

УДК 535.314

В.В. ФИСАНОВ*

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ВРЕМЕНИ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПРЕЛОМЛЕНИЕ¹

Дано алгебраическое доказательство эквивалентности принципа наименьшего времени и закона Снеллиуса при отрицательном преломлении электромагнитных волн.

Ключевые слова: *изотропные прозрачные среды, закон Снеллиуса, отрицательное преломление, принцип наименьшего времени Ферма.*

Преломление электромагнитных волн на плоской поверхности раздела двух однородных изотропных прозрачных сред, которые различаются не только абсолютными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, но и их знаками, называется отрицательным преломлением. От обычного (положительного) преломления оно отличается тем, что падающий и преломлённый лучи располагаются по одну сторону от линии нормали к поверхности раздела. Отрицательное преломление сопровождается изменением типа волны: от прямой волны к обратной волне (у прямой волны направления волнового вектора и вектора Умова–Пойнтинга совпадают, тогда как у обратной волны они противоположны). Положительное преломление подчиняется закону Снеллиуса (закону синусов). Эквивалентность закона Снеллиуса принципу кратчайшего времени, который провозгласил в 1662 г. Ферма [1, 2], подтвердил в 1744 г. Мопертюи [3]. Он исходил из корпускулярной теории света (по этой причине в полученном им выражении следует заменить скорость волны в среде на обратную величину [4]). Оригинальное решение Мопертюи (как минимум оптической длины пути) до сих пор воспроизводится во многих пособиях по оптике. Аналогичным образом рассматривалось и отрицательное преломление [5–8], однако были сделаны противоречивые выводы относительно вида экстремума оптической длины пути. Впервые о том, что при отрицательном преломлении «...нельзя априорно утверждать, что реальный путь света соответствует именно максимуму или именно минимуму оптического пути», заявлено было в статье Веселаго [9]. По этой причине здесь применяется иной подход к проблеме отрицательного преломления на плоской поверхности раздела двух сред. Ранее он был предложен для доказательства эквивалентности принципа наименьшего времени и положительного закона Снеллиуса только лишь средствами алгебры, без использования операции дифференцирования [10]. Этот приём близок методически и по постановке работе самого Ферма [1], но является более ясным и кратким.

Примем для определённости, что падающий луч распространяется от точки Q_1 со скоростью v_1 в среде с показателем преломления n_1 , а преломлённый луч распространяется в среде с меньшей скоростью $v_2 < v_1$ и с большим значением показателя преломления $n_2 > n_1$. Следуя Ферма, и без потери общности, расстояния, проходимые лучом в средах, примем равными: $\overline{Q_1R} = \overline{RQ_2} = r$ (Рис. 1). В данном методе применяется доказательство «от противного»: предполагается, что луч проходит через границу сред в точке R , соответствующей кратчайшему времени $t(R) = r(v_1^{-1} + v_2^{-1})$, но закон Снеллиуса не выполняется для этой точки. На границе сред в малой окрестности точки R выбирается точка R' такая, что для неё отклонение от закона Снеллиуса уменьшается. Против ожидания, время прохождения луча $t(R')$ по трассе, проходящей через точку R' , как показывают оценки, уменьшается, а не возрастает. Достигнутое противоречие означает, что в точке R закон преломления неизбежно выполняется.

Прежде чем приступить к доказательству, следует правильно записать закон отрицательного преломления. Пусть α – угол падения, а β – угол преломления. Закон Снеллиуса гласит:

¹ Работа выполнена по Программе ВИУ, НИР 8.2.48, 2015 г.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где положительному преломлению соответствует условие $\sin(\alpha)\sin(\beta) > 0$, а отрицательному преломлению – условие $\sin(\alpha)\sin(\beta) < 0$. Если на Рис. 1 угол падения α принять положительным, то тогда угол преломления β следует считать отрицательным. В этом случае правая часть формулы (1) тоже становится отрицательной, что дало основание Веселаго ввести новое понятие «отрицательный показатель преломления» [11]. При отрицательном преломлении формулу (1) следует переписать в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\pi - |\beta|)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2)$$

