

На правах рукописи



Лисовская Екатерина Юрьевна

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
РЕСУРСНЫХ СМО С НЕПУАССОНОВСКИМИ
ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент, **Моисеева Светлана Петровна**

Официальные оппоненты:

Гайдамака Юлия Васильевна, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, доцент

Семенова Дарья Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», кафедра высшей и прикладной математики, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Защита диссертации состоится 21 июня 2018 г. в 10 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 102).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/LisovskayaEYu21062018.html>

Автореферат разослан «__» апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор



Скворцов
Алексей Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время исследования в области обработки и передачи данных актуально значимы для создания новых поколений интеллектуальных систем, в том числе и для разработки технологий Интернета вещей. Особенности работы с распределенными системами обработки данных больших объемов требуют создания новых математических моделей потоков, распределения и обработки данных в таких системах и развития новых подходов к исследованию таких моделей. Применение теории массового обслуживания к моделированию процессов обработки данных и облачных вычислений является достаточно новым направлением теоретических исследований. В этой области можно отметить работы К. Е. Самуйлова, В. А. Наумова, L. Guo, Sh. Zhao, T. Yan, Ch. Jiang, C. Shen, W. Tong, J.-N. Hwang, Q. Gao, E. Gelenbe, M. Schneps-Schneppe, в которых предлагаются модели распределенной обработки больших данных, представленные в виде систем и сетей массового обслуживания сложной конфигурации с простейшими входящими потоками и экспоненциальным или гиперэкспоненциальным обслуживанием.

Вместе с тем, при проектировании реальных информационных систем и коммутационных центров необходимо учитывать объем затрачиваемых ресурсов для хранения и обработки данных. При этом, как правило, поступающие запросы на эти ресурсы являются случайными величинами. В связи с этим, актуальным является разработка новых математических моделей ресурсных моделей, сформулированных в терминах систем массового обслуживания (СМО), которые бы позволили оценить объемы занятого ресурса.

Э. Л. Ромм и В. В. Скитович впервые сформулировали обобщение задачи Эрланга, где каждое поступающее требование обладает некоторым информационным качеством, которое авторы называют величиной требования, с отказами в обслуживании, когда величина поступающего требования превосходит разность между емкостью СМО и суммой величин требований, находящихся на обслуживании в момент появления нового требования.

В дальнейшем, существенный вклад в развитие методов исследования ресурсных СМО внесли О. М. Тихоненко, А. Тихоненко, Е. В. Морозов, Р. С. Некрасова, Л. В. Потахина, К. Е. Самуйлов, М. Kaweska, W. M. Kempa. В своих работах авторы рассматривают системы обслуживания требований случайного объема, как класс систем с некоторой емкостью и зависимым или независимым временем обслуживания требований от их объема. Ресурсные СМО с ограни-

ченными ресурсами используются в работах К. Е. Самуйлова, В. А. Наумова, Т. Kimura, Т. Murase, Т. Okuda, Т. Czachorski, Т. Nycz, F. Pekergin, в качестве моделей беспроводных сетей связи следующего поколения. Несколько работ А. В. Печинкина и С. Я. Шоргина с коллегами посвящены исследованию суммарного объема заявок в системах, функционирующих в дискретном времени.

Несмотря на большой перечень прикладных задач, которые могут быть решены с использованием моделей массового обслуживания с поступающими потоками требований случайного объема, на сегодняшний день точные аналитические результаты по исследованию суммарного объема, находящихся требований в системе, существуют только для случая пуассоновского входящего потока. Однако, как показано в работах О. В. Лукашенко, Е. В. Морозова, Ю. Е. Хохлова, О. И. Сидоровой, М. Pagano, Т. Czachórski, J. Domańska, С. De Nicola, более адекватными математическими моделями реальных потоков данных в современных инфокоммуникационных системах и сетях передачи данных сетях являются рекуррентные, МАР-потоки (Markovian Arrival Process) и его частные случаи, в том числе ММРР (Markov Modulated Poisson Process), предложенные D. M. Lucantoni и M. F. Neuts.

Решение задачи анализа немарковских ресурсных систем обслуживания с непуассоновскими входящими потоками на сегодняшний день представлено лишь отдельными работами, а разработка методов исследования таких систем является актуальной научной проблемой.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является построение и исследование математических моделей ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием.

