На правах рукописи

**Бронер Валентина Игоревна**

# МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ РЕЛЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

**Научный руководитель:** доктор технических наук, профессор
**Назаров Анатолий Андреевич**

**Официальные оппоненты:**

**Войтишек Антон Вацлавович,** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория стохастических задач, ведущий научный сотрудник

**Семенова Дарья Владиславовна,** кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», кафедра высшей и прикладной математики, доцент

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится 21 июня 2018 г. в 12 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 102).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/BronerVI21062018.html

Автореферат разослан «__» апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор

Скворцов
Алексей Владимирович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы**. Развитие экономики выявило потребность к созданию новых методов исследования систем управления ресурсами.

Под ресурсами будем подразумевать человеческие, материальные, финансовые, информационные и иные ресурсы.

На данный момент к стратегиям планирования производства и управлению ресурсами уделяют большое внимание. Существует значительное число исследований, посвященных данной широкой области. Одной из важнейших составляющих стратегического планирования на предприятии является управление материальными и финансовыми запасами.

В числе первых работ в теории управления запасами принято считать публикацию F. Y. Edgeworth 1888 года, в которой исследуются финансовые резервы банка. В этой работе на основе центральной предельной теоремы определен оптимальный объем запасов (наличных средств) в банке для удовлетворения запросов на изъятие вкладов в случайные моменты времени.

Модели управления запасами можно классифицировать по рассматриваемым периодам на однопериодные и многопериодные.

В однопериодных моделях предполагается, что в начале рассматриваемого периода, например, дня, месяца или года, в систему управления запасами поступают некоторые ресурсы, которые будут потребляться в течение указанного периода. Тут возможны различные постановки задач.

Одной из распространенных однопериодных моделей является задача Newsvendor Problem (Newsboy problem) или задача разносчика газет, рассматриваемая в работах K. Arrow, T. Harris, J. Marshak, L. Abdel-Malek, R.J. Casimir, C.T. Chang, Y. Qin, M. Khouja, T.M. Choi.

Более общей моделью, описывающей класс систем управления запасами, можно считать single-period problem (модель одиночного периода), рассматриваемую в работах B. Ismail, I. Kabak, A. Lau, А.Ф. Терпугова и других авторов.

Рассматриваемые выше модели не учитывают, что нераспроданный в предыдущем периоде товар может быть использован в дальнейшем. Поэтому логичным обобщением однопериодных моделей являются многопериодные, предполагающие, что остатки запасов после окончания текущего периода переходят в использование на следующий.

Для проведения исследования указанных моделей требуется разработка новых математических методов, что делает данный класс задач более сложным для исследования.

В зарубежной литературе многопериодные модели управления запасами рассмотрены в работах T.M. Choi, C.H. Chiu, P.L. Fu, P. Farahvash, J.U. Kim, H. Ramalhinho Dias Lourenço, Y. Wu, H. Xu, D. Zhang, А.Ф. Терпугова, К.И. Лившица, О.А. Змеева, А.В. Китаевой и других авторов.

Наименее изученными многопериодными моделями управления запасами, в том числе и за рубежом, являются модели с релейным управлением, рассматриваемые F.A. van der Duyn Schouten, А.Ф. Терпуговым, К.И. Лившицем, О.А. Змеевым, А.В. Китаевой, О.В. Вальц, Я.С. Бублик, И.Ю. Шифердекер, Л.Ю. Сухотиной. В работах А.Ф. Терпугова, К.И. Лившица, О.А. Змеева, А.В. Китаевой и других авторов рассматриваются различные модели страховых компаний, находящие широкое применение в описании моделей страховых компаний, в которых в качестве входящего потока ресурса выступают страховые премии, а выходящего – выплаты по страховым случаям. Поскольку страховые компании заинтересованы в увеличении прибыли, то в подобных работах управление заключается в регулировании денежных притоков и оттоков. Управлением потоками ресурса в зависимости от некоторого порогового значения денежных ресурсов будем называть релейным.

К сожалению, в указанных исследованиях разработанные авторами точные методы не удается применить к исследованию моделей с неэкспоненциальными распределениями, а диффузионная аппроксимация применима не ко всем постановкам задач. Таким образом, возникает потребность в разработке методов исследования стохастических систем релейного управления ресурсами.

**Цель и задачи исследования.** Целью данной работы является разработка новых и модификация известных методов исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами.

Были поставлены следующие задачи:

1. Проанализировать существующие и предложить новые варианты математических моделей систем управления ресурсами для исследования реальных процессов в различных предметных областях.

2. Построить математическую модель системы управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока объемов потребления, управление которыми осуществляется релейно.

