

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 532.5

А.М. БУБЕНЧИКОВ¹, М.А. БУБЕНЧИКОВ^{1,4}, А.И. ПОТЕКАЕВ^{1,2}, Э.Е. ЛИБИН¹, Ю.П. ХУДОБИНА¹,
В.В. КУЛАГИНА^{2,3}

ПРОХОЖДЕНИЕ МИКРОЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ СЛОЖНЫЕ СОСТАВНЫЕ
ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ*

Предлагается подход к решению задач о прохождении материальных частиц (например, молекул) сквозь составные потенциальные барьеры сложной формы. Для этого разработана оригинальная вычислительная технология интегрирования одномерного уравнения Шредингера, которая основана на применении нестандартной операции матричного анализа и имеет хорошие перспективы в отношении обобщения на плоские и пространственные задачи волновой динамики. Продемонстрировано хорошее согласие по коэффициенту прохождения для барьера прямоугольной формы результатов, полученных на основе предлагаемого подхода и точных решений. При прохождении частицами или волнами энергии составных потенциальных барьеров обнаружен квантовый характер повышения проницаемости мембраны в зависимости от энергии частицы или волны. Найдено, что для частиц или фотонов определенной энергии можно увеличить коэффициент их прохождения в 2 или 3 раза посредством присоединения к мембране новых энергетических барьеров.

Ключевые слова: волновая динамика, сложный энергетический барьер, коэффициент прохождения, численные методы, матричный анализ.

Введение

Проблемы создания материалов и устройств, способных обеспечивать фильтрацию и сепарацию газов, очень актуальны и имеют большое значение, поэтому интерес к ним постоянно возрастает. Их решение важно в интересах экологии, транспорта, добычи углеводородов и т.п. Важность проблемы фильтрации и сепарации газов заставляет искать новые принципы и подходы к ее решению. В рамках одного из них (подхода волновой наночастиц) на примере тонкой углеродной пленки (в пределе структура типа графена) исследовались свойства тонкой пленки по отношению к ее проницаемости, т.е. сепарации микрочастиц (например, атомов или молекул легких газов, содержащихся в природной газовой смеси) [1, 2]. Фактически, рассматривался вопрос прохождения микрочастиц через потенциальный барьер [1–3]. Предложенный подход позволил определить интегральное количество частиц, прошедших через энергетический барьер пленки, а также исследовать резонансные эффекты в объеме, ограниченном несколькими энергетическими барьерами. В результате было показано, что при низких энергиях частиц тонкая углеродная пленка – энергетический барьер (в пределе структура типа графена) – может отделять легкие газы от тяжелых, т.е. фактически разделять газы в зависимости от их массы [3, 4]. Следовательно, углеродная пленка или система таких пленок может исполнять роль газового фильтра, позволяющего разделять отдельные газовые фракции.

Предлагалось тонкую углеродную пленку – энергетический барьер – использовать в качестве фильтра или сепаратора легких и тяжелых газов. Было показано, что тонкая углеродная пленка может отделять легкие газы от тяжелых, т.е. сепарировать газы в зависимости от их массы [1–3]. В основу был положен принцип волновой наночастиц [1, 4, 6], а именно мембранная технология с выраженной дифференциальной проницаемостью. Таким образом, было высказано предположение, что такая углеродная пленка или система углеродных пленок может исполнять роль газового фильтра или сепаратора, позволяющего разделить отдельные газовые фракции [1–6].

Однако традиционными методами невозможно решать задачи о сложных составных потенциальных барьерах, через которые происходит протекание массы или энергии. Поэтому необходим поиск новых подходов к решению подобных задач с целью прогнозирования их свойств. В качестве модели в настоящей работе рассматриваются двух- и трехбарьерные системы, в которых возникают резонансные эффекты, обусловленные совпадением частот падающей волны с собственной частотой потенциальной ямы. Предлагается оригинальная вычислительная технология, основан-

* Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

ная на применении матричного анализа. В части матричных преобразований решение находится с машинной точностью и дает надежные результаты.

Цель данной работы – исследовать прохождение микрочастиц (например, молекул) через сложные составные потенциальные барьеры как физическую природу свойств барьерных систем газовых фильтров и сепараторов.

