

УДК 532.135  
DOI 10.17223/19988621/52/5

Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер

## УСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ/ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КАНАЛЕ<sup>1</sup>

Представлены результаты исследования одномерного установившегося течения степенной жидкости в круглой трубе / плоском канале с учетом вязкой диссипации и зависимости консистенции среды от температуры. Численные решения сформулированных задач получены с использованием конечно-разностного метода. Проведены параметрические исследования. Получены характерные распределения скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции в сечении канала/трубы при разных значениях определяющих параметров. Численно реализован алгоритм определения критических значений параметра задачи, разделяющих области существования и отсутствия устойчивого стационарного решения. Получены критические значения параметра, выше которых реализуется режим гидродинамического теплового взрыва. Построены зависимости параметра от показателя нелинейности степенного реологического закона, выделяющие область устойчивых стационарных решений. Результаты расчетов согласуются с аналитическим решением.

**Ключевые слова:** *степенная жидкость, вязкая диссипация, установившееся течение, метод конечных разностей, гидродинамический тепловой взрыв.*

Ламинарные течения неньютоновской жидкости в плоских каналах и в круглых трубах реализуются во многих технических приложениях. В частности, при переработке полимерных материалов в текучем состоянии осуществляются течения между параллельными плоскостями и в трубах кругового сечения в элементах технологической оснастки. В общем случае течения вязкой жидкости являются неизотермическими, что обуславливается диссипацией механической энергии, возможными химическими источниками тепла, различными условиями теплообмена на границах области, физические характеристики среды при этом зависят от температуры. Решение задач о неизотермических течениях неньютоновских жидкостей с учетом диссипации механической энергии и зависимости реологических характеристик от температуры связано со значительными трудностями. Поэтому в большинстве случаев теоретические исследования течения и теплообмена при переменных физических характеристиках жидкости выполнены приближенными или численными методами при использовании ряда упрощающих допущений. Математические постановки задач о стационарных неизотермических течениях вязкой среды в одномерном приближении допускают получение решений в аналитической форме. Первые работы, в которых представлены аналитические решения таких задач, появились в середине прошлого столетия [1–4]. Устойчивость получаемых стационарных решений и связанное с этим явление гидродинамического теплового взрыва обсуждаются в работах [5, 6]. Результаты исследований

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-00412а) и гранта Президента РФ (МК-3085.2018.1)

подобных течений описываются также в соответствующих монографиях, например [7–9]. Математические аспекты устойчивости получаемых стационарных решений рассматриваются в книге [10]. Следует отметить, что обсуждаемые одномерные задачи до сих пор привлекают внимание исследователей и появляются публикации, содержащие решения для течений с более сложной реологией, различными условиями теплообмена на границах с применением технологий аналитического либо численного анализа [11, 12]. Аналитические решения описывают течения в определенных условиях. Кроме того они используются для тестирования численных решений, а также в качестве начальных и граничных условий для задач в более общей постановке, возникающих, например, при моделировании транспорта жидкости в каналах сложной геометрии, процессов экструзии и литья под давлением, реализуемых в технологии переработки полимеров [13–16]. Форма аналитических решений рассматриваемых задач зависит от типа граничных условий и вида функциональной зависимости реологических характеристик от температуры. В этой связи в случае использования распределений скорости и температуры для одномерного стационарного течения в качестве граничных условий для полной постановки задачи, например на входной границе области решения, часто требуется модификация существующих либо получение новых аналитических решений, соответствующих условиям общей задачи. С другой стороны несложно получить численное решение одномерной задачи и, можно численную процедуру нахождения граничных значений искомых функций в одномерном приближении включать в общий вычислительный алгоритм. В большей степени именно с этой целью в работе рассматриваются одномерные неизотермические стационарные течения степенной жидкости и предлагается численный алгоритм их исследования.

### Постановка задачи

Рассматривается установившееся течение неньютоновской несжимаемой жидкости в плоском/осесимметричном канале под действием заданного перепада давления с учетом вязкой диссипации. Реология жидкости описывается степенным законом Оствальда – де Вилля с экспоненциальной зависимостью консистенции от температуры. Течение предполагается ламинарным и одномерным. Используемые системы координат представлены на рис. 1.