Задачи:

1. Построить математические модели L -фазных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов с входящими рекуррентным и ММРР- потоками заявок.
2. Разработать модификацию метода многомерного динамического просеивания, позволяющего проводить исследование суммарного объема занятого ресурса в L -фазных ресурсных системах с неограниченным числом приборов при неэкспоненциальном обслуживании и непуассоновских входящих потоках.
3. Применить метод асимптотического анализа для построения гауссовской аппроксимации многомерного стационарного распределе-

ния вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса в L -фазных ресурсных системах с неограниченным числом приборов и неэкспоненциальном обслуживании при непуассоновских входящих потоках.

4. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа L -фазных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов.

Научная новизна результатов, представленных в диссертации, состоит в следующем:

1. Впервые предложены математические модели L -фазных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, позволяющие учитывать требование заявки на предоставление случайного количества ресурса, необходимого для ее обслуживания.
2. Разработана модификация метода многомерного динамического просеивания, предназначенного для исследования L -фазных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, которая позволяет выполнять анализ суммарного объема занятого ресурса в системе.
3. Впервые применен метод асимптотического анализа для исследования суммарного объема занятого ресурса в L -фазных ресурсных системах массового обслуживания с неограниченным числом приборов, непуассоновскими входящими потоками заявок и неэкспоненциальным обслуживанием.
4. С использованием модификации метода многомерного динамического просеивания и метода асимптотического анализа доказано, что стационарное асимптотическое распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса в L -фазных ресурсных системах с неограниченным числом приборов, неэкспоненциальным обслуживанием и различными типами входящих непуассоновских потоков имеет вид многомерного гауссовского распределения вероятностей.
5. С использованием разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа L -фазных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов установлена область применимости полученных асимптотических результатов в допредельных условиях, и даны рекомендации по выбору оптимального количества предоставляемого ресурса на фазах.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Математические модели бесконечнолинейных ресурсных систем массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным временем обслуживания вида: $MMPP^{(v)}/GI/\infty$, $GI^{(v)}/GI/\infty$, $MMPP^{(v)}/(GI/\infty)^L$, $GI^{(v)}/(GI/\infty)^L$.
2. Модификация метода многомерного динамического просеивания для построения процессов, учитывающих факт освобождения ровно того количества ресурса, которое было занято в момент поступления заявки.
3. Применение метода асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока для получения вида предельной характеристической функции распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса в рассматриваемых бесконечнолинейных ресурсных системах массового обслуживания.
4. Комплекс программ для имитационного моделирования и численного анализа ресурсных СМО с непуассоновскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания.

Методы исследования. Для проведения диссертационных исследований использовались методы математического моделирования, теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, дифференциальных уравнений, имитационного моделирования.

Исследование рассматриваемых немарковских ресурсных систем массового обслуживания выполнялось с помощью предложенных в работе методов. Модификация метода многомерного динамического просеивания – для решения проблемы построения уравнений, определяющих распределение вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса в системе. Для решения составленных уравнений для ресурсных систем с непуассоновскими входящими потоками применялся метод асимптотического анализа в предельном условии растущей интенсивности входящего потока. Применение метода асимптотического анализа позволяет сделать вывод о том, что в предельном условии стационарные распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса в ресурсных системах массового обслуживания с неограниченным числом приборов, непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием является асимптотически многомерными гауссовскими.

Для определения области применимости полученных асимптотических результатов используются методы имитационного модели-

рования. Имитационное моделирование и определение области применимости произведено с помощью комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для моделирования многофазных ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, представленного в диссертации.

Теоретическая и практическая значимость работы. Модели ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, непуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием позволяют существенно расширить круг решаемых задач в теории массового обслуживания. Впервые продемонстрирована возможность применения метода многомерного динамического просеивания для исследования процесса изменения суммарного объема занятого ресурса в ресурсных системах массового обслуживания с неограниченным числом приборов, что является вкладом в развитие методов, используемых для анализа систем массового обслуживания.

Ресурсные СМО могут быть использованы в качестве математических моделей инфокоммуникационных систем, кредитно-депозитных организаций, а также видеокарт и суперкомпьютеров. В инфокоммуникационных системах при проектировании сетей нового поколения, в том числе и при разработке технологий Интернета вещей. В кредитно-депозитных организациях при расчетах оборотного капитала, где ресурсом служат денежные средства, вносимые клиентами на счета. Моделирование видеокарт с целью выпуска специализированных комплектов для майнинга криптовалюты. В суперкомпьютерах для моделирования процессов обработки больших данных.