Уравнение Шредингера для плотности материальных частиц

Часто [7, 8] рассматривают линейное однородное дифференциальное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Если потенциальная энергия U не зависит от времени, то решение уравнения (1) выбирается пропорциональным множителю $\exp(-iEt/\hbar)$, и тогда для функции ψ имеем стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (2)$$

Введя масштабы: расстояния R , массы m_0 и энергии U_0 , уравнение (2) запишем в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2m_0R^2U_0}{\hbar^2}\right)\frac{m}{m_0}\left(\frac{E}{U_0} - \frac{U}{U_0}\right)\psi = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим одномерный случай, для которого $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$. Полагая $\hbar^2 = 2m_0R^2U_0$, мы упрощаем уравнение (3). Заметим, что \hbar не является здесь постоянной Планка. Однако все полученные ниже результаты годятся для прохождения электронов через отдельный энергетический барьер или систему барьеров. В нормализованном виде уравнение для амплитуды волн, перемещающихся в окрестности нанопористого слоя, будет иметь вид классического уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + m[\lambda^2 - U(x)]\psi = 0. \quad (4)$$

При соответствующей интерпретации параметров в уравнении (4) оно описывает перенос фотонов. Поэтому полученный ниже результат о повышении проницаемости составных барьеров вполне может быть пригоден для объяснения эффекта просветления оптики.

Искомая функция ψ такова, что квадрат ее модуля определяет в точке x плотность вероятности локализации частицы.

Если рассматривается задача о проникновении микрочастиц сквозь потенциальный барьер, то есть туннельный эффект, то в таких случаях предполагается, что область потенциального барьера занимает участок вещественной оси на промежутке $0 < x < L$, вне которого функция $U(x)$ считается равной нулю.

Пусть известна пара линейно независимых решений уравнения (4) $w_1(x)$ и $w_2(x)$, тогда общее решение представляется суммой:

$$\psi(x) = C_1w_1(x) + C_2w_2(x), \quad 0 < x < L. \quad (5)$$

Если частица набегаёт на барьер слева, то решение уравнения (4) вне барьера должно иметь вид

$$\psi_-(x) = e^{i\sqrt{m}\lambda x} + Be^{-i\sqrt{m}\lambda x} \quad -\infty < x < 0, \quad \psi_+(x) = Ae^{i\sqrt{m}\lambda x} \quad 0 < x < \infty. \quad (6)$$

Таким образом, перед барьером существует как падающая, так и отраженная волна, в то время как за барьером – только проходящая волна. Так как решение предполагается непрерывным, то на границах барьерной области должны совпадать предельные значения функции $\psi(x)$ и ее производной $\psi'(x)$. Это условие сшивки дает систему четырех уравнений для нахождения коэффициентов B , C_1 , C_2 и A , входящих в (5) и (6). Тем самым и находится формальное решение задачи о прохождении микрочастиц через потенциальный барьер заданной формы. Квадрат модуля коэффици-

ента B называется коэффициентом отражения, а $D(m, \lambda) = |A|^2$ – коэффициентом прохождения или коэффициентом прозрачности барьера. Между этими коэффициентами выполняется следующее соотношение:

$$|B|^2 + |A|^2 = 1. \quad (7)$$

Это равенство, доказанное в [7], выражает условие сохранения числа частиц и вытекает непосредственно из свойства самого уравнения (4). Пользуясь (5) и (6), находим, что условия сшивки решений на краях потенциального барьера приводят к системе четырех линейных алгебраических уравнений, определяющих искомые величины:

$$\begin{pmatrix} -1 & w_1(0) & w_2(0) & 0 \\ i\sqrt{m\lambda} & w_1'(0) & w_2'(0) & 0 \\ 0 & w_1(L) & w_2(L) & -1 \\ 0 & w_1'(L) & w_2'(L) & -i\sqrt{m\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C_1 \\ C_2 \\ Ae^{i\sqrt{m\lambda}L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{m\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из уравнений (8) видно, что коэффициенты B, C_1, C_2, A имеют комплексные значения, при этом они зависят не от всех, а только лишь от конечных значений функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$ и их производных.

Это обстоятельство может служить причиной возникновения ошибок и неустойчивости решений в том случае, когда для вычисления функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$ применяются не точные, а различные приближенные выражения. Таким образом, кажущаяся тривиальной, на самом деле эта задача не является таковой, так как только в редких случаях уравнение (4) относится к классу точно разрешимых уравнений. Здесь сталкиваемся с необходимостью разработки достаточно сильных численных методов для решения задачи о прохождении частиц через потенциальные барьеры сложной формы.