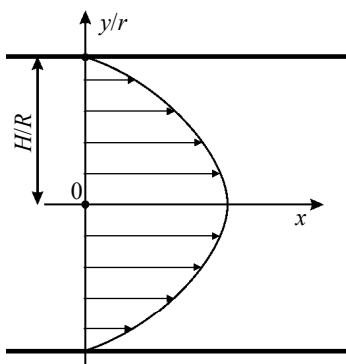


Рис. 1. Система координат  
Fig. 1. Coordinate system

Течение описывается уравнениями движения и теплопереноса, которые с учетом сделанных допущений запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) записаны для плоского канала, (2) – для круглой трубы. Здесь  $v$  – скорость,  $T$  – температура,  $y$  и  $r$  – поперечная и радиальная координаты декартовой и цилиндрической систем координат соответственно,  $\partial p / \partial x$  – продольная составляющая градиента давления,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Система (1) или (2) замыкается реологическим законом, согласно которому эффективная вязкость  $\eta$  определяется выражением

$$\eta(T, \dot{\gamma}) = k_0 e^{-\beta(T-T_0)} |\dot{\gamma}|^{n-1}.$$

где  $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига,  $k_0$  – консистенция при температуре  $T_0$ ,  $\beta$  – константа,  $n$  – степень нелинейности жидкости. Граничные условия записываются следующим образом:

$$y = 0: \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dy} = 0; \quad y = H: v = 0, \quad T = T_1;$$

$$r = 0: \frac{dv}{dr} = 0, \quad \frac{dT}{dr} = 0; \quad r = R: v = 0, \quad T = T_1.$$

Запишем системы уравнений (1), (2) в безразмерных переменных

$$\frac{1}{\zeta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta^\alpha \eta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = \delta, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\zeta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta^\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \alpha \eta \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 = 0,$$

где  $\zeta$  – безразмерная координата ( $\zeta = y/H$  для плоского канала,  $\zeta = r/R$  для цилиндрической трубы),  $u$ ,  $\theta$  – безразмерные скорость и температура соответственно,

$\alpha = \frac{\beta k_1 U^{n+1}}{\lambda L^{n-1}}$ ,  $\delta = \frac{L}{k_1} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{L}{U} \right)^n$  – безразмерный перепад давления на единицу длины,

$k_1 = k_0 \exp[-\beta(T_1 - T_0)]$  – консистенция среды при температуре стенки. Параметр  $\alpha$  определяет геометрию области течения:  $\alpha = 0$  соответствует плоскому каналу ( $L = H$ ),  $\alpha = 1$  – цилиндрической трубе ( $L = R$ ). В качестве масштаба обезразмеривания скорости выбрана величина среднерасходной скорости  $U$ . Для безразмерной температуры используется выражение  $\theta = \beta(T - T_1)$ . Безразмерная эффективная вязкость определяется по формуле

$$\eta = e^{-\theta} \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^{n-1}. \quad (4)$$

Граничные условия принимают вид

$$\zeta = 0: \frac{du}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = 0; \quad (5)$$

$$\zeta = 1: u = 0, \quad \theta = 0.$$

Величина  $\delta$  выбирается такой, чтобы объемный расход жидкости через единицу площади равнялся единице

$$2^\alpha \int_0^1 u \zeta^\alpha d\zeta = 1. \quad (6)$$

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию профилей скорости и температуры, удовлетворяющих системе уравнений (3), (4), условиям (5), (6).

### Метод расчета

Сформулированная задача решается численно. В области решения строится расчетная сетка, представленная на рис. 2. В узлах сетки с целыми индексами рассчитывается скорость, с дробными – вязкость и температура.

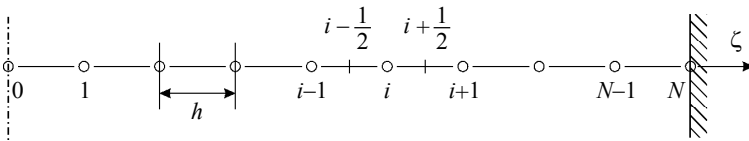


Рис. 2. Расчетная сетка  
Fig. 2. Computational grid

Конечно-разностные аналоги системы (3) записываются в форме, используемой для реализации метода прогонки [17]:

$$\begin{aligned} \zeta_{i+0.5}^\alpha \eta_{i+0.5} u_{i+1} - (\zeta_{i+0.5}^\alpha \eta_{i+0.5} + \zeta_{i-0.5}^\alpha \eta_{i-0.5}) u_i + \zeta_{i-0.5}^\alpha \eta_{i-0.5} u_{i-1} &= \delta h^2 \zeta_i^\alpha, \\ \zeta_{i+1}^\alpha \theta_{i+1.5} - (\zeta_{i+1}^\alpha + \zeta_i^\alpha) \theta_{i+0.5} + \zeta_i^\alpha \theta_{i-0.5} + \alpha \eta_{i+0.5} (u_{i+1} - u_i)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (4) и граничные условия (5) в разностном представлении принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_{i+0.5} &= e^{-\theta_{i+0.5}} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right|^{n-1}; \\ u_0 &= u_1 - \frac{0.5\delta h^2}{(1+\alpha)\eta_{0.5}}, \quad \theta_{0.5} = \theta_{-0.5}; \\ u_N &= 0, \quad \theta_{N+0.5} = -\theta_{N-0.5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выбранная расчетная сетка удобна для стыковки с разнесенной расчетной сеткой, используемой в методе контрольного объема для решения двумерных задач [18]. Разностные аналоги (7), (8) аппроксимируют дифференциальные уравнения (3), зависимость (4) и условия (5) со вторым порядком точности. Полученные системы алгебраических уравнений (7) решаются методом прогонки [17]. Совместное решение систем разностных уравнений (7) для получения стационарных полей скорости и температуры обуславливает организацию итерационного процесса. В качестве начального приближения для итерационного процесса используется нулевое значение температуры.

Значение параметра  $\delta$ , обеспечивающего выполнения условия (6) с заданной точностью, подбирается методом деления отрезка пополам [19]. Для проверки аппроксимационной сходимости была проведена серия расчетов на последователь-

ности сеток. В качестве критерия сходимости итерационного процесса для нахождения стационарных полей скорости и температуры используются условия

$$\max_i \left| \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{u_i^{k+1}} \right| < \varepsilon_u, \max_i \left| \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\theta_i^{k+1}} \right| < \varepsilon_\theta, 0 \leq i \leq N-1,$$

где верхний индекс соответствует номеру итерации, а нижний – номеру расчетного узла.

Сходимость алгоритма определения  $\delta$ , обеспечивающего выполнение равенства (6), определяется выполнением условия

$$\left| 1 - 2^\alpha \sum_{i=1}^N \frac{u_{i-1} \zeta_{i-1}^\alpha + u_i \zeta_i^\alpha}{2} h \right| < \varepsilon_Q.$$

Аналитическое решение задачи в случае круглой трубы дает следующее выражение для распределения температуры [9]:

$$\theta = -n \ln \left[ \frac{b}{8} \left( c \zeta^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{1}{c} \right)^2 \right], \tag{9}$$

где 
$$b = \frac{4n\alpha}{(3n+1)^2} \left( -\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}, c = \left( \frac{2}{b} \right)^{0.5} - \left( \frac{2}{b} - 1 \right)^{0.5}.$$

В табл. 1  $a, \bar{b}$  представлены значения скорости и температуры в точке  $\zeta = 0$  и значения безразмерного перепада давления  $\delta$  для осесимметричного и плоского случаев, вычисленные на последовательности сеток.

Таблица 1а

$$(\alpha = 1, n = 0.6, a = 1, \varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5})$$

$h$	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200	Аналитическое решение
$u_0$	1.9906	1.9827	1.9805	1.9802	1.9801	-
$\theta_0$	0.5140	0.5136	0.5135	0.5135	0.5135	0.5135
$\delta$	-3.8930	-3.8975	-3.8986	-3.8989	-3.8989	-

Таблица 1б

$$(\alpha = 1, n = 0.6, a = 0, \varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5})$$

$h$	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
$u_0$	1.4544	1.4545	1.4546	1.4546	1.4546
$\theta_0$	0.4254	0.4258	0.4259	0.4259	0.4259
$\delta$	-1.7071	-1.7113	-1.7125	-1.7126	-1.7126

В работах [4,6] показано, что рассматриваемые задачи имеют решения не при всех  $\alpha$ , а только при  $\alpha < \alpha^*$ , где  $\alpha^*$  – некоторое критическое значение параметра  $\alpha$ . При  $\alpha > \alpha^*$  задачи не имеют решений, следовательно, невозможно получить стационарные распределения скорости и температуры. Тепло, выделяемое за счет диссипации механической энергии, не успевает отводиться через стенки канала, что приводит к росту температуры. По аналогии с тепловым взрывом химического происхождения [20], это явление называется гидродинамическим тепловым

взрывом [10]. При численном решении рассматриваемой задачи отсутствие стационарных распределений искомым функций приводит к бесконечному росту температуры, то есть к отсутствию сходимости вычислительного алгоритма. Численная методика определение критического значения  $\alpha^*$  основана на методе деления отрезка пополам, на одном конце которого сходимость отсутствует, а на другом задача имеет устойчивое решение. Процесс деления продолжается пока длина отрезка, то есть диапазон изменения  $\alpha$  не станет меньше  $10^{-3}$ .