Достоверность полученных результатов подтверждается математически корректными выводами и доказательствами теорем, представленными в работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей, как между собой, так и с известными в теории массового обслуживания результатами, а также многочисленными компьютерными экспериментами с применением имитационного моделирования и численного анализа.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Постановка изложенных задач была сделана научным руководителем, доктором физико-математических наук, доцентом С. П. Моисеевой. Автор лично участвовал в получении всех результатов, изложенных в диссертации, а именно в разработке и исследовании математических моделей ресурсных систем массового обслуживания с неограниченным числом массового обслуживания, не-

пуассоновскими входящими потоками и неэкспоненциальным обслуживанием, выводе всех формул, доказательстве всех представленных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов, выполнении статистического и численного анализа полученных результатов. В совместных публикациях научному руководителю С. П. Моисеевой принадлежат постановки задач и указание основных направлений исследования.

Связь работы с крупными научными проектами. Значительная часть результатов, изложенных в работе получена в рамках выполнения: 1) гранта № 16-31-00292 мол_а «Разработка асимптотических методов исследования математических моделей телекоммуникационных систем» при финансовой поддержке РФФИ (2016-2017 гг.); 2) научно-исследовательской работы № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности (2015-2016 гг.).

Соответствие паспорту специальности. Данное диссертационное исследование выполнено в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно соответствует следующим областям (номера соответствуют пунктам в паспорте специальности): п.2 – Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; п.4 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; п.5 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Апробация работы. Основные результаты работы и отдельные ее положения докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: 54-я Международная научная студенческая конференция МНСК-2016, г. Новосибирск, 2016 г., Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем», г. Москва, 2016 г., 2017 г., XX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи: Математика. Информатика», г. Анжеро-Судженск, 2016 г., Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и эконо-

мических систем», г. Томск, 2016 г., 2017 г., Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», пос. Катунь, 2016 г., г. Казань, 2017 г., Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN)», г. Москва, 2016 г., 2017 г., Двенадцатая Международная азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», г. Новосибирск, 2016 г., Международная конференция «Вычислительная и прикладная математика 2017», г. Новосибирск, 2017 г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 27 работы, из них 2 статьи в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций (в том числе одна статья в российском научном журнале, индексируемом Scopus), 4 статьи в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, а также 20 работ опубликовано в трудах Международных и Всероссийских конференций, получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (138 наименований). Общий объем диссертации составляет 138 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описаны актуальность, теоретическая и практическая значимость работы, цель, основные задачи и методы исследования.

В **первой главе** проводится исследование математических моделей ресурсных бесконечнолинейных СМО с непуассоновскими входящими потоками. Рассматриваются бесконечнолинейные СМО с неограниченным количеством некоторого ресурса без отказов в обслуживании поступающим заявкам. На вход систем поступает некоторый поток заявок (простейший, ММРР, рекуррентный). Входящая заявка занимает любой свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени $\xi \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $B(\tau) = P\{\xi < \tau\}$ с конечным первым моментом. Кроме того, каждое поступающее требование формирует запрос на выделение ресурса случайного объема $v \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $G(y) = P\{v < y\}$ с конечными первым и вторым моментами.

Определение. Суммарным объемом занятого ресурса в системе будем называть сумму всех ресурсов, занимаемых всеми заявками.

Будем считать, что ограничений на суммарный объем нет, таким образом, в рассматриваемой СМО нет отказов в обслуживании. По окончании обслуживания заявка покидает систему и освобождает занимаемый ресурс. Пусть в начальный момент времени t_0 система пуста. Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов, $V(t) = \sum_{i=1}^{i(t)} v_i$ – суммарный объем занятого ресурса в системе в момент времени $t \geq t_0$.

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей двумерного случайного процесса $\{i(t), V(t)\}$. Так как рассматриваемый двумерный процесс не является марковским, в разделе 1.1 представлено описание разработанной модификации метода динамического просеивания, позволяющей учитывать занятые ресурсы лишь теми заявками, которые находятся в системе к произвольному моменту времени.

