [1-3].

Менее изучена проблема оценивания параметров сигнала при шумах с неизвестными спектральными свойствами. Наличие дополнительных неизвестных (мешающих) параметров спектра шума существенно усложняет задачу вычисления точности оценок параметров сигнала (см., например, [4]). В работе [5] была предложена последовательная процедура оценивания периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами, обладающая хорошими асимптотическими свойствами и гарантирующая оценивание параметров

сигнала с любой заданной среднеквадратической точностью. Эта процедура, однако, оказывается достаточно сложной для практической реализации в случае нескольких неизвестных параметров, поскольку является двухэтапной и включает построение серии последовательных оценок МНК.

В данной работе предлагается одноэтапная последовательная процедура оценивания параметров периодического сигнала при авторегрессионном шуме с неизвестными параметрами, которая обеспечивает оценивание параметров сигнала с заданной среднеквадратической точностью в отличие от классической оценки МНК.

1. Постановка задачи. Построение последовательной процедуры

Рассмотрим задачу оценивания параметров $\mu_1, \mu_2, \beta_{j1}, \beta_{j2}, j=1, \dots, r$ тригонометрического сигнала

$$S_n = \mu_1 + (-1)^n \mu_2 + \sum_{j=1}^r \beta_{j1} \cos \omega_j n + \beta_{j2} \sin \omega_j n \quad (1)$$

по наблюдениям

$$x_n = S_n + \xi_n, \quad (2)$$

где ξ_n — шум, являющийся стационарным процессом авторегрессии p -го порядка:

$$\xi_n = \lambda_1 \xi_{n-1} + \dots + \lambda_p \xi_{n-p} + \varepsilon_n. \quad (3)$$

Здесь $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\varepsilon_n = 0, E\varepsilon_n^2 = \sigma^2$; $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — неизвестные параметры такие, что все корни характеристического полинома лежат внутри единичного круга комплексной плоскости. Относительно известных параметров ω_j предположим, что $0 < \omega_j < \pi, \omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$. Если сигнал S_n периодический и T — его период, $r = \left\lfloor \frac{T-1}{2} \right\rfloor, \omega_j = \frac{2\pi j}{T}$, то уравнением вида (3) может быть аппроксимирован стационарный процесс с зависимыми значениями. Задача оценивания сигнала (1) с некоррелированными шумами изучалась в [1, с. 113].

С учетом (1) и (3), наблюдаемый процесс (2) удовлетворяет уравнению

$$x_n = m_1 + (-1)^n m_2 + \sum_{j=1}^r (\gamma_{j1} \cos \omega_j n + \gamma_{j2} \sin \omega_j n) + \sum_{k=1}^p \lambda_k x_{n-k} + \varepsilon_n, n \geq p+1, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu_1 \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \right), m_2 = \mu_2 \left(1 - \sum_{l=1}^p (-1)^l \lambda_l \right), \\ \gamma_{j1} &= \beta_{j1} \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \cos \omega_j l \right) + \beta_{j2} \sum_{l=1}^p \lambda_l \sin \omega_j l, \\ \gamma_{j2} &= -\beta_{j1} \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \sin \omega_j l \right) + \beta_{j2} \left(1 - \sum_{l=1}^p \lambda_l \cos \omega_j l \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя обозначения

$$Y_n = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-p+1} \end{pmatrix}, \Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_1(n) \\ \vdots \\ \phi_{2r+2}(n) \end{pmatrix}, \phi_1(n) = 1, \phi_2(n) = (-1)^n, \quad (6)$$

$\phi_k(n) = \cos \omega_{k-2} n$ при $3 \leq k \leq r+2$, $\phi_k(n) = \sin \omega_{k-r-2} n$ при $r+3 \leq k \leq 2r+2$,

запишем это уравнение в векторной форме:

$$X_n = \alpha' Y_n + \varepsilon_n, n \geq p+1, \quad (7)$$

где $\alpha = (m_1, m_2, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{r1}, \gamma_{r2})'$ — вектор неизвестных параметров; Λ — множество всех допустимых значений вектора α , учитывающее требования на параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ в (3), штрих обозначает транспонирование.

Таким образом, исходная задача сводится к оцениванию вектора параметров α по наблюдениям процессов (X_n, Y_n) , $n = 1, \dots, N$.

Оценка МНК вектора параметров α по наблюдениям процесса (7) имеет вид

$$\alpha(n) = M_n^{-1} \sum_{k=1}^n Y_k x_k, \quad (8)$$

где $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k Y_k'$ — выборочная информационная матрица Фишера. Будем предполагать, что минимальное собственное значение $\lambda_1(M_n)$ матрицы M удовлетворяет с вероятностью единица условию $\lambda_1(M_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Как следует из (7), обратная матрица M_n^{-1} в (8) является случайной. Это создает трудности при анализе среднеквадратической точности оценки вектора параметров α . Чтобы обойти эти трудности, предлагается использовать последовательную оценку МНК со специальным правилом прекращения наблюдений. Выбор такого правила можно осуществить, используя оценку уклонения оценки МНК в модели типа (7), полученную в [6]. Для процесса (7) эта оценка имеет вид

$$\|\alpha(n) - \alpha\|^2 \leq \|M_n^{-2}\| \cdot \|m_n\|^2, \text{ где } m_n = \sum_{k=1}^n Y_k \varepsilon_k. \quad (9)$$

Поскольку в силу условия на матрицу M множитель $\|M_n^{-2}\|$ в правой части (9) монотонно стремится к нулю с ростом объема выборки n , это можно использовать для выбора момента остановки $\tau(h)$ последовательной процедуры.

