ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 61, № 1 ФИЗИКА 2018

УДК 530.145.86, 530.145.81

Т.К. АДОРНО[1], А.С. ПЕРЕЙРА[2]

КОГЕРЕНТНЫЕ И ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ*

Метод интегралов движения используется для построения семейств обобщенных когерентных состояний нерелятивистской бесспиновой заряженной частицы в постоянном электрическом поле. Получены семейства состояний, различающиеся значениями стандартных отклонений в начальный момент времени. В зависимости от начальных значений стандартных отклонений, а также от электрического поля оказывается возможным установить тождественность некоторых семейств полуклассическим состояниям.

Ключевые слова: *когерентные состояния, полуклассические состояния, уравнение Шрёдингера.*

Введение

Квантовые состояния, минимизирующие соотношение неопределенности для пары наблюдаемых, например координаты и импульса, были предложены в 1926 г. Шрёдингером [1]. С появлением лазеров в 1960-х годах эти состояния привлекли внимание после работ Рашевского [2], Глаубера [3], Клаудера [4–6] и Сударшана [7]. Теоретическая формулировка, лежащая в основе этих работ, позволила открыть новую область квантовой физики, известную как квантовая оптика, и в этом контексте был впервые использован термин *когерентные состояния* (КС). Для гармонического осциллятора КС имеют три эквивалентных определения, а именно: 1) КС являются собственными функциями оператора уничтожения; 2) минимизируют соотношение неопределенности Гейзенберга; 3) получаются сдвигом вакуумного состояния под действием унитарного оператора группы Вейля – Гейзенберга. Эти состояния образуют полный, но неортогональный набор векторов в гильбертовом пространстве, что позволяет характеризовать их как переполненный базис [5]. Из-за свойств этих состояний в квантовой физике были предложены различные обобщения КС в квазиклассическом описании квантовых систем, в теории квантования, в физике конденсированных сред, в теории излучения, в квантовых вычислениях и т.д. (см., например, [8–15]).

Другой важный класс квантовых состояний, который обеспечивает соответствие классическому описанию, известен как *полуклассические состояния* (ПС). В этих состояниях средние значения наблюдаемых больше соответствующих стандартных отклонений. Это свойство означает, что частица действительно движется вдоль классических траекторий. В частности, КС гармонического осциллятора совпадают с полуклассическими состояниями при условии, что стандартное отклонение не зависит от времени. Однако в общем случае тождественность КС и ПС не может быть установлена. Это возможно только в специальных случаях при некоторых условиях на параметры. Исследование этих случаев для нерелятивистской бесспиновой заряженной частицы в постоянном электрическом поле является предметом данной работы.

В п. 1 сделан обзор классической и квантовой динамики и кратко обсуждается метод интегралов движения для рассматриваемой задачи [13, 16–18]. В рамках этого метода устанавливаются различные семейства КС и *обобщенных когерентных состояний* (ОКС), удовлетворяющих уравнению Шрёдингера. Для обоих типов состояний обсуждаются стандартные отклонения и соотношения неопределенности. В п. 2, следуя модели, предложенной в [17], анализируются ОКС и условия, при которых эти состояния можно рассматривать как полуклассические.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке по Программе повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета среди ведущих мировых общеобразовательных центров (Т.К. Адорно) и по Программе повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского политехнического университета среди ведущих мировых общеобразовательных центров (А.С. Перейра; грант ВИУ-ФТИ-72/2017).

1. Заряженная частица в постоянном и однородном электрическом поле

1.1. Классическая и квантовая динамика. Когерентные состояния

Рассмотрим нерелятивистскую заряженную частицу с зарядом e (для электрона, $e=-|e|$), взаимодействующую с постоянным однородным электрическим полем $\boldsymbol{E}=(0,0,E)$ с потенциалами $A_0(z)$, $\boldsymbol{A}=(0,0,A(t))$, заданными формулами

$$A_0(z)=-zE\sin^2\alpha,\ A(t)=-ctE\cos^2\alpha,\ \alpha\in[0,\pi/2]. \tag{1}$$

Частица движется вдоль оси z, $z\in(-\infty,+\infty)$. Гамильтониан имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_z-\frac{e}{c}A(t)\right)^2+eA_0(z)=\frac{p_z^2}{2m}-m\xi z\sin^2\alpha+\xi p_z t\cos^2\alpha+\frac{m\xi^2}{2}t^2\cos^4\alpha, \tag{2}$$

где $\xi=eE/m$. Уравнения Гамильтона и их решения следующие:

$$\dot{z}(t)=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m}+\xi t\cos^2\alpha,\ \dot{p}_z(t)=-\frac{\partial H}{\partial z}=m\xi\sin^2\alpha,$$

$$z(t)=z_0+\frac{p_z^0}{m}t+\frac{1}{2}\xi t^2,\ p_z(t)=p_z^0+m\xi t\sin^2\alpha, \tag{3}$$

где $z_0=z(0)$, $p_z(0)=p_z^0$ – начальные данные задачи Коши.