В разделах 1.2-1.4 метод динамического просеивания применяется для анализа ресурсных СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, различными типами входящих потоков (простейший, ММРР-, рекуррентный, соответственно) и произвольным временем обслуживания. В разделе 1.2 для СМО с простейшим входящим потоком с параметром λ получена точная характеристическая функция $h(u, v)$ числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса

$$h(u, v) = \exp\left\{\lambda b \left[e^{ju} G^*(v) - 1 \right]\right\},$$

где $b = \int_0^{\infty} (1 - B(\tau)) d\tau$, $G^*(v) = \int_0^{\infty} e^{jvy} dG(y)$.

В разделах 1.3-1.4 для решения составленных уравнений для ресурсных СМО с непурассоновскими (ММРР- и рекуррентный, соответственно) применяется метод асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока ($\lambda \sim N\lambda$, $N \rightarrow \infty$), с помощью которого сформулированы и доказаны теоремы из которых следует, что распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса являются асимптотически двумерным гауссовскими с параметрами:

- вектором математических ожиданий $\mathbf{a} = [N\lambda b \quad N\lambda a_1 b]$,
- ковариационной матрицей

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} N\lambda b + N\kappa\beta & N\lambda a_1 b + Na_1 \kappa\beta \\ N\lambda a_1 b + Na_1 \kappa\beta & N\lambda a_2 b + Na_1^2 \kappa\beta \end{bmatrix},$$

где a_1 и a_2 – первый и второй начальные моменты случайной величины v с функцией распределения вероятностей $G(y)$,

$$b = \int_0^{\infty} (1 - B(\tau)) d\tau, \quad \beta = \int_0^{\infty} (1 - B(\tau))^2 d\tau,$$

а величины λ и κ вычисляются по следующим формулам:

– для ММРР-потока, управляемого цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{vk}\|$, $v, k = 1, \dots, K$, заданного диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$:

$$\lambda = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}, \quad \kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}, \quad (1)$$

вектор-строка \mathbf{g} удовлетворяет системе линейных матричных уравнений $\mathbf{g}\mathbf{Q} = \mathbf{r}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})$, $\mathbf{g}\mathbf{e} = C$, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец, \mathbf{I} – единичная диагональная матрица;

– для рекуррентного потока, заданного функцией распределения вероятностей длин интервалов между последовательными моментами поступления заявок в систему $A(z)$:

$$\lambda = a^{-1}, \quad \kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2), \quad (2)$$

$$a = \int_0^{\infty} (1 - A(z)) dz, \quad \sigma^2 = \int_0^{\infty} (u - a)^2 dA(z).$$

На рисунке 1 изображены графики двумерных распределений вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса, полученных с помощью комплекса имитационного моделирования. Исходные параметры, заданные для моделирования системы, представлены в диссертации.

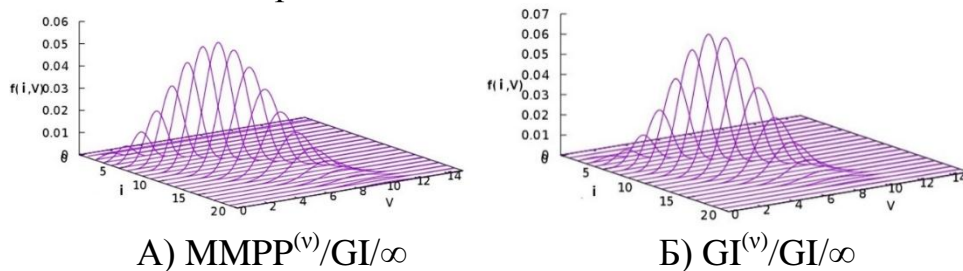


Рисунок 1 – Двумерное распределение вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса в системе

Во **второй главе** проводится исследование математических моделей многофазных ресурсных бесконечнолинейных СМО с непуассоновскими входящими потоками.

В разделах 2.1-2.3 рассматриваются двухфазные бесконечнолинейные СМО с неограниченным количеством некоторого ресурса на каждой из фаз. На вход системы поступает некоторый поток заявок.