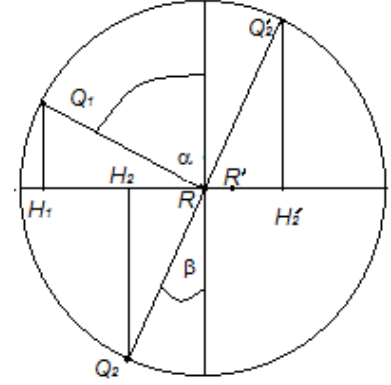


Рис. 1. Геометрия задачи

сохраняя положительное значение показателя преломления n_2 (каким оно и является по определению как величина модуля вектора рефракции). Угол $\pi + \beta$ указывает на точку Q_2' – на направление вектора фазовой скорости, волнового вектора и вектора рефракции преломлённой (обратной) волны, которое прямо противоположно вектору плотности потока энергии. Расстояния $\overline{RQ_2}$ и $\overline{RQ_2'}$ преломлённый луч проходит за одно и то же время r/v_2 . Обозначим отрезки $\overline{Q_1H_1} = h_1$, $\overline{Q_2H_2} = \overline{Q_2'H_2'} = h_2$, $\overline{RH_1} = x_1$, $\overline{RH_2} = \overline{RH_2'} = x_2$. Выбирая положение точки R' на отрезке между точками R и H_2' , а также предполагая, что в R справедливо неравенство $\sin \alpha / \sin(\pi - |\beta|) < v_1/v_2$, имеем цепочку неравенств $x_1/x_2 < (x_1 + \delta)/(x_2 - \delta) \leq v_1/v_2$. Строгое равенство наступает при значении $\delta = \delta_0 = (x_2 v_2^{-1} - x_1 v_1^{-1}) / (v_1^{-1} + v_2^{-1}) > 0$. Вычислим разницу во времени, которое требуется для прохождения всей трассы через точки R и R' :

$$\Delta = t(R') - t(R) = \left(\frac{\overline{Q_1R'}}{v_1} + \frac{\overline{R'Q_2'}}{v_2} \right) - \left(\frac{\overline{Q_1R}}{v_1} + \frac{\overline{RQ_2'}}{v_2} \right) = \frac{\sqrt{(x_1 + \delta)^2 + h_1^2} - r}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - \delta)^2 + h_2^2} - r}{v_2}. \quad (3)$$

Выражение в правой части формулы (3) можно оценить, используя неравенство вида $\sqrt{b+a} - \sqrt{a} < b/\sqrt{a}$ для всяких $a > 0$ и $b+a > 0$ [9]. Например, для оценки числителя в первом слагаемом из (3) получим: $\sqrt{(x_1 + \delta)^2 + h_1^2} - r = \sqrt{\delta^2 + 2\delta x_1 + r^2} - r < (\delta^2 + 2\delta x_1)/r$. Оказывается, что

$$\Delta < \frac{\delta^2 + 2\delta x_1}{v_1 r} + \frac{\delta^2 - 2\delta x_2}{v_2 r} = \frac{\delta(v_1 + v_2)}{v_1 v_2 r} (\delta - 2\delta_0). \quad (4)$$

Из формулы (4) стало очевидно, что если взять настолько малое приращение расстояния δ , что $\delta < 2\delta_0$, то оказывается $\Delta < 0$. Достигнутое противоречие (ожидалось положительное приращение времени Δ) означает, что в точке R должно быть $\sin \alpha / \sin(\pi - |\beta|) \geq v_1/v_2$.

Предположим теперь, что в точке R имеет место противоположное неравенство $\sin \alpha / \sin(\pi - |\beta|) > v_1/v_2$, а также неравенство $x_1/x_2 > v_1/v_2$. Точку R' следует поместить между точками H_2 и R . Формулы (3) и (4) не изменятся, но приращения δ и δ_0 теперь принимают отрицательные значения. Если взять настолько малое приращение, что $|\delta| < 2|\delta_0|$, то вновь приходим к противоречию: приращение во времени Δ оказывается отрицательным. Значит, в точке R возможно только строгое равенство (2).