Квантовая дииамика описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\partial_t\Psi(z,t)=\hat{H}\Psi(z,t),$$

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_z^2}{2m}-m\xi z\sin^2\alpha+\xi\hat{p}_z t\cos^2\alpha+\frac{m\xi^2}{2}t^2\cos^4\alpha, \tag{4}$$

которое в безразмерных величинах

$$\hat{q}=l^{-1}\hat{z},\qquad \hat{p}=\frac{l}{\hbar}\hat{p}_z,\ [\hat{q},\hat{p}]=i,\qquad \tau=\frac{\hbar}{ml^2}t,\qquad \Xi=\frac{m^2l^3}{\hbar^2}\xi \tag{5}$$

переписывается в виде

$$\hat{S}\Phi(q,\tau)=0,\ \hat{S}=\partial_\tau+i\hat{\mathcal{H}},\ \Phi(q,\tau)=\sqrt{l}\Psi\left(lq,\frac{ml^2}{\hbar}\tau\right),$$

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\hat{p}^2+\Xi\tau\hat{p}\cos^2\alpha-\Xi\hat{q}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\Xi^2\tau^2\cos^4\alpha,\qquad \hat{H}=\frac{\hbar^2}{ml^2}\hat{\mathcal{H}}. \tag{6}$$

Для решения уравнения Шрёдингера полезно ввести оператор $\hat{A}(\tau)$, связанный с канонической парой $(\hat{q},\hat{p})$ линейным преобразованием

$$\hat{A}(\tau)=\frac{f(\tau)\hat{q}+ig(\tau)\hat{p}}{\sqrt{2}}+\varphi(\tau), \tag{7}$$

где коэффициенты $f(\tau)$, $g(\tau)$, $\varphi(\tau)$ зависят от времени. Оператор (7) является интегралом движения [13, 16 – 18], если выполняется условие*

$$d_\tau\hat{A}(\tau)=\left[\hat{S},\hat{A}(\tau)\right]=0. \tag{8}$$

С учетом (8) функции $f(\tau)$, $g(\tau)$, $\varphi(\tau)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям первого порядка

---

* Если $\hat{H}$ самосопряжен, то при выполнении условия (8) сопряженный оператор $\hat{A}^\dagger(\tau)$ также является интегралом движения.

$$\dot{f}(\tau)=0,\qquad \dot{g}(\tau)=if(\tau),\qquad \dot{\varphi}(\tau)=-\frac{\Xi}{\sqrt{2}}\left[ig(\tau)\sin^2\alpha+\tau f(\tau)\cos^2\alpha\right], \tag{9}$$

решение которых имеет вид

$$f(\tau)=f_0,\qquad g(\tau)=g_0+if_0\tau,\qquad \varphi(\tau)=-\left[ig(\tau)\sin^2\alpha+\frac{f_0\tau}{2}\right]\frac{\Xi\tau}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

с постоянными f_0 и g_0. Если $f(\tau)$, $g(\tau)$, $\varphi(\tau)$ имеют указанный вид, то для $\hat{S}$ и $\hat{A}(\tau)$ может быть найден базис из общих собственных векторов, например

$$\hat{S}|\zeta,\tau\rangle=\lambda_\zeta(\tau)|\zeta,\tau\rangle; \tag{11}$$

$$\hat{A}(\tau)|\zeta,\tau\rangle=\zeta|\zeta,\tau\rangle, \tag{12}$$

где $\zeta\in\mathbb{C}$, причем $\lambda_\zeta(\tau)$ является произвольной функцией, зависящей от времени. Если кроме условия (8) потребовать, чтобы $\hat{A}(\tau)$ и сопряженная ей величина $\hat{A}^\dagger(\tau)$ удовлетворяли обычному коммутационному соотношению для операторов рождения и уничтожения,

$$\left[\hat{A}(\tau),\hat{A}^\dagger(\tau)\right]=1,$$

то постоянные f_0 и g_0 удовлетворяют дополнительному соотношению

$$\mathrm{Re}\left[f_0g^*(\tau)\right]=\mathrm{Re}\left(f_0g_0^*\right)=1, \tag{13}$$

которое используется в дальнейшем. Таким образом, ввиду (10) и (13), $|\zeta,\tau\rangle$ является собственным состоянием оператора уничтожения $\hat{A}(\tau)$. В q-представлении, $\Phi_\zeta(q,\tau)=\langle q\,|\,\zeta,\tau\rangle$, уравнение (12) принимает вид

$$\left[\sqrt{2}\varphi(\tau)+f_0q+g(\tau)\partial_q\right]\Phi_\zeta(q,\tau)=\sqrt{2}\zeta\Phi_\zeta(q,\tau). \tag{14}$$

Общее решение уравнения (14) задается формулой

$$\Phi_\zeta(q,\tau)=\exp\left[-\frac{f_0}{g(\tau)}\frac{q^2}{2}-\frac{\sqrt{2}\left(\varphi(\tau)-\zeta\right)}{g(\tau)}q+i\phi(\tau)\right], \tag{15}$$

где $\phi(\tau)$ – произвольная функция, зависящая от времени. Решение (15) удовлетворяет уравнению Шрёдингера при условии, что оно отвечает нулевому собственному значению в уравнении (11). Это значит, что $\phi(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\phi(\tau)=\frac{i}{2}\ln g(\tau)-\int\frac{Q(\tau)}{2}d\tau-i\ln\mathcal{N},\qquad Q(\tau)=\left(\frac{i\sqrt{2}\varphi(\tau)}{g(\tau)}+\Xi\tau\cos^2\alpha\right)^2=\left(1-\frac{if_0}{g(\tau)}\frac{\tau}{2}\right)^2\Xi^2\tau^2,$$