Входящее требование занимает любой свободный прибор на первой фазе, где обслуживается в течение случайного времени $\xi_1 \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $B_1(\tau) = P\{\xi_1 < \tau\}$, по истечении которого, требование переходит на вторую фазу, где обслуживается в течение случайного времени $\xi_2 \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $B_2(\tau) = P\{\xi_2 < \tau\}$. Кроме того, каждому поступающему требованию необходим некоторый случайный объем ресурса на первой фазе $v \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $G(y) = P\{v < y\}$. Отметим, что, переходя на вторую фазу, требование мгновенно освобождает занимаемый ресурс на первой фазе и занимает на второй. По окончании обслуживания на второй фазе заявка покидает систему и освобождает занимаемый ресурс.

Пусть в начальный момент времени t_0 система пуста. Обозначим $i_l(t)$ – число занятых приборов, $V_l(t)$ – суммарный объем занятого ресурса на l -ой фазе в момент времени $t \geq t_0$, $l = 1, 2$. Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей четырехмерного случайного процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$.

Так как рассматриваемый четырехмерный процесс не является марковским, в разделе 2.1 предлагается модификация метода многомерного динамического просеивания, позволяющая учитывать занятые ресурсы лишь теми заявками, которые находятся на фазе системы к произвольному моменту времени.

В разделах 2.2-2.3 модификация метода многомерного динамического просеивания применяется для анализа двухфазных ресурсных СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов на каждой из фаз, различными типами входящих потоков (ММРР-, рекуррентный, соответственно) и произвольным временем обслуживания. Для решения составленных уравнений применяется метод асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока ($\lambda \sim N\lambda$, $N \rightarrow \infty$), с помощью которого сформулированы и доказаны теоремы из которых следует, что распределения вероятностей чисел занятых приборов и суммарных объемов занятого ресурса на фазах системы являются асимптотически четырехмерными гауссовскими с параметрами:

– вектором математических ожиданий:

$$\mathbf{a} = [N\lambda b_1 \quad N\lambda a_1 b_1 \quad N\lambda b_2 \quad N\lambda a_1 b_2],$$

– ковариационной матрицей:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} N\lambda b_1 + N\kappa\beta_1 & N\lambda a_1 b_1 + N\kappa a_1 \beta_1 & N\kappa b & N\kappa a_1 b \\ N\lambda a_1 b_1 + N\kappa a_1 \beta_1 & N\lambda a_2 b_1 + N\kappa a_1^2 \beta_1 & N\kappa a_1 b & N\kappa a_1^2 b \\ N\kappa b & N\kappa a_1 b & N\lambda b_2 + N\kappa\beta_2 & N\lambda a_1 b_2 + N\kappa a_1 \beta_2 \\ N\kappa a_1 b & N\kappa a_1^2 b & N\lambda a_1 b_2 + N\kappa a_1 \beta_2 & N\lambda a_2 b_2 + N\kappa a_1^2 \beta_2 \end{bmatrix},$$

где a_1 и a_2 – первый и второй начальные моменты случайной величины v с функцией распределения вероятностей $G(y)$,

$$b_1 = \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau)) d\tau, \quad \beta_1 = \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau))^2 d\tau, \quad b_2 = \int_0^{\infty} (B_1(\tau) - B_2^*(\tau)) d\tau,$$

$$\beta_2 = \int_0^{\infty} (B_1(\tau) - B_2^*(\tau))^2 d\tau, \quad b = \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau))(B_1(\tau) - B_2^*(\tau)) d\tau,$$

а величины λ и κ вычисляются по формулам (1) и (2).

На рисунке 2 изображены графики двумерных распределений вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса на второй фазе системы, полученных с помощью комплекса имитационного моделирования. Исходные параметры, заданные для моделирования системы, представлены в диссертации.

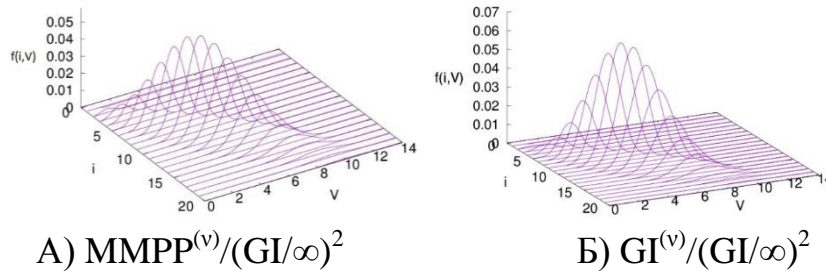


Рисунок 2 – Двумерные распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса на второй фазе системы