Резюмируя, принцип наименьшего времени, так же как и принцип минимума оптической длины, согласуется с законом Снеллиуса в его положительном и отрицательном вариантах. Показатели преломления прозрачных сред всегда принимаются положительными величинами, а траектория луча определяется в зависимости от типа нормальных волн (прямая, обратная волна) в обеих средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ферма П. // Вариационные принципы механики. / Под ред. Л.С. Полака – М.: Физматгиз, 1959. – С. 7–10.
2. Andersen K. // *Historia Mathematica*. – 1983. – V. 10. – No. 1. – P. 48–62.
3. Мопертюи П. // Вариационные принципы механики. / Под ред. Л.С. Полака – М.: Физматгиз, 1959. – С. 23–30.
4. Уиттикер Э. История теории эфира и электричества. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 512 с.
5. Pokrovsky A.L., Efros A.L. // *Solid State Communs.* – 2002. – V. 124. – No. 8. – P. 283–287.
6. Сеитбек Д.Э., Гарифуллина Ж.Р. // Научное сообщество студентов XXI столетия. Технические науки: сб. статей. – Новосибирск: Сибирская ассоциация консультантов, 2012. – С. 103–122.
7. Молотков Н.Я., Гайнутдинов О.И. // Труды Естественнонаучного и гуманитарного факультета Тамбовского государственного технического университета. – Тамбов: Изд-во Першина Р.В., 2014. – С. 82–89.
8. Фисанов В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 8/2. – С. 24–27.
9. Веселаго В.Г. // УФН. – 2002. – Т. 172. – № 10. – С. 1215–1218.
10. Helfgott H., Helfgott M. // *Am. J. Phys.* – 2002. – V. 70. – No. 12. – P. 1224–1225.
11. Веселаго В.Г. // ФТТ. – 1966. – Т. 8. – Вып. 12. – С. 3571–3573.

*Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова
Национального исследовательского Томского государственного университета, г. Томск, Россия
E-mail: fisanov@mail.tsu.ru

Фисанов Василий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ведущ. науч. сотр.

V.V. FISANOV*

THE PRINCIPLE OF LEAST TIME AND A NEGATIVE REFRACTION

The algebraic proof of equivalence of the principle of least time and the Snell's law under negative refraction of electromagnetic waves is given.

Keywords: isotropic transparent media, Snell's law, negative refraction, Fermat's principle of least time.

REFERENCES

1. Fermat P., Synthesis for a Refraction, L.S. Polak (Ed.) *Variational Principles of Mechanics*, Moscow: Fizmatgiz, 1959, pp. 7–10. (In Russ.)
2. Andersen K., The Mathematical Technique in Fermat's Deduction of the Law of Refraction, *Historia Mathematica*, 1983, vol. 10, no. 1, pp. 48–62.
3. Maupertuis P.L., Harmonization of Various Laws of Nature, Which so far Seemed Incompatible, L.S. Polak (Ed.) *Variational Principles of Mechanics*, Moscow: Fizmatgiz, 1959, pp. 23–30. (In Russ.)
4. Whittaker E.T., *A History of the Theories of Aether and Electricity*, London: Longmans and Co., 1910, 506 p.
5. Pokrovsky A.L., Efros A.L., Sign of Refractive Index and Group Velocity in Left-Handed Media, *Solid State Communs.*, 2002, vol. 124, no. 8, pp. 283–287.
6. Seitbek D.E., Garifullina J.R., Mathematical Modeling of an Optical Lens of Negative Refraction, *Scientific Community of Students XXI Century. Technical Sciences*, Novosibirsk: Siberian Association of Consultants, 2012, pp. 103–122. (In Russ.)
7. Molotkov N.Ya., Guynutdinov O.I., Snell's Law Justification for Negative Refractive Index, // *Proceedings of Natural Science and Humanities Faculty of Tambov State Technical University*, Tambov: Pershina R.B., 2014, pp. 82–89. (In Russ.)
8. Fisanov V.V., Negative Refraction and the Fermat's Principle, *Izv. VUZ. Fizika*, 2015, vol. 58, no. 8/2, pp. 24–27. (In Russ.)
9. Veselago V.G., Formulating Fermat's Principle for Light Traveling in Negative Refraction Materials, *Physics-Uspeski*, 2002, vol. 40, no. 10, pp. 1097–1099.
10. Helfgott H., Helfgott M. A Noncalculus Proof that Fermat's Principle of Least Time Implies the Law of Refraction, *Am. J. Phys.*, 2002, vol. 70, no. 12, pp. 1224–1225.
11. Veselago V.G., On the Properties of Substances with Simultaneously Negative Values of a Permittivity (ϵ) and a Permeability (μ), *Solid State Physics*, 1966, vol. 8, no. 12, pp. 3571–3573. (In Russ.)

* V.D. Kuznetsov Siberian Physical-Technical Institute of National Research Tomsk State University, Tomsk. Russia
E-mail: fisanov@mail.tsu.ru

Fisanov Vasili Vasilievich, Prof., Dr. Sc., Leading Scientist.