Критические значения параметра  $\alpha^*$ , полученные численно и по формуле аналитического анализа [9]:

$$\alpha^* = \frac{(3n+1)^2}{2n} \left( -\frac{\delta}{2} \right)^{-\frac{n+1}{n}} \quad (10)$$

приведены в табл. 2.

Таблица 2

$$(n = 0.6, \alpha = 1, \varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5})$$

h	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
$\alpha^*$ (числ.)	1.68026	1.68313	1.68389	1.68404	1.68404
$\alpha^*$ (аналит.)	1.69050	1.68566	1.68427	1.68412	1.68404

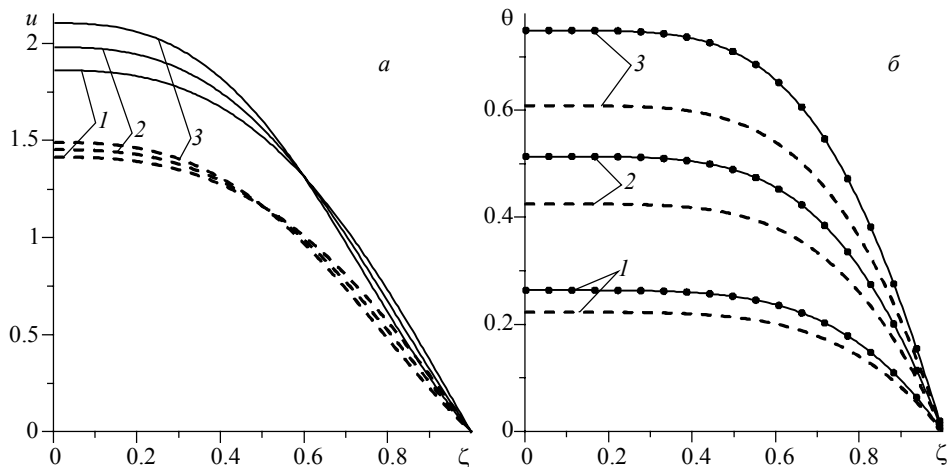
Представленные результаты демонстрируют аппроксимационную сходимость предлагаемой методики расчета. Во всех последующих расчетах используются сетка с шагом 1/200 и  $\varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5}$ .

### Результаты расчетов

С использованием описанной вычислительной технологии проведены параметрические расчеты для плоского и осесимметричного течений. Для подтверждения достоверности результатов численного решения мы ограничиваемся их сравнением с аналитическим решением для случая течения в цилиндрической трубе.

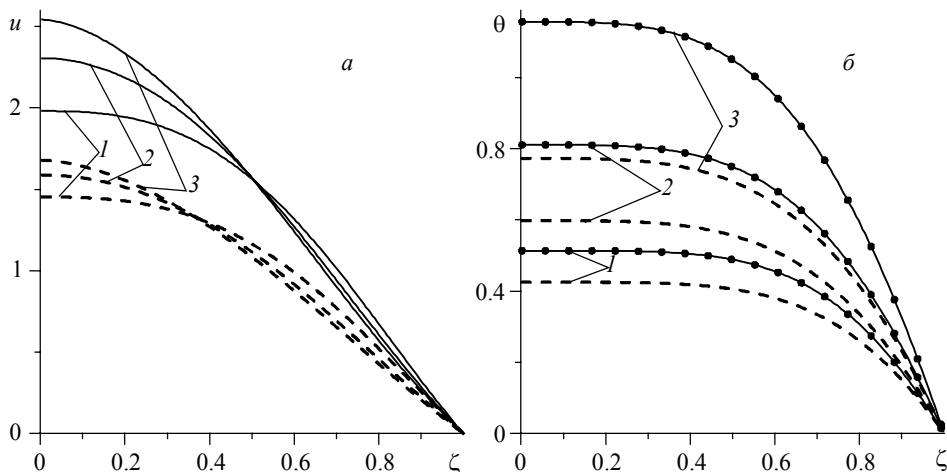
На рис. 3 представлены профили скорости и температуры для плоского и осесимметричного течений псевдопластичной жидкости при различных значениях параметра  $\alpha$ . С увеличением параметра  $\alpha$  усиливается роль вязкой диссипации, что приводит к возникновению точки перегиба в профиле скорости и к увеличению ее максимального значения. Влияние вязкой диссипации проявляется также в увеличении значений температуры по всему сечению канала. В количественном выражении полученный эффект для течения в круглой трубе несколько выше по отношению к плоскому течению. Точками на сплошных кривых рис. 3, б показано аналитическое решение (9).