где $\mathcal{N}$ – нормировочная постоянная. Наконец, при наложении на $\Phi_\zeta(q,\tau)$ условия квадратичной интегрируемости, состояния (15) приобретают окончательный вид

$$\Phi_\zeta(q,\tau)=\exp\left[\sqrt{2}\frac{q+\sqrt{2}Re\left(\varphi(\tau)g^*(\tau)\right)}{g(\tau)}\zeta-\frac{g^*(\tau)}{g(\tau)}\frac{\zeta^2}{2}-\frac{|\zeta|^2}{2}\right]\Phi_0(q,\tau),$$

$$\Phi_0(q,\tau)=\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{g(\tau)}}\exp\left\{-\frac{f_0}{g(\tau)}\frac{q^2}{2}-\sqrt{2}\frac{\varphi(\tau)}{g(\tau)}q-|g(\tau)|^2\left[Re\left(\frac{\varphi(\tau)}{g(\tau)}\right)\right]^2+\int\frac{ReQ(\tau)}{2i}d\tau\right\}. \tag{16}$$

Двухпараметрическое семейство функций $\Phi_\zeta(q,\tau)$, зависящих от параметров f_0 и g_0, называется нестационарными обобщенными когерентными состояниями (ОКС). Помимо того, что эти состояния являются решениями уравнения Шрёдингера (11), они удовлетворяют основным свойствам КС, а именно являются собственными состояниями оператора уничтожения, что описывается

уравнением (12), а также образуют переполненный нормированный базис [17, 18]. Для полноты описания заметим, что ОКС можно записать в обычном виде как

$$|\zeta,\tau\rangle = \exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{\sqrt{n!}}|n,\tau\rangle,\ |n,\tau\rangle = \frac{\left[\hat{A}^\dagger(\tau)\right]^n}{\sqrt{n!}}|0,\tau\rangle.$$

1.2. Соотношения неопределенности

Для некоторых систем КС обладают тем замечательным свойством, что могут быть построены как решения соотношений неопределенности Гейзенберга и Робертсона – Шрёдингера. Рассмотренные выше ОКС обладают теми же свойствами и, в частности, минимизируют соотношение неопределенности Гейзенберга при $\tau = 0$ при соответствующем выборе постоянных f_0 и g_0. Для доказательства этих свойств удобно выразить операторы $\hat{q}$, $\hat{p}$ в терминах операторов рождения и уничтожения $\hat{A}(\tau)$, $\hat{A}^\dagger(\tau)$:

$$\hat{q} = \frac{g^*\hat{A} + g\hat{A}^\dagger - 2\mathrm{Re}\left(g^*(\tau)\varphi(\tau)\right)}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{p} = \frac{f_0^*\hat{A} - f_0\hat{A}^\dagger - 2i\mathrm{Im}\left(f_0^*\varphi(\tau)\right)}{i\sqrt{2}}. \tag{17}$$

Мы также используем уравнение (12) для вычисления основных средних значений:

$$\overline{q}(\tau) \equiv \langle\zeta,\tau|\hat{q}|\zeta,\tau\rangle = \langle\hat{q}\rangle = \sqrt{2}Re\left[g^*(\zeta-\varphi)\right] = \overline{q}_0 + \overline{p}_0\tau + \frac{\Xi}{2}\tau^2,$$

$$\overline{p}(\tau) \equiv \langle\zeta,\tau|\hat{p}|\zeta,\tau\rangle = \langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2}\mathrm{Im}\left[f_0^*(\zeta-\varphi)\right] = \overline{p}_0 + \Xi\tau\sin^2\alpha,$$

$$\overline{q}_0 = \overline{q}(0) = \sqrt{2}Re\left(g_0^*\zeta\right), \qquad \overline{p}_0 = \overline{p}(0) = \sqrt{2}\mathrm{Im}\left(f_0^*\zeta\right). \tag{18}$$

Для обозначения средних используем горизонтальную черту. В результате, ζ можно записать в виде

$$\zeta = \frac{f_0\overline{q}(\tau) + ig(\tau)\overline{p}(\tau)}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau) = \frac{f_0\overline{q}_0 + ig_0\overline{p}_0}{\sqrt{2}}, \tag{19}$$

что следует либо из решения системы (18) для ζ, либо из среднего значения для $\hat{A}(\tau)$, как и ожидалось.