Для любого положительного h

$$\tau = \tau(h) = \inf \left\{ n \geq 1 : \|M_n^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{h} \right\}. \quad (10)$$

Последовательную оценку МНК $\alpha^*(h)$ параметра α определим равенством

$$\alpha^*(h) = \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} \sum_{k=p+1}^{\tau(h)} \beta_k Y_k x_k, \quad \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} = \sum_{k=p+1}^{\tau(h)} \beta_k Y_k Y_k', \quad \beta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k < \tau(h), \\ \nu(h), & \text{если } k = \tau(h), \end{cases} \quad (11)$$

где корректирующий множитель $\nu(h)$, $0 < \nu(h) \leq 1$, находится из равенства

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\tau(h)-1} Y_k Y_k' + \nu(h) Y_{\tau(h)} Y_{\tau(h)}' \right) \right\|^{-2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{h}. \quad (12)$$

2. Теоретические свойства последовательной процедуры

При изучении свойств последовательного плана (10), (11) в зависимости от выбора порога h будем предполагать, что вектор неизвестных параметров α в уравнении (7), принадлежит некоторому известному компакту K из параметрического множества Λ .

Результаты анализа последовательного плана (10), (11), относящиеся к средней длительности последовательной процедуры и качеству последовательных оценок неизвестных параметров, сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Пусть $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ — последовательность н.о.р. случайных величин, $E\varepsilon_n = 0, E\varepsilon_n^2 = \sigma^2, E\varepsilon_n^8 < \infty$, Λ — множество допустимых значений вектора параметров α . Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K} \left| E_{\alpha} \frac{\tau(h)}{h} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \right| = 0,$$

где F — положительно определенная матрица, имеющая вид:

$$F = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1' & F_0 + DM_0D' \end{pmatrix}, \text{ в которой } M_0 = \text{diag} \left(1, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right),$$

$$V_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & (-1)^k & & 0 \\ & & V_1(k) & V_2(k) \\ 0 & & -V_2(k) & V_1(k) \end{pmatrix},$$

причем $V_1(k) = \text{diag}(\cos \omega_1 k, \dots, \cos \omega_r k)$, $V_2(k) = \text{diag}(\sin \omega_1 k, \dots, \sin \omega_r k)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ I_{p-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{r1} & \gamma_{r2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \sum_{k \geq 0} A^k \Gamma V(k), M_1 = M_0 V'(1) D', F_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N \zeta_n \zeta_n' \text{ п.н.},$$

$$\zeta_n = A \zeta_{n-1} + \eta_n, \zeta_p = 0,$$

$$\eta_n = (\varepsilon_n, 0, \dots, 0)'.$$

Заметим, что матрица M_n , обладает требуемым свойством $\lambda_{\min}(M_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Для любого компактного множества $K \subset \Lambda$ среднеквадратическая точность последовательной оценки удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\alpha \in K} E_{\alpha} \left(\left\| \alpha^*(h) - \alpha \right\|^2 \right) \leq \frac{b_K}{h} (1 + o(1)),$$

где $b_K = \sup_{\alpha \in K} \phi(\alpha)$, $\phi(\alpha) = Q(\alpha) \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}}$, $o(1) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$,

$$Q(\alpha) = \text{tr} F_0 + 2r + 2 + (2r + 2)^2 \left(\|D\|^2 + \frac{c}{1-q} \right)$$

Замечание. Теорема 2 позволяет контролировать среднеквадратическую точность последовательной оценки с помощью выбора порога h , учитывая, что величина b_K может быть вычислена априори. При этом средняя длительность процедуры, согласно теореме 1, растет линейно с ростом h .

3. Экспериментальное исследование процедуры

В данном разделе представлены результаты численного моделирования предлагаемой последовательной процедуры (10)-(12) оценивания параметров регрессии с дискретным временем по наблюдениям с аддитивным шумом Орнштейна-Уленбека (3)

$$X_n = S_n + \xi_n \quad (13)$$

на примере функции

$$S_n = a_1 \cos \frac{\pi n}{6} + a_2 \sin \frac{\pi n}{3}. \quad (14)$$

На рис.1 приводятся графики функции регрессии (14) с $a_1 = 0.5$ и $a_2 = 0.7$ (сплошная линия) и ее оценки по наблюдениям (пунктирная линия), построенной с помощью процедуры (10)-(12).