Рис. 4 демонстрирует влияние параметра нелинейности  $n$  степенного реологического закона на распределение скорости и температуры. Качественный характер влияния параметра  $n$  на формирование профиля скорости в окрестности линии симметрии и на значение ее максимальной скорости совпадает с таковым для случая изотермического стационарного течения степенной жидкости в плоской щели и круглой трубе. Точками на сплошных кривых рис. 4, б показано аналитическое решение (9).



**Рис. 3.** Профили скорости (а) и температуры (б)  
(пунктир –  $\alpha = 0$ , сплошная линия –  $\alpha = 1$ ,  $n = 0.6$ : 1, 2, 3 –  $\varkappa = 0.5, 1, 1.5$ )

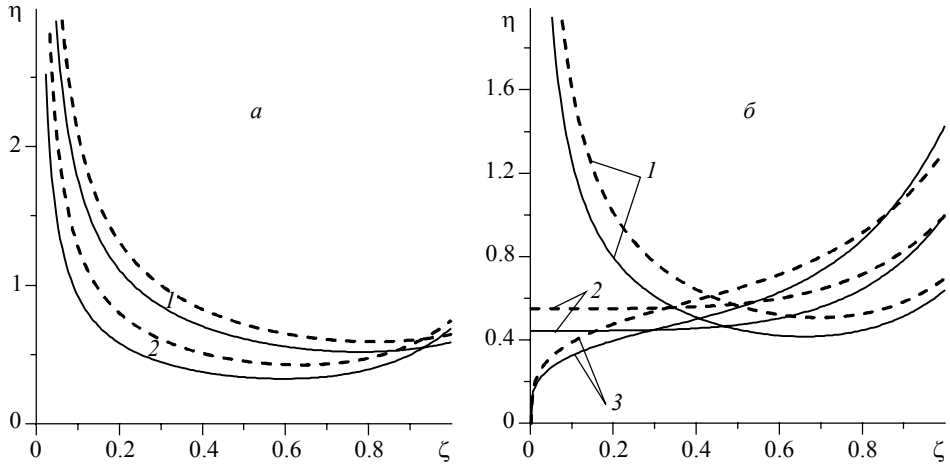
**Fig. 3.** Distributions of (a) velocity and (b) temperature  
(the dotted line indicates  $\alpha = 0$ ; the solid line,  $\alpha = 1$ ;  $n = 0.6$ ,  $\varkappa = (1) 0.5, (2) 1, \text{ and } (3) 1.5$ )



**Рис. 4.** Профили скорости (а) и температуры (б)  
(пунктир –  $\alpha = 0$ , сплошная линия –  $\alpha = 1$ ,  $\varkappa = 1$ : 1, 2, 3 –  $n = 0.6, 1, 1.4$ )

**Fig. 4.** Distributions of (a) velocity and (b) temperature  
(the dotted line indicates  $\alpha = 0$ ; the solid line,  $\alpha = 1$ ;  $\varkappa = 1$ ,  $n = (1) 0.6, (2) 1, \text{ and } (3) 1.4$ )

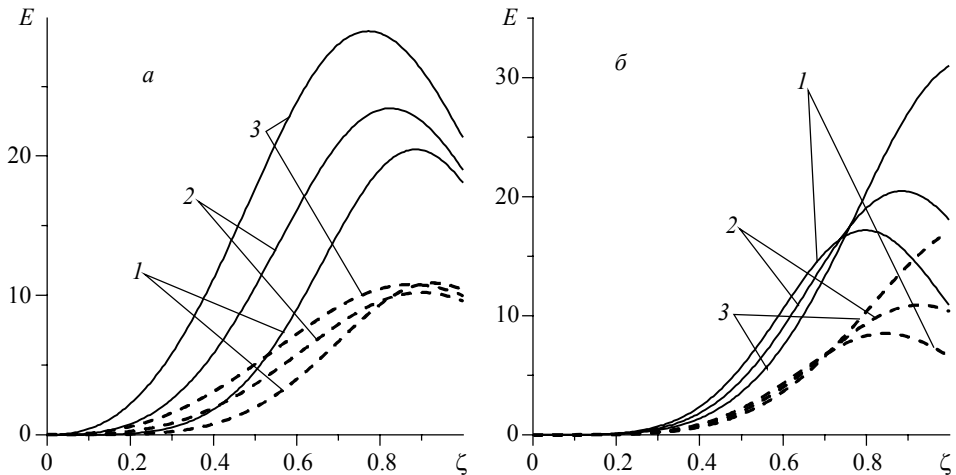
На рис. 5 представлены распределения эффективной вязкости в сечениях плоского канала и круглой трубы в зависимости от параметра  $\varkappa$  для псевдопластичной жидкости (рис. 5, а) и в зависимости от параметра нелинейности  $n$  (рис. 5, б). По мере приближения к линии симметрии значение скорости сдвига уменьшается и равно нулю на линии симметрии. Поэтому эффективная вязкость псевдопластичной жидкости ( $n < 1$ ) достигает больших значений в окрестности линии симметрии несмотря на максимальные значения температуры в этой области. Зависимость вязкости от температуры заметно проявляется в области течения.