Вычисляя средние значения операторов $\hat{q}^2$ и $\hat{p}^2$:

$$\overline{q}^2(\tau) = 2\left[\mathrm{Re}\left(g^*(\zeta-\varphi)\right)\right]^2 + \frac{|g|^2}{2}, \qquad \overline{p}^2(\tau) = 2\left[\mathrm{Im}\left(f_0^*(\zeta-\varphi)\right)\right]^2 + \frac{|f_0|^2}{2}, \tag{20}$$

находим выражения для стандартных отклонений координаты $\sigma_q(\tau)$ и импульса $\sigma_p(\tau)$:

$$\sigma_q(\tau) = \sqrt{\left\langle\left(\hat{q} - \langle\hat{q}\rangle\right)^2\right\rangle} = \frac{|g(\tau)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sigma_q^2 + \sqrt{4\sigma_q^2\sigma_p^2 - 1}\tau + \sigma_p^2\tau^2},$$

$$\sigma_p(\tau) = \sqrt{\left\langle\left(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle\right)^2\right\rangle} = \sigma_p(0) \equiv \sigma_p = \frac{|f_0|}{\sqrt{2}}, \sigma_q \equiv \sigma_q(0) = \frac{|g_0|}{\sqrt{2}}. \tag{21}$$

Чтобы стандартное отклонение $\sigma_q(\tau)$ в (21) было вещественным, принцип неопределенности Гейзенберга должен выполняться при $\tau = 0$:

$$\sigma_q\sigma_p \geq 1/2. \tag{22}$$

Если это так, то принцип неопределенности выполняется для любого значения τ, то есть $\sigma_q(\tau)\sigma_p(\tau) \geq 1/2$, поскольку $\sigma_q(\tau) \geq \sigma_q$. Кроме того, вычисляя коварицию $\sigma_{qp}(\tau)$:

$$\sigma_{qp}(\tau) = \frac{1}{2}\left\langle\left(\hat{q} - \langle\hat{q}\rangle\right)\left(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle\right) - \left(\hat{p} - \langle\hat{p}\rangle\right)\left(\hat{q} - \langle\hat{q}\rangle\right)\right\rangle = \frac{f_0^*g(\tau) - 1}{2i},$$

находим, что соотношения неопределенности Робертсона – Шрёдингера [20, 21] выполняются тождественно:

$$\sigma_q^2(\tau)\sigma_p^2(\tau)-\sigma_{qp}^2(\tau)=1/4. \tag{23}$$

Это значит, что ОКС являются сжатыми состояниями.

В терминах величин $\overline{q}(\tau)$ и $\overline{p}(\tau)$, определенных в (18), ОКС (16) можно записать в виде

$$\Phi_\zeta(q,\tau)=\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{g(\tau)}}\exp\left\{-\frac{f_0}{g(\tau)}\frac{\left[q-\overline{q}(\tau)\right]^2}{2}+\frac{i\overline{p}(\tau)}{2}\left[2q-\overline{q}(\tau)\right]+i\rho(\tau)\right\}, \tag{24}$$

где

$$\rho=\rho^*=\frac{\mathrm{Im}\left(f_0\varphi^*(\tau)\right)\overline{q}(\tau)+\mathrm{Re}\left(g^*(\tau)\varphi(\tau)\right)\overline{p}(\tau)}{\sqrt{2}}+\mathrm{Im}\left(\frac{g^*(\tau)}{g(\tau)}\frac{\varphi^2(\tau)}{2}\right)+\int\frac{ReQ(\tau)}{2}d\tau. \tag{25}$$

Из такого представления легко видеть, что соответствующая плотность вероятности $\rho(q,\tau)$,

$$\rho(q,\tau)=\left|\Phi_\zeta(q,\tau)\right|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q(\tau)}\exp\left\{-\frac{\left[q-\overline{q}(\tau)\right]^2}{2\sigma_q^2(\tau)}\right\}, \tag{26}$$

является гауссовым распределением, стандартное отклонение $\sigma_q(\tau)$ которого соответствует стандартным отклонениям координат, найденным в (21). Поэтому средние значения $\overline{q}(\tau)$, $\overline{p}(\tau)$ движутся по классическим траекториям, что позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между математическими ожиданиями (21) и решениями уравнений Гамильтона (3). Используя уравнение (5), можно записать

$$\overline{q}_0=\sqrt{2}\mathrm{Re}\left(g_0^*\zeta\right)=2\sigma_q\mathrm{Re}\left(e^{-i\arg g_0}\zeta\right),\qquad \overline{p}_0=\sqrt{2}\mathrm{Im}\left(f_0^*\zeta\right)=2\sigma_p\mathrm{Im}\left(e^{-i\arg f_0}\zeta\right), \tag{27}$$

что позволяет найти соответствие

$$2\sigma_z\mathrm{Re}\left(e^{-i\arg g_0}\zeta\right)\leftrightarrow z_0,\qquad 2\sigma_{p_z}\mathrm{Im}\left(e^{-i\arg f_0}\zeta\right)\leftrightarrow p_z^0,$$

где $\sigma_q=l^{-1}\sigma_z$; $\sigma_p=l\hbar^{-1}\sigma_{p_z}$.

Если наложить требование минимизации соотношения неопределенностей (22) при $\tau=0$,

$$\sigma_q\sigma_p=1/2, \tag{28}$$

то двухпараметрическое семейство ОКС (24), параметризованное f_0 и g_0, редуцируется к однопараметрическому семейству с $f_0=f_0^*=g_0^{-1}$. Полученные таким образом состояния параметризуются лишь начальными стандартными отклонениями координат σ_q. Для простоты назовем эти состояния когерентными (КС).