Примеры точных решений

Точные решения для коэффициента прохождения частиц сквозь потенциальные барьеры частного вида хорошо известны [7, 8]. Так, для потенциального барьера вида $U(x) = 1/\text{ch}^2(\alpha x)$ коэффициент прозрачности дается достаточно простым аналитическим выражением

$$D(a, b) = \frac{\text{sh}^2 \pi a}{\text{sh}^2 \pi a + \text{ch}^2 \pi b/2}, \quad a = \sqrt{m\lambda}, \quad b = \sqrt{4m/\alpha^2 - 1}. \quad (9)$$

Для прямоугольного потенциального барьера шириной a и единичной высоты функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ в (5) будут тригонометрическими, а коэффициент прохождения, полученный в результате решения системы уравнений (8), получится равным

$$D = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 ak_2}, \quad k_1 = \sqrt{m\lambda}, \quad k_2 = \sqrt{m}\sqrt{\lambda^2 - 1}. \quad (10)$$

Точные решения известны также и для одиночного потенциального барьера в виде трапеции [3, 4]. В этом случае линейно независимые решения уравнения (4) выражаются через функции Бесселя дробного порядка. Это следует из того [7], что решения однородного дифференциального уравнения $\psi'' + a^2(x - x_0)\psi = 0$ записываются в виде

$$\psi_{\pm}(x) = \sqrt{x - x_0} J_{\pm 1/3} \left[2/3 a (x - x_0)^{3/2} \right].$$

Путем сшивки граничных условий из них также можно вывести соответствующее выражение для коэффициента прохождения D , похожее на (9) или (10).

Естественно, что точные решения являются критерием проверки корректности численных способов решения задач о прохождении частиц. Заметим также, что если мы имеем какое-либо

точное решение для барьера определенное на участке $0 < x < L$, то можно записать матричные равенства, которые следуют из общего решения (5) уравнения (4):

$$\begin{vmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(0) & w_2(0) \\ w_1'(0) & w_2'(0) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix}.$$

Исключая из них произвольные постоянные C_1, C_2 и полагая $x = L$, получим:

$$\begin{vmatrix} \psi(L) \\ \psi'(L) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(L) & w_2(L) \\ w_1'(L) & w_2'(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(0) & w_2(0) \\ w_1'(0) & w_2'(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Выражение (11) дает связь между значениями функции ψ и ее производной на концах барьерного интервала, и ее, очевидно, можно применять для построения решений уравнения (1) в случае составных барьеров, прилегающих последовательно друг к другу. Такая вычислительная технология, связанная с перемножением матриц, вполне согласуется с общей теорией четырехполюсников, которая обычно применяется в теории электрических цепей.

Приближенные методы решения

Приближенные теоретические методы решения одномерного уравнения Шредингера (4) основываются, главным образом, на применении известного метода фазовых интегралов или метода ВКБ-приближения [9]. Линейно независимые решения уравнения (4) в этом приближении записываются в виде

$$\psi = q^{-1/4} \exp\left(\pm \sqrt{m}i \int_0^x \sqrt{q} dx\right) \left[1 + O(\lambda^{-1})\right], \quad q = \lambda^2 - U(x). \quad (12)$$

Здесь явно выделяется главный член асимптотического разложения по обратным степеням параметра λ . Более общей математической задачей является нахождение всех членов асимптотического ряда для функции $\psi(x)$. Такая задача рассматривается в [10]. Применение ВКБ-метода ограничивается рядом условий, наложенных на поведение функции $U(x)$. Поэтому он обычно приводит к результатам, которые не согласуются с известными точными решениями для эталонных потенциальных барьеров. Так, для надбарьерного прохождения частиц ВКБ-метод всегда приводит к нулевому коэффициенту отражения.

Другой способ решения задачи о прохождении частиц через барьер описан в [7], где предлагается приводить уравнение Шредингера (4) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\psi(x) = e^{i\sqrt{m}\lambda x} + \frac{1}{2i\sqrt{m}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{m}\lambda|x-x_0|} U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (13)$$

После его решения методом последовательных приближений коэффициент прохождения частиц можно найти как

$$D(\lambda) = \left| 1 + \frac{1}{2i\sqrt{m}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{m}\lambda_0|x_0|} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right|^2. \quad (14)$$

Проведенные численные эксперименты с интегральным уравнением (13) показали хорошее совпадение с эталонными решениями для надбарьерного прохождения частиц, но вычислительный процесс совсем плохо сходится в тех случаях, когда величина λ принимает значения меньшие единицы.