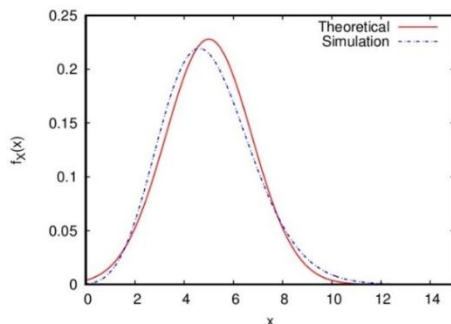
В разделе 2.4 приводится обобщение результатов для анализа суммарных объемов занятого ресурса на фазах L -фазной ресурсной СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов, ММРР входящим потоком и произвольным временем обслуживания. Показано, что распределение вероятностей суммарных объемов занятого ресурса на фазах системы является асимптотически многомерным гауссовским.

В третьей главе представлено описание разработанного комплекса программ, реализующего имитационное моделирование и численный анализ вероятностных характеристик исследуемых ресурсных СМО. В представленный комплекс входит: численные алгоритмы для расчета асимптотических характеристик рассматриваемых систем представлены в виде рабочих листов системы MathCad; программы,

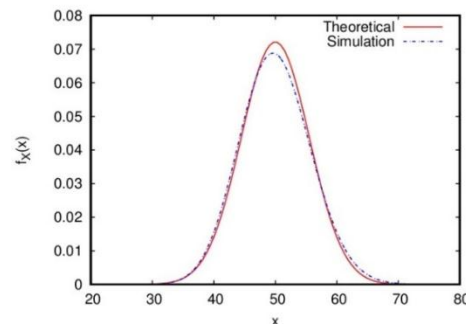
реализующие гауссовскую аппроксимацию чисел занятых приборов и суммарных объемов занятых ресурсов в исследуемых ресурсных СМО, полученную методом асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока; генерация случайных величин, соответствующих времени обслуживания на приборах и объему занимаемого ресурса, имеющих экспоненциальное, равномерное, гамма-распределения; имитационное моделирование СМО с неограниченным числом приборов и неограниченным объемом предоставляемого ресурса. Для имитационного моделирования исследуемых систем был выбран дискретно-событийный метод моделирования. Проведена оценка точности асимптотических результатов с помощью следующих метрик: расстояние Колмогорова Δ^C , расстояние Хеллингера Δ^{He} , квазирасстояние Кульбака-Лейблера Δ^{KL} , расстояние, вычисляемое по общей площади гистограмм, которые представляют данные распределения вероятностей Δ^S . В таблице 1 приведены значения различных видов расстояний между распределениями вероятностей числа занятых приборов в системе $MMPP^{(v)}/GI/\infty$ и суммарного объема занятого ресурса для различных значений параметра N , соответственно. На рисунке 3 изображены графики полученных распределений вероятностей. Исходные параметры, заданные для моделирования системы, представлены в диссертации.

Таблица 1 – Значения расстояний между асимптотическим и эмпирическим распределениями вероятностей

N	1	5	10	15	20	50	100
Δ^C	0,186	0,042	0,031	0,026	0,023	0,017	0,015
Δ^{He}	0,037	0,010	0,007	0,006	0,005	0,002	0,001
Δ^{KL}	0,161	0,031	0,018	0,012	0,010	0,005	0,004
Δ^S	0,409	0,087	0,058	0,048	0,043	0,032	0,028



А) $N = 10$



Б) $N = 100$

Рисунок 3 – Распределение вероятностей суммарного объема занятого ресурса в системе (асимптотические результаты – «Theoretical», эмпирические – «Simulation»)

Из таблицы 1 можем сделать вывод о том, что точность аппроксимации возрастает при увеличении интенсивности входящего потока N , а рисунок 3 демонстрирует это.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе настоящей диссертационной работы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., доц. Светлане Петровне Моисеевой за тесное сотрудничество, понимание, терпение, за проработку всего материала и за моральную поддержку при подготовке к защите. За совместную работу в рамках диссертационного исследования, за помощь и конструктивную критику автор благодарит проф. Микеле Пагано (Michele Pagano, Pisa, Italy). За ценные замечания в процессе выполнения и апробации работы на регулярных научных семинарах искреннюю благодарность автор выражает заведующему кафедрой теории вероятностей и математической статистики, д.т.н. Анатолию Андреевичу Назарову, а также коллективу кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. **Лисовская Е. Ю.** Асимптотический анализ немарковской бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с входящим рекуррентным потоком / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 39. – С. 30–38. – DOI: 10.17223/19988605/39/5. – 1,05 / 0,52 а.л.