2. Когерентные состояния как полуклассические

КС являются гауссовыми, а их плотность движется по классической траектории. Эти две характеристики являются общими как для когерентных, так и для полуклассических состояний. Поэтому разумно поставить вопрос, могут ли когерентные состояния считаться полуклассическими во все моменты времени? В общем случае ответ отрицателен, так как при полуклассическом движении изменение во времени соответствующей плотности вероятности $\rho(q,\tau)$ должно быть медленным. Это означает, что квантовое движение в некотором смысле «ограничено» областью, определяемой стандартным отклонением координаты $\sigma_q(\tau)$. В свою очередь, эта величина зависит от импульса частицы и от внешнего поля, поэтому $\sigma_q(\tau)$ и $\rho(q,\tau)$ могут меняться быстрее или медленнее в зависимости от этих величин. Чтобы найти условия, при которых ОКС можно рассматривать как полуклассические состояния, обратимся к критерию, который особенно полезен

для одномерного движения* (предварительный анализ для свободной частицы был проведен в [17]).

Критерий может быть сформулирован следующим образом: эволюция плотности $\rho(q,\tau)$ соответствует движению частицы, а стандартное отклонение $\sigma_q(\tau)$ возрастает со временем. Таким образом, к некоторому моменту времени τ распределение для $\rho(q,\tau)$ «расплылось» на $\Delta\sigma_q(\tau)=\sigma_q(\tau)-\sigma_q$, а частица прошла расстояние $\Delta z(t)=z(t)-z_0$. Записывая $\Delta\sigma_q(\tau)$ в размерной форме $\Delta\sigma_q(\tau)=l^{-1}\Delta\sigma_z(t)$:

$$\Delta\sigma_z(t)=\sigma_z\left[\sqrt{1+2\frac{t}{t_\sigma}\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2\sigma_z\sigma_{p_z}}\right)^2}+\frac{t^2}{t_\sigma^2}}-1\right], \tag{29}$$

где $t_\sigma=m\left(\sigma_z/\sigma_{p_z}\right)$, можно сравнить обе шкалы длины, используя отношение

$$R(t)=\frac{\Delta\sigma_z(t)}{\Delta z(t)}, \tag{30}$$

и обнаружить, что если $R(t)\ll 1$, то ОКС и КС могут рассматриваться как полуклассические состояния.

Изучим условия, при которых неравенство $R(t)\le 1$ выполняется в общем случае. Начинаем со случая свободной частицы. Положим $\xi=0$ в соотношениях (3) и представим $R(t)$ в виде

$$R(t)=\frac{\sqrt{1+2(t/t_\sigma)Y+(t/t_\sigma)^2}-1}{(t/t_\sigma)X},\quad X=\frac{p_z}{\sigma_{p_z}},\quad Y=\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2\sigma_z\sigma_{p_z}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{X^2}{X_\sigma^2}},\quad X_\sigma=\frac{2p_z\sigma_z}{\hbar}. \tag{31}$$

Из этих соотношений следует, что $R(t)\le 1$, если выполняется одно из условий:

$$\text{i) } X\ge 1 \text{ или ii) } t<t_c, \text{ если } Y\le X<1, \tag{32}$$

где t_c – *критическое время для свободной частицы*,

$$t_c=\frac{\delta t_\sigma}{\left|X^2-1\right|},\qquad \delta=2\left|X-Y\right|. \tag{33}$$

Условие (i) означает, что неравенство $R(t)\le 1$ выполняется для любого момента времени t вследствие того, что импульс p_z частицы больше или равен своему стандартному отклонению σ_{p_z}. В случае (ii) неравенство $R(t)\le 1$ справедливо только в течение некоторого промежутка времени, $t\in[0,t_c]$. Эти особенности становятся более прозрачными, если ввести де-бройлевскую длину волны $\lambda=2\pi\hbar/p_z$. На этом языке X и Y принимают вид

$$X=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\frac{\hbar}{\sigma_{p_z}},\qquad X_\sigma=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)2\sigma_z. \tag{34}$$

Следовательно, из условия (i) вытекает $\lambda\sigma_{p_z}\le 2\pi\hbar$, и если стандартное отклонение σ_{p_z} импульса значительно меньше величины, обратной длине волны де Бройля, $\sigma_{p_z}\ll 2\pi\hbar/\lambda$, то ОКС можно рассматривать как для любого t. В этом случае справедливо неравенство $R(t)\ll 1$. С другой стороны, если выполнено условие (ii), то ОКС не могут рассматриваться как полуклассические для

* Следует отметить, что данный критерий не является общим. Одно из принятых определений вытекает из неравенства $\zeta\gg 1$, которое полезно как для частицы, движущейся в более чем одном измерении, так и частицы в магнитном поле соленоида [19].

любого t и являются таковыми лишь при условии $t \ll t_{\text{c}}$. Поэтому ОКС могут рассматриваться как ПС, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\sigma_{p_z} \ll \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \text{ или } t \ll t_{\text{c}}, \text{ если } \frac{2\pi\hbar}{\lambda} < \sigma_{p_z} \le \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\left[1+\left(\frac{\lambda}{4\pi\sigma_z}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{35}$$

Для значений σ_{p_z} из последнего интервала ОКС являются квантовыми состояниями для $t \ge t_{\text{c}}$. Более того, ОКС являются квантовыми состояниями при условии

$$\sigma_{p_z} > \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\left[1+\left(\frac{\lambda}{4\pi\sigma_z}\right)^2\right]^{1/2} \tag{36}$$

для любого момента времени $t \in [0,\infty)$.