Численный алгоритм

Пару линейно независимых решений $w_1(x)$ и $w_2(x)$ уравнения (4) можно находить с помощью традиционного метода Рунге – Кутты, сравнивая полученный результат с известными точными решениями. Точность счета при этом контролируется по величине определителя Вронского $W = w_1(x)w_2'(x) - w_2(x)w_1'(x)$, а также по точности выполнения равенства (7). Для выполнения этих критериев в численном методе типа Рунге – Кутты обычно приходится применять слишком мел-

кий шаг расчета, что сильно увеличивает расчетное время. Поэтому предлагается использовать нестандартную операцию матричного анализа, которая доступна в современных математических пакетах, таких, как MatLab [11] или SciLab. Эта операция позволяет находить ортонормированный базис (нуль-пространство) для прямоугольных матриц.

Рассмотрим пример. Пусть матрица M состоит из восьми строк и десяти столбцов. Тогда в результате выполнения команды $B = \text{null}(M)$ получится прямоугольная матрица B , имеющая десять строк и два столбца, каждый из которых ортогонален ко всем строкам матрицы M , причем преобразование произведено с максимальной машинной точностью. В этом методе уравнение (4) должно записываться в конечно-разностной форме

$$\psi_{n-1} + \left[-2 + \Delta x^2 m (\lambda^2 - U_n) \right] \psi_n + \psi_{n+1} = 0, \quad (15)$$

где Δx – размер разностной ячейки в направлении, перпендикулярном слою.

Для уравнения (15) конструируется соответствующая квадратная трехдиагональная матрица, из которой исключаются две последние строки, в результате чего получается H -матрица. Вычисление нуль-пространства матрицы H : $w = \text{null}(H)$ дает численное представление решений $w_1(x)$ и $w_2(x)$ уравнения (1) в виде двух векторных столбцов. Точность решения данным методом не зависит от параметра λ и не требует мелкого шага, что позволяет производить надежные расчеты как самой функции $\psi(x)$, так и коэффициента прохождения частиц $D(m, \lambda)$ через потенциальные барьеры сложной формы.

Примеры сложных составных барьеров

Рассмотрим несколько примеров потенциальных барьеров, как одиночных, так и представляющих собой некоторый набор элементарных потенциальных барьеров.

Одиночный барьер. Типичный вид функции $|\psi|^2(x)$, полученной предлагаемым численным методом, представлен на рис. 1, на котором форма барьера отмечена пунктирной линией. Коэффициент прохождения D в данном случае имеет небольшую величину равную 0.3140.

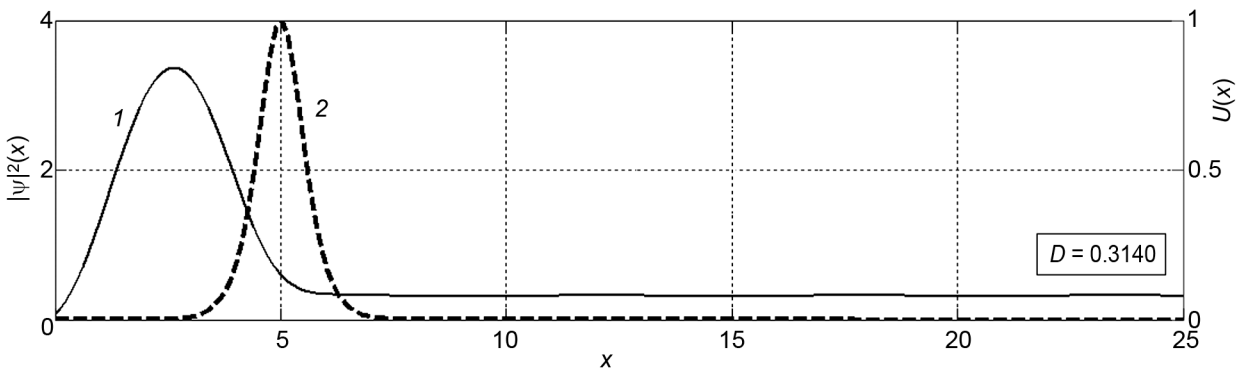


Рис. 1. Плотность вероятности локализации частицы (кр. 1) при прохождении частицы одиночного барьера с параметрами $m = 1, \lambda = 0.5$ (кр. 2): кр. 1 – $|\psi|^2(x)$; кр. 2 – $U(x)$