2. **Lisovskaya E.** Study of the MMPP/GI/ ∞ queueing system with random customers' capacities / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano, V. Potatueva // Информатика и ее применение. – 2017. – Т. 11, вып. 4. – С. 109–117. – DOI: 10.14357/19922264170414. – 1,05 / 0,26 а.л.

Scopus: **Lisovskaya E.** Study of the MMPP/GI/ ∞ queueing system with random customers' capacities / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano, V. Potatueva // Informatika i ee Primeneniya. – 2017. – Vol. 11, is. 4. – P. 109–117.

Статьи в зарубежных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus:

3. **Lisovskaya E.** Infinite-server tandem queue with renewal arrivals and random capacity of customers / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano // Communications in computer and information science. – 2017. – Vol. 700. – P. 201–216. – 1,6 / 0,53 а.л. (*Scopus*)

4. **Lisovskaya E.** On the total customers' capacity in multi-server queues / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano // Communications in computer and information science. – 2017. – Vol. 800. – P. 56–67. – 1,2 / 0,4 а.л. (*Scopus*)

5. Moiseev A. Infinite-server queueing tandem with MMPP arrivals and random capacity of customers / A. Moiseev, S. Moiseeva, **E. Lisovskaya** // 31st European conference on modelling and simulation (ECMS 2017) : proceedings. – 2017. – P. 673–679. – 0,7 / 0,23 а.л. (*Web of Science*)

6. **Lisovskaya E.** The total capacity of customers in the infinite-server queue with MMPP arrivals / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano // Communications in computer and information science. – 2016. – Vol. 678. – P. 110–120. – DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_11. – 1,1 / 0,37 а.л. (*Scopus*)

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017615302. Имитационная модель бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с MMPP входящим потоком / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева, М. Pagano; правообладатель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (RU). Заявка от 2017612202; дата поступления – 17.03.2017; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 12.05.2017.

Публикации в прочих научных изданиях:

8. Галилейская А. А. Исследование многофазной ресурсной СМО с MMPP входящим потоком / А. А. Галилейская, **Е. Ю. Лисовская**, С. П. Моисеева // Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (АРТСТ–2017) : материалы международной научной конференции. Москва, 23–27 октября 2017 г. – М., 2017. – С. 80–82. – 0,12 / 0,04 а.л.

9. **Lisovskaya E.** Total customers' capacity in the multi-server queues / E. Lisovskaya // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 03 октября 2017 г. – Томск, 2017. – Ч. 1. – С. 10–17. – 0,47 а.л.

10. Галилейская А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной СМО с ММРР-входящим потоком требований случайного объема / А. А. Галилейская, **Е. Ю. Лисовская** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции им. А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 03 октября 2017 г. – Томск, 2017. – Ч. 1. – С. 43–49. – 0,41 / 0,2 а.л.

11. Колбасова В. А. Исследование суммарного объема заявок в двухфазной бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком / В. А. Колбасова, **Е. Ю. Лисовская**, С. П. Моисеева, М. Pagano // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети : управление, вычисление, связь (DCCN-2017) : материалы Двадцатой Международной научной конференции. Москва, 25–29 сентября 2017 г. – М., 2017. – С. 54–61. – 0,65 / 0,16 а.л.

12. **Лисовская Е. Ю.** Моделирование процессов передачи данных с помощью СМО требований случайного объема / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева, А. А. Галилейская // Материалы XVIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Иркутск, 21–25 августа 2017 г. – Новосибирск, 2017. – С. 80–81. – 0,12 / 0,04 а.л.

13. Галилейская А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим простейшим потоком / А. А. Галилейская, **Е. Ю. Лисовская** // Марчуковские научные чтения – 2017 : труды международной конференции. Новосибирск, 25 июня – 14 июля 2017 г. – Новосибирск, 2017. – С. 186–190. – 0,36 / 0,18 а.л.

14. Галилейская А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с простейшим входящим потоком / А. А. Галилейская, **Е. Ю. Лисовская** // Марчуковские научные чтения – 2017 : тезисы

международной конференции. Новосибирск, 25 июня – 14 июля 2017 г. – Новосибирск, 2017. – С. 152. – 0,12 / 0,06 а.л.