Приведенные рассуждения несколько отличаются в случае КС. С учетом (28), имеют место равенства $X = X_\sigma$, $Y = 0$, в силу которых условия (32) модифицируются следующим образом:

$$\text{i) } X_\sigma \ge 1 \text{ или ii) } t < \tilde{t}_{\text{c}}, \text{ если } X_\sigma < 1, \tag{37}$$

где критическое время $\tilde{t}_{\text{c}}$ для свободной частицы получается как частный случай уравнения (33):

$$\tilde{t}_{\text{c}} = \frac{2t_\sigma X_\sigma}{\left|X_\sigma^2 - 1\right|}. \tag{38}$$

Следовательно, КС могут рассматриваться в качестве ПС при выполнении следующих условий:

$$\lambda \ll 4\pi\sigma_z \text{ или } t \ll \tilde{t}_{\text{c}}, \text{ если } \lambda \ge 4\pi\sigma_z, \tag{39}$$

что соответствует модификации условий (35). Следует отметить, что первое из неравенств (39) совпадает с предыдущей оценкой [17]. В случае $\lambda \ge 4\pi\sigma_z$ КС являются полуклассическими состояниями также при $t \ge \tilde{t}_{\text{c}}$.

Рассмотрим случай частицы в электрическом поле. Согласно уравнениям Гамильтона (3),

$$\Delta z(t) = \sigma_z\left[(t/t_\sigma)X + (t/t_\sigma)^2 W\right], \qquad W = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\sigma_{p_z}}\right)^2 \frac{\sigma_z}{\lambda_e}\frac{E}{E_{\text{c}}}, \tag{40}$$

и сотношение (30) теперь имеет вид

$$R(t) = \frac{\sqrt{1+2(t/t_\sigma)Y + (t/t_\sigma)^2} - 1}{(t/t_\sigma)X + (t/t_\sigma)^2 W}, \tag{41}$$

где $\lambda_e = \hbar/mc$ и $E_{\text{c}} = m^2c^3/e\hbar$ – комптоновская длина волны и критическое значение электрического поля соответственно. Электрическое поле может быть классифицировано как сильное, если $2W \ge 1$, умеренное при $1 - X^2 \le 2W < 1$ и слабое, если $0 < 2W < 1 - X^2$. Поэтому неравенство $R(t) \le 1$ выполняется для любого $t \in [0,\infty)$, если справедливо хотя бы одно из следующих условий:

$$\text{iii) } X \ge 1 \text{ или iv) } 2W \ge 1, \text{ или v) } Y \le X < 1, \text{ если } 1 - X^2 \le 2W < 1. \tag{42}$$

Условие (iii) совпадает с условием (i) в уравнении (32) для свободной частицы и не зависит от амплитуды E электрического поля. Кроме того, если поле сильное в соответствии с условием (iv), то неравенсто $R(t) \le 1$ справедливо независимо от значений X и Y (или, эквивалентным образом, независимо от значений стандартного отклонения σ_{p_z} импульса или стандартного отклонения σ_z координаты). Для полей с умеренной амплитудой, удовлетворяющих условию (v), неравенство $R(t) \le 1$ выполняется только при $Y \le X < 1$. Следует отметить, что $R(t) \le 1$ для любых t также при $X = Y$. Это условие невозможно для свободной частицы, как ясно из (31), но может выполняться для умеренного электрического поля.

Случаи, когда условия (42) не выполняются, требуют отдельного анализа. Например, в специальном случае $X = Y$ и слабых электрических полях

$$\text{vi)}\ X = Y \quad \text{и} \quad 0 < 2W < 1 - X^2 \tag{43}$$

неравенство $R(t) \le 1$ справедливо только при $t \ge t_{\text{c}}^{\text{vi}}$:

$$t_{\text{c}}^{\text{vi}} = t_\sigma \frac{X}{W}\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta}{X^2}} - 1\right), \qquad \Delta = \left|X^2 + 2W - 1\right|, \tag{44}$$

где t_{c}^{vi} – критическое время, соответствующее условию (iv). Если условия (42) не выполняются, например в случаях

$$\text{vii)}\ X < Y \ \text{ и } \ 1 - X^2 \le 2W < 1 \ \text{ или } \ \text{viii)}\ X < Y \ \text{ и } \ 0 < 2W < 1 - X^2, \tag{45}$$

критическое время не совпадает с выражением (44) и, вообще говоря, соответствует вещественному положительному решению некоторого кубического неравенства. В этих случаях удобнее ввести *эталонное время* t_{ref} (отличное от критического), для которого условие $t \ge t_{\text{ref}}$ является достаточным (хотя и не необходимым) для выполнения неравенства $R(t) \le 1$. Например, при условии (vii) эталонное время дается выражением

$$t_{\text{ref}}^{\text{vii}} = t_\sigma \min\left(\frac{\delta}{\Delta}, \sqrt{\frac{\delta}{2XW}}, \left(\frac{\delta}{W^2}\right)^{1/3}\right), \qquad \delta = 2\left|X - Y\right|, \tag{46}$$

а в случае (viii)

$$t_{\text{ref}}^{\text{viii}} = t_\sigma \frac{\Delta}{4XW}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{8XW\delta}{\Delta^2}}\right]. \tag{47}$$