3. Найти стационарное распределение вероятностей значений процесса объемов накопленных запасов в системе управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока объемов потребления при гиперэкспоненциальном, эрланговском и PH-распределениях объемов потребления.

4. Разработать метод характеристических чисел для нахождения решения интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при $m$-фазными гиперэкспоненциальным, эрланговским и PH-распределениями объемов потребления.

5. Разработать методы явной и неявной аппроксимаций стационарного распределения вероятностей значений процесса объема накопленных запасов в системе управления ресурсами с постоянной скоростью поступления ресурса и релейным управлением интенсивностью случайного потока объемов потребления при произвольном распределении его объемов.

6. Модифицировать метод преобразования Фурье для нахождения стационарного распределения вероятностей значений процесса объема накопленных запасов в системе управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока объемов потребления при произвольном распределении объемов потребления.

7. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа стохастических систем релейного управления запасами.

**Научная новизна результатов, изложенных в диссертации,** состоит в следующем:

1. Впервые предложены модификации стохастических моделей систем релейного управления ресурсами, основные отличия которых от существующих заключаются в следующем: и скорость поступления ресурса и интенсивность случайного потока потребления совместно представляют собой кусочно-постоянные функции с двумя значениями. В этих моделях предполагается, что значения процесса уровня запасов, накопленных в системе, могут быть отрицательными, что интерпретируется как отложенное исполнение заявки на потребление. Объемы потребления являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с $m$-фазными гиперэкспоненциальным, эрланговским, PH- и произвольным распределениями.

2. Впервые предложен метод характеристических чисел, позволяющий найти в явном виде решение интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова для стационарной плотности распределения вероятностей значений объемов накопленных запасов в системе управления ресурсами с релейным управлением и $m$-фазными гиперэкспоненциальными, эрланговскими и PH-распределениями объемов потребления.

3. Впервые предложен метод неявной аппроксимации, позволяющий с высокой точностью аппроксимировать решение интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при произвольной функции распределения объемов потребления. Указанный метод имеет широкую область применимости, в частности, может быть применен к модели, предложенной выше.

4. Впервые предложен метод явной аппроксимации третьего, четвертого и пятого порядков решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значения. Данный метод применим для широкого класса моделей, в том числе к системам релейного управления ресурсами, при этом точность явной аппроксимации 4-го и 5-го порядков существенно выше по сравнению с неявной. Даны рекомендации по применению аппроксимаций.

5. Впервые предложена модификация метода преобразования Фурье для решения интегро-дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями. Разработанный метод может быть использован при исследовании широкого класса моделей, а в применении к предложенной выше модели позволяет вычислить стационарное распределение вероятностей значений процесса накопленных запасов в системе релейного управления ресурсами при произвольном распределении объемов потребления.

**Положения и результаты, выносимые на защиту**.

1. Модификации стохастических моделей систем релейного управления запасами.

2. Метод характеристических чисел для решения интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова с $m$-фазными гиперэкспоненциальными, эрланговскими и PH-распределениями объемов потребления.

3. Метод неявной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями, основанный на $R$-аппроксимации распределений объемов потребления.

4. Метод явной аппроксимации третьего, четвертого и пятого порядков решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями.

5. Модификация метода преобразования Фурье для исследования интегро-дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при произвольном распределении объемов потребления.

6. Результаты применения разработанных методов к исследованию стохастических моделей релейного управления ресурсами.

7. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа стохастических моделей систем релейного управления запасами.

**Методы исследования.**

Для проведения исследований в работе применялись математический аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, дифференциальных уравнений и аппарат имитационного моделирования.

Для исследований были разработаны три новых аналитических метода, в том числе две аппроксимации, и одна модификация, позволяющие найти стационарное распределение вероятностей значений накопленных запасов в системе релейного управления ресурсами.

Для оценки качества и точности предложенных аппроксимаций было проведено сравнение с результатами имитационного моделирования.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в развитии аналитических методов исследования стохастических систем управления ресурсами.

Разработанные методы имеют самостоятельное значение. С их помощью возможно исследование различных математических моделей:

– теории массового обслуживания, в частности, при исследовании телекоммуникационных и информационных систем;

– актуарной математики, в том числе при исследовании капитала фондов социального страхования;

– теории управления запасами и других областей.

Предложенные модификации стохастических моделей управления ресурсами являются достаточно общими, что позволяет применять их к различным реальным системам, в которых предполагается релейное управления ресурсами. К таковым можно отнести процессы изменения воды в водохранилище, капитала фонда социального страхования, выпуск книг в издательстве и другие процессы изменения ресурсов. При этом под ресурсами могут подразумеваться как готовая продукция на складе, капитал компаний, так и информационные, природные ресурсы, сырье, что позволяет применять полученные результаты к широкому спектру прикладных задач.