Составные барьеры: несколько потенциальных барьеров. Казалось бы, что добавление новых барьеров должно уменьшить общий коэффициент прохождения. Однако, как это видно из рис. 2, увеличение числа барьеров, наоборот, приводит к росту коэффициента прохождения. Это объясняется тем, что плотность вероятностей $|\psi|^2$ в ямах достигает своих максимальных значений, что облегчает прохождение частиц через следующие барьеры.

В этом случае проявляется резонансный эффект, обусловленный взаимодействием связанных частиц в потенциальных ямах с набегающей частицей. Это явление резкого увеличения коэффициента прозрачности составного барьера наблюдается только при определенных значениях параметра λ , по которым можно судить об уровнях энергии частиц в потенциальных ямках между барьерами.

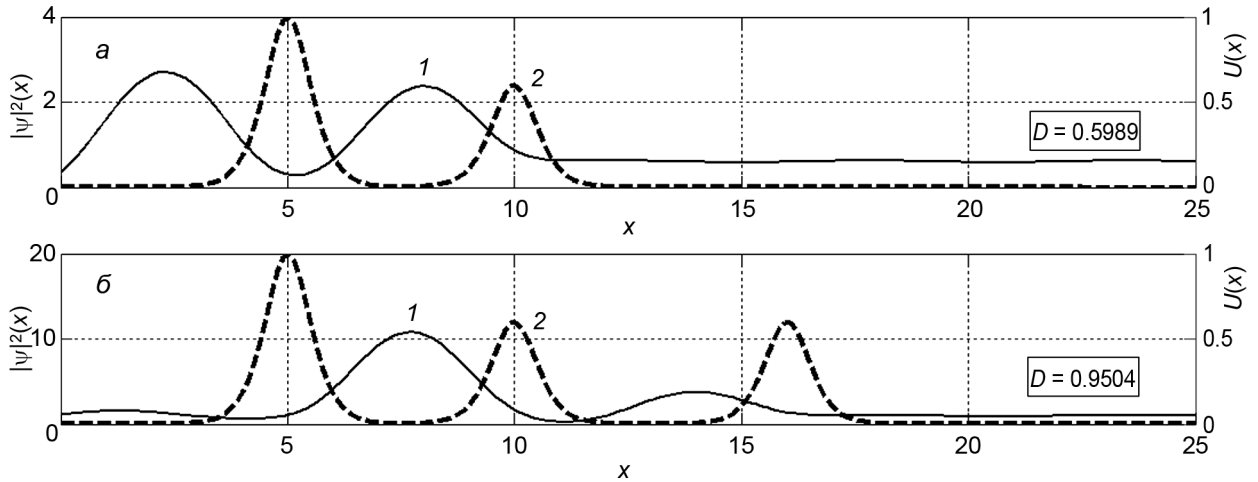


Рис. 2. Влияние добавления новых барьеров на распределение плотности вероятностей $|\psi|^2$ и коэффициент прохождения частиц $D(m, \lambda)$: а – два потенциальных барьера, б – три; кр. 1 – $|\psi|^2(x)$; кр. 2 – $U(x)$

Сложные и составные барьеры. Прежде всего, для установления приемлемости предлагаемых подходов было необходимо провести тестовый расчет и сопоставить полученные результаты с данными, получаемыми из точных решений. Это было выполнено для потенциального барьера, близкого к прямоугольной форме. На рис. 3, а показано два практически совпадающих графика коэффициента прохождения для потенциального барьера, близкого к прямоугольной форме. Один из графиков, изображенный точками (кривая 1), вычислялся из точных решений (10), а другой (кривая 2) – с помощью численного метода, использующего операцию **null**. Хорошее совпадение точного решения с приближенным, представленное на рис. 3, говорит о надежности использования операции **null** в задачах о прохождении частиц через потенциальные барьеры.