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что ОКС можно считать полуклассическими для любых t, если стандартное отклонение σ_{p_z} импульса намного меньше величины, обратной к длине волны де Бройля, либо если электрическое поле является достаточно сильным:

$$\sigma_{p_z} \ll \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \ \text{ или } \ E \gg \left(\frac{\sigma_{p_z}}{mc}\right)^2 \left(\frac{\lambda_e}{\sigma_z}\right) E_{\text{c}}. \tag{48}$$

Если ни одно из этих условий не выполняется, то ОКС не могут рассматриваться как полуклассические состояния ПС для всех t. Например, если электрическое поле является умеренным в соответствии с условиями

$$\text{v)}\ \left(\frac{\sigma_{p_z}}{mc}\right)^2 \frac{\lambda_e}{\sigma_z}\left[1 - \left(\frac{2\pi\hbar}{\sigma_{p_z}\lambda}\right)^2\right] \le \frac{E}{E_{\text{c}}} < \left(\frac{\sigma_{p_z}}{mc}\right)^2 \frac{\lambda_e}{\sigma_z} \tag{49}$$

и соответствующие стандартные отклонения σ_{p_z}, σ_z удовлетворяют неравенствам

$$\text{v)}\ \frac{2\pi\hbar}{\lambda} < \sigma_{p_z} \le \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\sigma_z}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{50}$$

то ОКС можно рассматривать как ПС только по истечении достаточно большого времени, $t \gg 0$.

Более жесткие условия возникают для слабого поля в случае, если σ_{p_z}, σ_z удовлетворяют условию

$$\text{vi)}\ \sigma_{p_z} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\sigma_z}\right)^2\right]^{1/2} \ \text{ и } \ 0 < \frac{E}{E_{\text{c}}} < \left(\frac{\sigma_{p_z}}{mc}\right)^2 \frac{\lambda_e}{\sigma_z}\left[1 - \left(\frac{2\pi\hbar}{\sigma_{p_z}\lambda}\right)^2\right]. \tag{51}$$

В этом случае ОКС можно рассматривать как ПС только при $t \gg t_{\mathrm{c}}^{\mathrm{vi}}$, где $t_{\mathrm{c}}^{\mathrm{vi}}$ определено в (44). Для достаточно больших значений σ_{p_z},

$$\sigma_{p_z} > \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\left[1+\left(\frac{\lambda}{4\pi\sigma_z}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{52}$$

и умеренных электрических полей, как в (49), ОКС можно рассматривать как ПС только при $t \gg t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{vii}}$, где $t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{vii}}$ задано с помощью (46). Однако если электрическое поле слабое, то ОКС можно рассматривать как ПС только при $t \gg t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{viii}}$, где $t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{viii}}$ задано формулой (47). Эти более жесткие условия являются следствием неравенств (45).

Сделанный выше анализ должен быть модифицирован, если рассматриваемые состояния являются КС. В этом случае $X = X_\sigma$, $Y = 0$, причем $W = W_\sigma = 2\left(\sigma_z/\lambda_e\right)^3 E/E_{\mathrm{c}}$, так что условия (iii), (iv), (v), заданные формулой (42), меняются на следующие:

$$\text{iii) } X_\sigma \geq 1,\ \text{ iv) } 2W_\sigma \geq 1,\ \text{ v) } X_\sigma < 1 \text{ и } 1 - X_\sigma^2 \leq 2W_\sigma < 1. \tag{53}$$

Поэтому, если хотя бы одно из этих условий выполнено, то $R(t) \leq 1$ для любого $t \in [0,\infty)$. Если электрическое поле слабое, но X_σ – малая величина,

$$\text{ix) } 0 < 2W_\sigma < 1 - X_\sigma^2 \ \ u \ \ X_\sigma < 1, \tag{54}$$

то условие $R(t) \leq 1$ справедливо при $t \geq t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{ix}}$, где $t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{ix}}$ – эталонное время, соответствующее условию (54):

$$t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{ix}} = t_\sigma \frac{\sqrt{\Delta_\sigma}}{W_\sigma} \min\left(1, \frac{\sqrt{\Delta_\sigma}}{2X_\sigma}\right). \tag{55}$$

Наконец, в соответствии с приведенными выше результатами, КС можно рассматривать как полуклассические состояния, если стандартное отклонение σ_z координат частицы намного больше, чем ее длина волны де Бройля λ, или если электрическое поле достаточно велико:

$$\text{iii) } \sigma_z \gg \frac{\lambda}{4\pi} \text{ или iv) } E \gg \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_e}{\sigma_z}\right)^3 E_{\mathrm{c}}. \tag{56}$$

Если, однако, среднее стандартное отклонение координат мало, а электрическое поле слабое,

$$\text{ix) } 0 < \frac{E}{E_{\mathrm{c}}} < \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_e}{\sigma_z}\right)^3\left[1-\left(\frac{4\pi\sigma_z}{\lambda}\right)^2\right] \text{ и } \sigma_z \leq \frac{\lambda}{4\pi}, \tag{57}$$

то КС можно по-прежнему считать полуклассическими состояниями для достаточно больших t, а именно при $t \gg t_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{ix}}$.