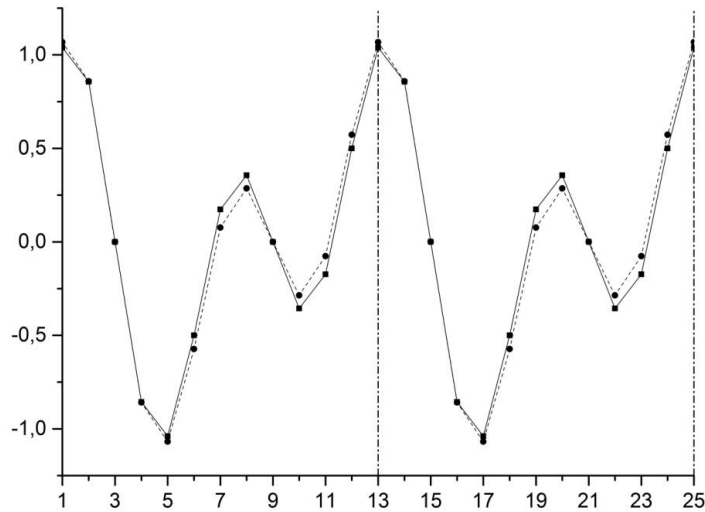


Рис.1. Сигнал и его оценка

Для проверки согласия выборочных свойств оценок (13), (14) с теоретическими результатами теорем 1,2 проводилось моделирование по методу Монте-Карло, включавшее 100 повторений процедуры при различных значениях порога H , определяющего момент остановки $\tau = \tau(H)$.

Таблица 1

A1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	2.5	2.5	2.5	0.5	0.5
A2	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	3.5	3.5	3.5	0.7	0.7
λ	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.9	-0.9
h	20	50	100	500	1000	20	100	500	50	500
$\tau^*(h)$	61	156	310	1556	3178	342	1496	7194	147	1454
$\frac{\tau^*(h)}{h}$	3.05	3.12	3.1	3.112	3.178	17.1	14.96	14.388	2.94	2.908
$\ F^{-2}\ ^{1/2}$	3.1433	3.1433	3.1433	3.1433	3.1433	14.3952	14.3952	14.3952	14.3952	14.3952

В таблице 1 приводятся результаты вычислений, полученные при параметре шума $\lambda = -0.6$ и $\lambda = -0.9$. Здесь даны значения оцениваемых параметров a_1 , a_2 , величина порога h , выборочная средняя длительность процедуры $\tau^*(h)$, удельная средняя длительность $\frac{\tau^*(h)}{h}$ и ее асимптотическое теоретическое значение $\|F^{-2}\|^{1/2}$. Сравнение двух последних строк в таблице 1 свидетельствует о согласии результатов моделирования с утверждением теоремы 1, поскольку выборочная

характеристика $\frac{\tau^*(h)}{h}$ близка к теоретическому значению.

Выборочные характеристики, касающиеся точности последовательных оценок, полученных по 100 реализациям процедуры с порогом $h = 50$, представлены в таблице 2

Таблица 2

A1	0.5	0.5	0.5	2.5	2.5	2.5
A2	0.7	0.7	0.7	3.5	3.5	-3.5
λ	-0.6	-0.6++	-0.9	-0.6	-0.9	-0.9
H	50	100	100	100	100	100
$SD(a_1^*)$	0.0062	0.001209	0.002835	0.000093	0.000212	0.000175
$SD(a_2^*)$	0.0030	0.004286	0.004606	0.000216	0.000471	0.000816
$SD(\tilde{a}_1)$	0.0006	0.003383	0.000584	0.000407	0.002096	0.000025
$SD(\tilde{a}_2)$	0.0376	0.002441	0.005686	0.000546	0.008286	0.002603

Здесь, наряду со значениями параметров модели a_1 , a_2 , в следующих за ними строках, приводятся среднеквадратические точности полученных последовательных оценок. В строках с заголовками $SD(\tilde{a}_1)$, $SD(\tilde{a}_2)$ даются среднеквадратические отклонения обычных оценок МНК (7), вычисленных по реализации длины N . Сравнение последовательных и обычных оценок МНК показывает, что они близки по точности. При этом, однако, следует учитывать, что последовательные оценки позволяют контролировать среднеквадратическую точность путем выбора порога h .

Заключение

В работе построена последовательная процедура оценивания параметров тригонометрического сигнала, наблюдаемого на фоне авторегрессионного шума. Используется специальное правило прекращения наблюдений, определяемое по выборочной информационной матрице Фишера, которое гарантирует заданную среднеквадратическую точность оценок неизвестных параметров.

Результаты работы могут быть использованы в задачах автоматического управления и идентификации.

Библиография

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 756 с.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 527 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
4. Konev V., Pergamenschikov S. On guaranteed estimation of the mean of an autoregressive process // Ann. Statist. – 1997. – V. 25, No. 5. – P. 2127-2163.
5. Конеv В.В., Пергаменичиков С.М. Гарантированное оценивание периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами // Проблемы передачи информации. – 1997. – Т.33, № 4. – С.26-44
6. Galtchouk L., Konev V. On Sequential Least Squares Estimates of Autoregressive Parameters // Sequential Analysis. – 2005. – V. 24, No. 4. – P. 335-364.