**Рис. 5.** Распределение вязкости (пунктир –  $\alpha = 0$ , сплошная линия –  $\alpha = 1$ ;  
*a*:  $n = 0.6$ : 1, 2 –  $\alpha = 0.5, 1.5$ ; *b*:  $\alpha = 1$ : 1, 2, 3 –  $n = 0.6, 1, 1.4$ )

**Fig. 5.** Viscosity distributions (the dotted line indicates  $\alpha = 0$ ; the solid line,  $\alpha = 1$ ;  
*a*:  $n = 0.6$ :  $\alpha = (1) 0.5$  and  $(2) 1.5$ ; *b*:  $\alpha = 1$ :  $n = (1) 0.6, (2) 1$ , and  $(3) 1.4$ )

Распределения диссипативной функции  $E$  в сечении канала/трубы показаны на рис. 6. Характер изменения диссипативной функции по сечению канала/трубы определяется характером функциональной зависимости вязкости и скорости от поперечной/радиальной координаты. Представленные на рис. 6 кривые  $E(\zeta)$  демонстрируют влияние основных параметров на характер изменения и количественные значения диссипативной функции.



**Рис. 6.** Диссипативная функция (пунктир –  $\alpha = 0$ , сплошная линия –  $\alpha = 1$ ;  
*a*:  $\alpha = 1$ : 1, 2, 3 –  $n = 0.6, 1, 1.4$ ; *b*:  $n = 0.6$ : 1, 2, 3 –  $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ )

**Fig. 6.** Dissipative function (the dotted line indicates  $\alpha = 0$ ; the solid line,  $\alpha = 1$ ;  
*a*:  $\alpha = 1$ :  $n = (1) 0.6, (2) 1$ , and  $(3) 1.4$ ; *b*:  $n = 0.6$ :  $\alpha = (1) 0.5, (2) 1$ , and  $(3) 1.5$ )



Зависимости критического значения  $\alpha^*$  от показателя нелинейности  $n$ , разделяющие область значений параметра  $\alpha$ , при которых существует или отсутствует устойчивое стационарное решение, представлены на рис. 7. Точками на кривой 2 показаны результаты аналитического анализа по формуле (10) для течения в круглой трубе.

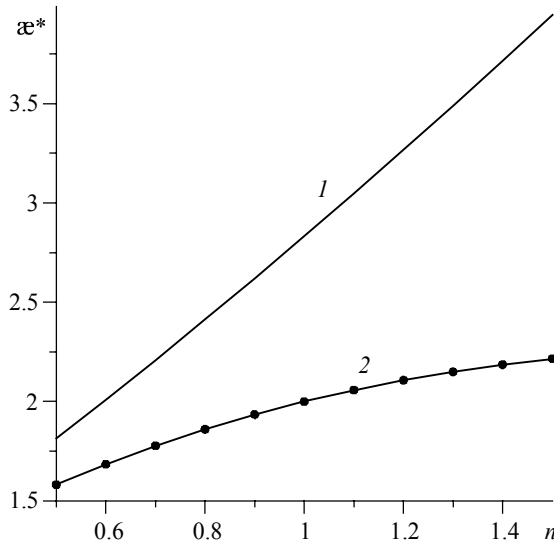


Рис. 7. Зависимости  $\alpha^*$  от  $n$   
Fig. 7. Dependences of  $\alpha^*$  on  $n$