**Достоверность полученных результатов** в диссертационном исследовании подтверждается корректным использованием математического аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, согласованностью результатов, полученных разными методами, численными экспериментами и имитационным моделированием, а так же совпадением с результатами, полученными другими авторами в частных случаях.

**Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.** Постановка изложенных задач была сделана научным руководителем, доктором технических наук, профессором А. А. Назаровым. Математические выкладки, численная реализация и имитационное моделирование выполнены В.И. Бронер. В совместных публикациях А. А. Назарову принадлежат постановки задач и указание основных направлений исследований.

**Связь работы с крупным научным проектом.** Значительная часть результатов диссертации была получена в рамках выполнения научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в 2014-2016 гг.

**Соответствие паспорту специальности.** Данное диссертационное исследование выполнено в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно соответствует следующим областям (номера соответствуют пунктам в паспорте специальности):

п. 1 – Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

п. 2 – Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

п. 4 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

**Апробация работы.** Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: XX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи. Математика. Информатика» (28-29 апреля 2016 г.), г. Анжеро-Судженск; IV, V Всероссийская молодежная научная конференция с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» г. Томск, 2016-2017 гг.; XIV Международная научно-практическая конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», г. Анжеро-Судженск, 2015 г.; XV Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ) 2016 г., пос. Катунь; XVI Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ) 2017 г., Казань; V, VI Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем», г. Москва, 2016 -2017 г.; XIX, XX Международная Конференция «Распределенные Компьютерные и Телекоммуникационные Сети: Управление, Вычисление, Связь», г. Москва 2016-2017 гг.; Международная конференция «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях – АВМТВ 2017», г. Москва, г.; международная конференция "Вычислительная и прикладная математика 2017" (ВПМ 2017), г. Новосибирск, 2017 г.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 16 работ, в том числе 3 статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 1 статья в российском научном журнале, переводная версия которого индексируется Web of Science), 4 статьи в зарубежных изданиях, индексируемых Scopus, 9 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских научных и научно-практических конференций.

**Структура работы.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы (110 наименований). Общий объем работы – 134 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** данной диссертации приводятся актуальность работы, её теоретическая и практическая значимость, цель и основные задачи исследования.

В **первой главе** проводится исследование стохастической модели системы управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления, управление которыми осуществляется релейно, при различных распределениях объемов потребления.

Рассмотрим систему управления ресурсами. Обозначим через $s(t)$ объем ресурсов, накопленных в системе к моменту времени $t$.

На вход данной системы непрерывно поступает ресурс с кусочно-постоянной скоростью $\nu(s)$ (под скоростью будем понимать объем ресурса, поступившего в единицу времени), которая зависит от значений процесса $s(t) = s$, то есть величин накопленных запасов к моменту времени $t$

$$\nu(s) = \begin{cases} \nu_1, & s < S, \\ \nu_2, & s \geq S, \end{cases} \tag{1}$$

где $S$ – некоторое зафиксированное значение уровня запасов $s(t)$, которое будем называть пороговым.

Будем полагать, что потребление ресурса осуществляется в случайные моменты времени партиями случайного объема. Моменты поступления запросов на потребление образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, здесь

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, & s < S, \\ \lambda_2, & s \geq S, \end{cases} \tag{2}$$

объемы одной партии запросов являются случайными величинами с функцией распределения $B(x)$.

Будем считать, что процесс $s(t)$ может принимать отрицательные значения $s(t) < 0$, интерпретируя это как отложенное исполнение заявки на потребление, то есть если поступившая заявка не находит необходимого объема ресурса для ее исполнения в системе, она ожидает накопления требуемого количества ресурса, получив которое, покидает систему.

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеют вид

$$\frac{\nu_1}{\lambda_1 b} > 1 > \frac{\nu_2}{\lambda_2 b}, \tag{3}$$

где $b$ – среднее значение объема одной партии на потребление ресурсов.

Для стационарной плотности $P(s)$ распределения вероятностей значений процесса $s(t)$ записано интегро-дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\nu(s)P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x)dB(x), \tag{4}$$

решение $P(s)$ которого удовлетворяет краевым условиям

$$P(-\infty) = P(\infty) = 0. \tag{5}$$

В работе сформулированы и доказаны леммы о свойствах решения $P(s)$ основного уравнения (4).