Заключение

В работе рассмотрена проблема построения ОКС и КС для нерелятивистской бесспиновой частицы в постоянном однородном электрическом поле. Использование метода интегралов движения позволило проанализировать ОКС, соотношения неопределенности и условия, при которых эти состояния можно рассматривать как полуклассические. Полученные ОКС удовлетворяют соотношениям неопределенности Робертсона – Шрёдингера и Гейзенберга и в этом их свойства совпадают с ОКС свободной частицы [17]. Учитывая, что плотность вероятности для ОКС должна медленно меняться во времени при полуклассическом движении, мы нашли условия на стандартные отклонения координаты σ_z, импульса σ_{p_z} и на амплитуду электрического поля, при которых ОКС рассматриваются как ПС. В зависимости от значений этих величин КС либо могут, либо не могут рассматриваться как полуклассические в течение всего времени. При изучении этих условий для свободной частицы ОКС можно рассматривать как ПС, предполагая, что длина волны де

Бройля электрона удовлетворяет неравенству $\lambda \ll 2\pi\hbar/\sigma_{p_z}$, в то время как КС можно рассматривать как ПС, если $\lambda \ll 4\pi\sigma_z$. Оба этих случая справедливы в течение всего времени. С другой стороны, если $\lambda \geq 2\pi\hbar/\sigma_{p_z}$ (для ОКС) либо $\lambda \geq 4\pi\sigma_z$ (для КС), то (обобщенные) КС могут рассматриваться как ПС только в течение короткого промежутка времени, а именно при $t \ll t_c$ (для ОКС) или $t \ll \tilde{t}_c$ (для КС). Что касается частицы, взаимодействующей с электрическим полем, то при этих же условиях соответствующие состояния также можно рассматривать как ПС. Однако выполнение этих условий не требуется, если электрическое поле является достаточно сильным (удовлетворяет неравенствам $E \gg \left(\sigma_{p_z}/mc\right)^2 \left(\lambda_e/\sigma_z\right) E_c$ (для ОКС) или $2E \gg \left(\lambda_e/\sigma_z\right)^3 E_c$ (для КС)). При слабых электрических полях и некоторых значениях стандартных отклонений ОКС или КС можно рассматривать как ПС только спустя некоторые промежутки времени.

Таким образом, для нерелятивистской бесспиновой частицы в постоянном однородном электрическом поле ОКС или КС всегда можно рассматривать как ПС при достаточно больших t. В то же время для свободной частицы это возможно только при некоторых специальных условиях.

Авторы выражают благодарность Д.М. Гитману и В.Г. Багрову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schrödinger E. // Naturwissenschaften. – 1926. – V. 14. – No. 28. – P. 664.
2. Рашевский П.К. // УМН. – 1958. – Т. 13. – № 3(81). – С. 3.
3. Glauber R.J. // Phys. Rev. – 1963. – V. 130. – No. 6. – P. 2529; V. 131. – No. 6. – P. 2766.
4. Klauder I.R. // Ann. Phys. – 1960. – V. 11. – P. 123.
5. Klauder I.R. // J. Math. Phys. – 1964. – V. 4. – P. 1058; V. 5. – P. 177.
6. Klauder J.R. and Sudarshan E.C. Fundamentals of Quantum Optics. – Benjamin, 1968.
7. Sudarshan E.C. // Phys. Rev. Lett. – 1963. – V. 10. – P. 277.
8. Klauder I.R. and Skagerstam B.S. Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics. – Singapore: World Scientific, 1985.
9. Perelomov A.M. Generalized Coherent States and Their Applications. – Springer Verlag, 1986.
10. Gazeau J.P. Coherent States in Quantum Physics. – Berlin: Wiley-VCH, 2009.
11. Nielsen M. and Chuang I. Quantum Computation and Quantum Information. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
12. Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния. – М.: Наука, 1979.
13. Додонов В.В., Манько В.И. // Труды ФИАН. – 1987. – Т. 183. – С. 71–181.
14. Gilmore R. // Ann. Phys. – 1973. – V. 74. – P. 391.
15. Ali S.T., Antoine J.P., and Gazeau J.P. Coherent States, Wavelets and Their Generalizations. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2000.
16. Bagrov V.G., Gitman D.M., Macedo E.S., and Pereira A.S. // J. Phys. A: Math. Theor. – 2013. – V. 46. – P. 325305.
17. Багров В.Г., Гитман Д.М., Феррейра А.С. // УФН. – 2014. – Т. 184. – Вып. 9. – С. 961.
18. Bagrov V.G., Gitman D.M., and Pereira A.S. // Braz. J. Phys. – 2015. – V. 45. – P. 369.
19. Bagrov V.G., Gavrilov S.P., Gitman D.M., and Meira Filho D.P. // J. Phys. A: Math. Theor. – 2011. – V. 44. – P. 055301.
20. Schrödinger E. // Preus. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. – 1930. – V. 19. – P. 296.
21. Robertson H.P. // Phys. Rev. – 1930. – V. 35. – P. 667.

[1] Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
[2] Институт физики и технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 14.09.17.

Адорно Тьяго Карлос, Ph.D., ст. науч. сотр. лаб. квантовой теории интенсивных полей; e-mail: tg.adorno@gmail.com, tg.adorno@mail.tsu.ru;
Перейра Альберто Сильва, Ph.D., науч. сотр. каф. высшей математики и математической физики, e-mail: albertoufcg@hotmail.com, spa3@tpu.ru.