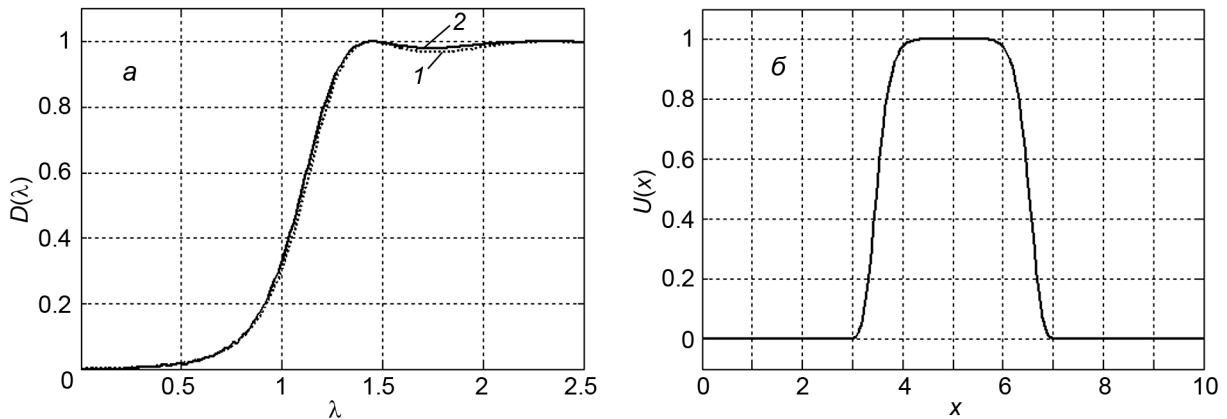
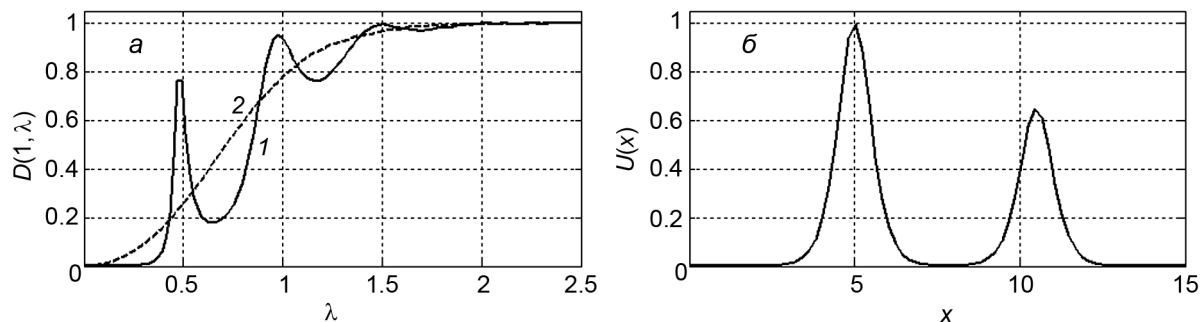
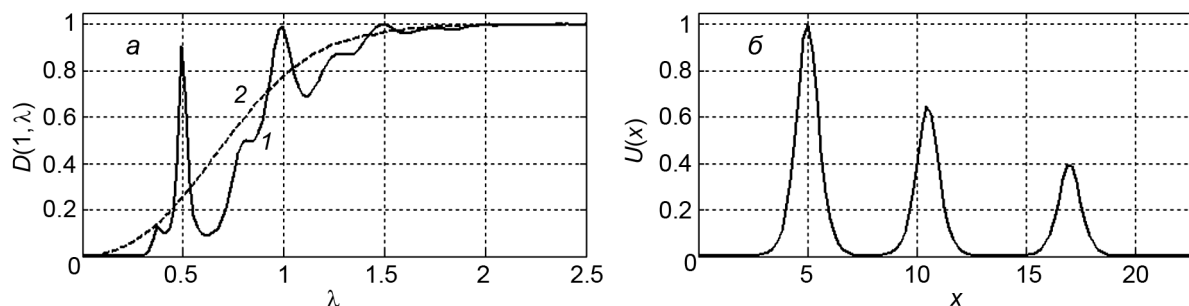


Рис. 3. Сопоставление (а) точного и приближенного графика коэффициента прохождения $D(\lambda)$ для потенциального барьера, близкого к прямоугольной форме (б)

Зависимость коэффициента прохождения $D(\lambda)$ от параметра λ может носить и колебательный характер в том случае, если имеется несколько последовательно расположенных барьеров (рис. 4, б). На рис. 4, а показана такая кривая для случая двух барьеров, причем пунктирной линией изображен график коэффициента прохождения для одного барьера. Такой график коэффициента прохождения частицы над двугорбым барьером можно рассматривать как резонансную кривую. Максимумы, очевидно, соответствуют энергиям связанных квантовых состояний частиц в ямке между потенциальными барьерами.