**Лемма 1.** При $\nu_1 = \nu_2$ решение $P(s)$ уравнения (4) непрерывно в точке $s = S$.

**Лемма 2.** При $\nu_1 \neq \nu_2$ решение $P(s)$ основного уравнения (4) терпит разрыв в точке $s = S$.

Введем следующие обозначения

$$P(s) = \begin{cases} P_1(s), & s < S, \\ P_2(s), & s \ge S, \end{cases} \quad P_1(S) = \lim_{s \to S} P_1(s),$$

$$\int_{-\infty}^{S} P(s)ds = R_1, \quad \int_{S}^{\infty} P(s)ds = R_2.$$

**Лемма 3.** Вероятности $R_1$ и $R_2$ имеют вид

$$R_1 = \frac{\nu_1 - \lambda_1 b}{\nu_1 - \nu_2 - (\lambda_1 b - \lambda_2 b)}, \quad R_2 = \frac{\lambda_2 b - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2 - (\lambda_1 b - \lambda_2 b)}. \tag{6}$$

В работе сформулирована и доказана теорема о виде частичного решения $P_2(s)$ основного уравнения (4) при $s \ge S$ и произвольной функции распределения $B(x)$

**Теорема 1**. Частичное решение $P_2(s)$ основного уравнения (4) при $s \ge S$ имеет вид

$$P_2(s) = Ce^{-\gamma(s-S)}, \quad s \ge S, \tag{7}$$

где $\gamma$ ненулевой корень нелинейного, скалярного уравнения

$$\lambda_2 - \nu_2 \gamma = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x), \tag{8}$$

константа $C$ определяется равенством

$$C = \gamma R_2 = \gamma \frac{\lambda_2 b - \nu_2}{\nu_1 - \lambda_1 b - (\nu_2 - \lambda_2 b)}. \tag{9}$$

Поскольку найти частичное решение $P_1(s)$ основного уравнения (4) при $s < S$ при произвольной функции $B(x)$ затруднительно, то рассмотрены распределения объемов потребления фазового типа.

В работе разработан метод характеристических чисел для нахождения частичного решения $P_1(s)$ интегро-дифференциального уравнения (4) с кусочно-постоянными коэффициентами. Идея данного метода заключается в следующем. Предлагается искать частичное решение $P_1(s)$ основного уравнения (4) в виде $P_1(s) = C\sum_{n=1}^{m} x_n e^{z_n(s-S)}, \quad s < S,$ где $m$ – число фаз распределения объемов потребления. Подставляя данное решение в уравнение (4) при $s < S$ и используя результат теоремы 1, после преобразований будут получены: характеристическое уравнение, корни $z_n$ которого являются параметрами решения $P_1(s)$; система линейных уравнений, решение $x_n$ которой определяет решение $P_1(s)$. При этом константа $C$ определяется выражением (9).

Применяя метод характеристических чисел, для случая гиперэкспоненциальной функции распределения $B(x)$ объемов партий потребления

$$B(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \left(1 - e^{-\mu_k x}\right) \tag{10}$$

с параметрами $\mu_k > 0$ и $b_k > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 1, \tag{11}$$

сформулированы и доказаны следующие лемма и теорема.

**Лемма 4.** При выполнении условия существования стационарного режима $\nu_1 > \lambda_1 b$ все корни $z = z_n$, $n = \overline{1,m}$ уравнения

$$\nu_1 z + \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\mu_k}{\mu_k - z} \tag{12}$$

действительные и положительные.

**Теорема 2.** Частичное решение $P_1(s)$ основного уравнения (4) при $s < S$ имеет вид

$$P_1(s) = C \sum_{n=1}^{m} x_n e^{z_n (s-S)}, \quad s < S, \tag{13}$$

где $z_n$ $n = \overline{1,m}$ – положительные корни уравнения (12), параметры $x_n$ распределения (13) являются компонентами вектора $\mathbf{X}$ – решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{AX} = \mathbf{h}, \tag{14}$$

где элементы $A_{kn}$ матрицы $\mathbf{A}$ и компоненты $h_k$ вектора $\mathbf{h}$ имеют вид

$$A_{kn} = \frac{\lambda_1}{\mu_k - z_n}, \quad h_k = \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma}, \tag{15}$$

нормирующая константа $C$ определяется равенством (9).

Далее в работе рассмотрено распределение Эрланга $m$-го порядка и PH-распределение $B(x)$ объемов потребления ресурсов. Для данных распределений в работе сформулированы и доказаны теоремы о виде частичного решения $P_1(s)$ основного уравнения (4) при $s < S$.

Во **второй главе** рассматривается модель системы управления ресурсами, описанная в Главе 1, на вход которой непрерывно поступает ресурс с постоянной скоростью $\nu_1 = \nu_2 = 1$ в единицу времени.