15. Галилейская А. А. Исследование двухфазной бесконечнолинейной системы массового обслуживания с ММРР входящим потоком требований случайного объема / А. А. Галилейская, **Е. Ю. Лисовская** // Труды Томского государственного университета. – Томск, 2017. – Т. 301. Серия физико-математическая : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы V Международной молодежной научной конференции. Томск, 19–20 мая 2017 г. – С. 92–97. – 0,52 / 0,26 а.л.

16. Потатуева В. В. Асимптотический анализ системы ММРР/GI/ ∞ с заявками случайного объема / В. В. Потатуева, **Е. Ю. Лисовская**, С. П. Моисеева // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, 24–28 апреля 2017 г. – М., 2017. – С. 47–49. – 0,17 / 0,06 а.л.

17. **Лисовская Е. Ю.** Имитационное моделирование системы массового обслуживания требований случайного объема / Е. Ю. Лисовская, М. Pagano // Проблемы оптимизации сложных систем : сборник докладов Двенадцатой Международной азиатской школы-семинара, Новосибирск, 12–16 декабря 2016 г. – Новосибирск, 2016. – С. 352–357. – 0,2 / 0,1 а.л.

18. Колбасова В. А. Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком / В. А. Колбасова, **Е. Ю. Лисовская**, С. П. Моисеева // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети : управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой Международной научной конференции. Москва, 21–25 ноября 2016 г. – М., 2016. – Т. 3. – С. 248–255. – 0,47 / 0,16 а.л.

19. **Lisovskaya E.** The total capacity of customers in the ММРР/GI/ ∞ queueing system / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой международной научной конференции, Москва, 21–25 ноября 2016 г. – М., 2016. – Т. 3. – С. 313–325. – 0,76 / 0,25 а.л.

20. **Лисовская Е. Ю.** Асимптотический анализ второго порядка для бесконечнолинейной системы массового обслуживания с рекур-

рентным входящим потоком требований случайного объема / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016 : труды международной конференции. Ташкент, 09–10 ноября 2016 г. – Ташкент, 2016. – С. 205–208. – 0,35 / 0,17 а.л.

21. Кононов И. А. Исследование бесконечнолинейной СМО $MAR|GI|_{\infty}$ с заявками случайного объема / И. А. Кононов, **Е. Ю. Лисовская** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Алтайский край, Алтайский р-он, пос. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 67–71. – 0,29 / 0,15 а.л.

22. **Лисовская Е. Ю.** Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим ММРР-потоком / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Алтайский край, Алтайский р-он, пос. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 77–82. – 0,35 / 0,17 а.л.

23. **Лисовская Е. Ю.** Асимптотический анализ системы $MMPR|GI|_{\infty}$ с обслуживанием требований случайного объема / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2016. – Т. 299: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Международной молодежной научной конференции. Томск, 20–21 мая 2016 г. – С. 99–104. – 0,53 / 0,26 а.л.

24. Колбасова В. А. Исследование суммарного объема требований в бесконечнолинейной СМО с рекуррентным входящим потоком / В. А. Колбасова, **Е. Ю. Лисовская** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2016. – Т. 299: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Международной молодежной научной конференции. Томск, 20–21 мая 2016 г. – С. 96–99. – 0,35 / 0,18 а.л.

25. Колбасова В. А. Исследование суммарного объема требований в СМО вида $GI|M|_{\infty}$ методом асимптотического анализа / В. А. Колбасова, **Е. Ю. Лисовская** // Научное творчество молодежи.

Математика. Информатика : материалы XX Всероссийской научно-практической конференции. Томск, 28–29 апреля 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 97–101. – 0,23 / 0,12 а.л.

26. **Лисовская Е. Ю.** Исследование суммарного объема требований в бесконечнолинейной системе массового обслуживания вида $M|GI|_{\infty}$ / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, 18–22 апреля 2016 г. – М., 2016. – С. 28–30. – 0,14 / 0,07 а.л.

27. **Лисовская Е. Ю.** Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в системе $M/GI|_{\infty}$ / Е. Ю. Лисовская // 54-я Международная научная студенческая конференция МНСК-2016: Математика : материалы конференции. Новосибирск, 16–20 апреля 2016 г. – Новосибирск, 2016. – С. 108. – 0,06 а.л.