### Заключение

Сформулирована математическая постановка задачи о стационарном неизотермическом течении степенной жидкости в плоском канале / круглой трубе с учетом вязкой диссипации и зависимости консистенции среды от температуры в одномерном приближении. Разработан численный алгоритм решения задачи на основе метода конечных разностей. В результате проведенных параметрических расчетов получены характерные распределения скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции в сечении канала/трубы при разных значениях параметра, определяющего степень влияния вязкой диссипации, и показателя нелинейности реологической модели. Разработан алгоритм определения критических значений параметра задачи, разделяющих области существования и отсутствия устойчивого стационарного решения. Получены критические значения параметра, выше которых осуществляется режим гидродинамического теплового взрыва. Построены зависимости параметра от показателя нелинейности степенного реологического закона, выделяющие область устойчивых стационарных решений. Проведено сравнение результатов расчетов с аналитическим решением для случая течения в круглой трубе. Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическим решением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Резирер С.А.* Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой каплевой жидкости // ПММ. 1957. Т. 21. № 3. С. 424–430.
2. *Каганов С.А.* Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // ПМТФ. 1962. № 3. С. 96–99.
3. *Kearsley E.A.* The viscous heating correction for viscometer flows // Trans. Soc. Rheol. 1962. No. 6. P. 253–261. DOI: 10.1122/1.548925.
4. *Martin B.* Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity // Ind. J. Non-Linear Mech. 1967. V. 2. Iss. 4. P. 285–301. DOI: 10.1016/0020-7462(67)90001-7.
5. *Бостанджиян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И.* О гидродинамическом тепловом взрыве // ДАН СССР. 1965. Т. 163. № 1. С. 133–136.
6. *Бостанджиян С.А., Черняева С.М.* О гидродинамическом тепловом взрыве неньютоновской жидкости // ДАН СССР. 1966. Т. 170. № 2. С. 301–304.
7. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 409 с.
8. *Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В.* Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. Киев: Наукова думка, 1990. 216 с.
9. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запryanов З.Д. и др.* Химическая гидродинамика: Справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996. 336 с.
10. *Худяев С.И.* Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 271 с.
11. *Bognár G., Kovács J.* Non-isothermal steady flow of power-law fluids between parallel plates // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2012. V. 6. Iss. 1. P.122–129.
12. *Baptista A., Alves M.A., Coelho P.M.* Heat Transfer in Fully Developed Laminar Flow of Power Law Fluids // J. of Heat Transfer. 2014. V. 136. Iss. 4. P. 1–8. DOI: 10.1115/1.4025662.
13. *Borzenko E.I., Shrager G.R.* Effect of viscous dissipation on temperature, viscosity, and flow parameters while filling a channel // Thermophysics and Aeromechanics. 2014. V. 21. Iss. 2. P. 211–221. DOI:10.1134/S0869864314020073.
14. *Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shrager G.R.* Fountain nonisothermal flow of a viscous liquid during the filling of a circular tube // Theor. Found. Chem. Eng. 2014. V. 48. Iss. 6. P. 824–831. DOI: 10.1134/S0040579514060013.
15. *Borzenko E., Ryltsev I., Frolov O. Shrager G.* Nonisothermal filling of a planar channel with a power-law fluid // J. Physics: Conf. Series. 2017. V. 899. P. 1–6. DOI: 10.1088/1742-6596/899/2/022001.
16. *Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.* Неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении плоского канала // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2012. № 2. С. 80–87.
17. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
18. *Patankar S.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill, 1980. 197 p.
19. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Физматлит, 1960. 660 с.
20. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука 1987. 491 с.

Статья поступила 27.02.2018 г.

Borzenko E.I., Shrager G.R. (2018) NON-ISOTHERMAL STEADY FLOW OF POWER-LAW FLUID IN A PLANAR/AXISMETRIC CHANNEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 52. pp. 41–52

DOI 10.17223/19988621/52/5

The results of research on a one-dimensional steady flow of power-law fluid in the planar channel/circular pipe with allowance for viscous dissipation and temperature dependence of consistency factor defined by exponential law are shown. The flow is described by the motion and heat-transfer equations. The constant temperature and no-slip condition are set on the solid walls. The numerical solutions of formulated problems are obtained using the finite-difference method. The effect of medium rheology and dissipative heating on the flow pattern is parametrically investigated. Typical distributions of velocity, temperature, viscosity, and dissipative function in the channel/pipe cross-sections at various governing parameters are obtained. The algorithm defining critical values of parameter in the problem, which separate domains of existence and non-existence of stable stationary solution, is numerically implemented. Exceeding the obtained critical values leads to a hydrodynamic thermal explosion. When the rate of heat generation due to mechanical energy dissipation is higher than that of heat loss through the walls, the unlimited increase in the temperature occurs. The dependencies of parameter on the power-law index defining a stable stationary solution domain are plotted. The calculated results are in a good agreement with analytical solution.