Таким образом, этот расчет позволяет получить дискретную часть спектра связанных энергий. Добавление очередного барьера усложняет вид резонансной кривой, как показано на рис. 5. Подбирая параметры сложных барьеров (высоту, ширину, расстояние между ними), можно управлять формой зависимости коэффициента прохождения $D(\lambda)$ от параметра λ (резонансных кривых).


 Рис. 4. Зависимость (а) коэффициента прохождения $D(\lambda)$ от параметра λ для двух барьеров (б)

 Рис. 5. Зависимость (а) коэффициента прохождения $D(\lambda)$ от параметра λ для тройного барьера (б)

Заключение

Как показано в настоящей работе, предлагаемый подход волновой динамики применим для прогнозирования проникаемости сложных барьерных систем.

Рассмотренные двух- и трехбарьерные системы обнаружили, что возникают резонансные эффекты, обусловленные совпадением частот падающей волны с собственной частотой потенциальной ямы. Предложенная оригинальная вычислительная технология решения данного класса задач основана на применении матричного анализа, где основная матрица является трехдиагональной и получается на основе разностного представления уравнения Шредингера. Из нее исключаются две последние строки и находится нуль-пространство редуцированной матрицы, которое и представляет собой два фундаментальных ортонормированных численных решения уравнения Шредингера. В части матричных преобразований решение находится с машинной точностью и дает надежные результаты при любом разумном отношении энергии частицы к энергии барьера.

По результатам расчетов установлено, что за счет резонансных эффектов составной потенциальный барьер может иметь большую проникаемость по сравнению с каждой из отдельных его частей. Используя предлагаемый подход, можно определить интегральное количество частиц, прошедших через энергетический барьер, исследовать резонансные эффекты в объеме, ограниченном несколькими энергетическими барьерами, а также оценить вклад энергетических полостей в механизм прохождения частиц через нанопористые барьеры.

Таким образом, расчетами установлено, что составные мембраны являются эффективным средством повышения производительности технологии разделения с помощью нанопористых слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потехаев А.И. и др. // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 8. – С. 109–113.
2. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потехаев А.И. и др. // Изв. вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 7. – С. 10–15.
3. Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M., et al. // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2015. – V. 87(1). – P. 012111.
4. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., et al. // EPJ Web of Conf. – 2016. – V. 110. – P. 01014.
5. Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M., et al. // EPJ Web of Conf. – 2016. – V. 110. – P. 01061.

6. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Usenko O.V., and Ukolov A.V. // EPJ Web of Conf. – 2016. – V. 110. – P. 01078.
7. Feshbach H. and Morse Ph.M. Methods of Theoretical Physics. Part II. – N. Y.: McGraw-Hill, 1953. – 997 p.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1969. – Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – 767 с.
9. Heading J. An Introduction to Phase-Integral Methods. – London; New York, 1962. – 238 p.
10. Froman N. and Froman O. JWKB-Approximation. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1965. – 166 p.
11. Otto S.R. and Denier J.R. An Introduction to Programming and Numerical Methods in Matlab. – London: Springer Verlag, 2005. – 463 p.

¹ Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 04.10.16.

² Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова
Томского государственного университета, г. Томск, Россия

³ Сибирский государственный медицинский университет, г. Томск, Россия

⁴ ООО «Газпром Трансгаз Томск», г. Томск, Россия

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, e-mail: alexu121@mail.ru;

Бубенчиков Михаил Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент НИ ТГУ, ведущ. специалист отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск», e-mail: michael121@mail.ru;

Потекаев Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, профессор НИ ТГУ, директор СФТИ ТГУ, e-mail: kanc@spti.tsu.ru;

Либин Эдуард Ефимович, к.ф.-м.н., ведущ. науч. сотр., e-mail: libin@nii pmm.tsu.ru;

Худобина Юлия Петровна, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр., e-mail: hudobina@mail2000.ru;

Кулагина Валентина Васильевна, к.ф.-м.н., доцент, ст. науч. сотр. СФТИ ТГУ, доцент СГМУ, e-mail: kanc@spti.tsu.ru.