Keywords: power law fluid, viscous dissipation, steady flow, finite-difference method, hydrodynamic thermal explosion.

*BORZENKO Evgeniy Ivanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

*SHRAGER Gennady Rafailovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: shg@ftf.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Regirer S.A. (1957) Nekotorye termogidrodinamicheskie zadachi ob ustanovivshemsya odnomernom techenii vyazkoy kapel'noy zhidkosti [Some thermohydrodynamic problems on a one-dimensional steady flow of viscous dropping liquid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 21(3). pp. 424–430.
2. Kaganov S.A. (1962) Ob ustanovivshemsya laminarnom techenii neszhimaemoy zhidkosti v ploskom kanale i krugloy tsilindricheskoy trube s uchchetom teploty treniya i zavisimosti vyazkosti ot temperatury [On a steady laminar flow of incompressible fluid in plane channel and round cylindrical tube with allowance for heat of friction and temperature dependence of viscosity]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 3. pp. 96–99.
3. Kearsley E.A. (1962) The viscous heating correction for viscometer flows. *Trans. Soc. Rheol.* 6. pp. 253–261. DOI: 10.1122/1.548925.
4. Martin B. (1967) Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity. *Ind. J. Non-Linear Mech.* 2(4). pp. 285–301. DOI: 10.1016/0020-7462(67)90001-7.
5. Bostandzhiyan S.A., Merzhanov A.G., Khudyaev S.I. (1965) O gidrodinamicheskom teplovom vzryve [On the hydrodynamic thermal explosion]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 163(1). pp. 133–136.
6. Bostandzhiyan S.A., Chernyaeva S.M. (1966) O gidrodinamicheskom teplovom vzryve nen'yutonovskoy zhidkosti [On the hydrodynamic thermal explosion in a non-Newtonian fluid flow]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 170(2). pp. 301–304.

7. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance in a laminar fluid flow in the pipes]. Moscow: Energiya.
8. Froysheter G.B., Danilevich S.Yu., Radionova N.V. (1990) *Techenie i teploobmen nen'yutonovskikh zhidkostey v trubakh* [Flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in the pipes]. Kiev: Naukova dumka.
9. Kutepov A.M., Polyaniin A.D., Zapryanov Z.D. et al. (1996) *Khimicheskaya gidrodinamika: Spravochnoe posobie* [Chemical Hydrodynamics: Handbook]. Moscow: Byuro Kvantum.
10. Hudyayev S.I. (2003) *Porogovye yavleniya v nelineynykh uravneniyakh* [Threshold phenomena in nonlinear equations]. Moscow: Fizmatlit.
11. Bognár G., Kovács J. (2012) Non-Isothermal Steady Flow of Power-Law Fluids between Parallel Plates. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 6(1). pp. 122–129.
12. Baptista A., Alves M.A., Coelho P.M. (2014) Heat transfer in fully developed laminar flow of power law fluids. *Journal of Heat Transfer*. 136(4). pp. 1–8. DOI: 10.1115/1.4025662.
13. Borzenko E.I., Shrager G.R. (2014) Effect of viscous dissipation on temperature, viscosity, and flow parameters while filling a channel. *Thermophysics and Aeromechanics*. 21(2). pp. 211–221. DOI: 10.1134/S0869864314020073.
14. Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shrager G.R. (2014) Fountain nonisothermal flow of a viscous liquid during the filling of a circular tube. *Theor. Found. Chem. Eng.* 48(6). pp. 824–831. DOI: 10.1134/S0040579514060013.
15. Borzenko E., Ryltsev I., Frolov O. Shrager G. (2017) Nonisothermal filling of a planar channel with a power-law fluid. *Journal of Physics: Conf. Series*. 899. pp. 1–6. DOI: 10.1088/1742-6596/899/2/022001.
16. Borzenko E.I., Shrager G.R. (2012) Nonisothermal flow of a viscous fluid when filling a plane channel. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(18). pp. 80–87.
17. Godunov S.K., Ryabenskii V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
18. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill.
19. Demidovich B.P., Maron I.A. (1981) *Computational Mathematics*. Moscow: Mir Publishers.
20. Frank-Kamenetskii D.A. (2015) *Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*. Princeton: Princeton University Press.