Частичное решение уравнения

$$P'(s)+\lambda(s)P(s)=\int_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x)dB(x) \qquad (16)$$

при $s > S$ найдено в главе 1, а при $s < S$ и произвольной функции распределения $B(x)$ объемов потребления его поиск вызывает некоторые затруднения. Поэтому для нахождения частичного решения уравнения (4) при $s < S$ разработан **метод неявной** аппроксимации, основанный на гиперэкспоненциальной аппроксимации, предложенной в работе Рыжикова Ю.И. и реализуемый следующим образом.

Идея метода состоит в следующем. Рассматривается решение уравнения (16) при двухфазном гиперэкспоненциальном распределении $B(x) = R(x)$ объемов потребления

$$B(x)=q(1-\mathrm{e}^{-\mu_1 x})+(1-q)(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 x}), \qquad (17)$$

где $\mu_k > 0$ и $0 < q < 1$. Тогда решение $P_R(s)$ интегро-дифференциального уравнения (16) записывается в явном виде функции, зависящей от параметров $q$, $\mu_1$ и $\mu_2$ гиперэкспоненциального распределения $R(x)$.

Далее, применяется метод моментов для функции распределения $B(x)$, реализуемый приравниванием первых трех моментов функции распределения $B(x)$ к первым трем интегральным характеристикам функции $R(x)$, с помощью которого определяются значения параметров $q$, $\mu_1$ и $\mu_2$ функции $R(x)$, аппроксимирующей функцию распределения $B(x)$.

Затем полученные значения параметров $q$, $\mu_1$ и $\mu_2$ подставляются в решение $P_R(s)$, найденные при двухфазной гиперэкспоненциальной функции распределения $R(x)$, реализуем этап неявной аппроксимации функцией $P_R(s)$ решения $P(s)$ уравнения (16) с произвольной функцией распределения $B(x)$ объемов потребления.

Логичным завершением метода неявной аппроксимации является исследование свойств аппроксимирующей функции $P_R(s)$, определение области ее применимости и точности предлагаемой аппроксимации, что имеет принципиальное значение, так как аппроксимация допустима лишь только тогда, когда она удовлетворяет заданной точности.

В зависимости от полученных значений параметров $q$, $\mu_1$ и $\mu_2$ возможны следующие приемлемые варианты:

1) $R(x)$ – гиперэкспоненциальная функция распределения,

2) $R(x)$ – функция распределения, не являющаяся гиперэкспоненциальной,

3) $R(x)$ не является функцией распределения, но ее применение допустимо, так как позволяет найти аппроксимацию распределения $P(s)$, обладающую допустимой погрешностью, которая устанавливается имитационным моделированием,
и один неприемлемый, когда функция $R(x)$ неограниченна.

Поскольку на основе численных экспериментов показано, что метод неявной аппроксимации в некоторых случаях не может быть применен, то в работе разработан оригинальный метод явной аппроксимации.

Поскольку частичное решение $P_2(s)$ при $s > S$ уравнения (16) определено полностью, то неизвестную функцию $P_1(s)$ при $s \le 0$, будем искать с помощью метода явной аппроксимации, основанного на методе моментов.

В работе сформулирована и доказана теорема о виде моментов функции $P_1(s)$ при произвольной функции распределения $B(x)$ с конечными моментами $b_k$ $k$-го порядка

**Теорема 5.** Моменты функции $P_1(s)$ имеют вид

$$a_0 = R_1$$

$$a_k = \frac{(k+1)!w - \sum\limits_{n=0}^{k-1} C_{k+1}^{n}(-1)^{k+1-n} b_{k+1-n}\left(\lambda_2 Cn!\gamma^{k-n} + \gamma^{k+1}\lambda_1 a_n\right)}{\gamma^{k+1}(k+1)\left(1-\lambda_1 b_1\right)}, \qquad (18)$$

$$w = C\left(\lambda_2 b_1 - 1\right),\ k \ge 1.$$

Таким образом, значения всех моментов $a_k$ функции $P_1(x)$ рекуррентно определены.

Для произвольной функции распределения $B(x)$ функция $P_1(x)$ аппроксимируется функцией вида $\overline{P}_1(s) = C_1 e^{z_1 s} + C_2 e^{z_2 s}, s < S$, значения параметров $C_1$, $C_2$, $z_1$, $z_2$ аппроксимирующей функции $\overline{P_1}(x)$ определяются из условия непрерывности решения $P(s)$ уравнения (16)

$$C_1 + C_2 = C$$

функции $P(s)$ в точке $s = S$ и равенства моментов $\int\limits_{-\infty}^{0} x^k \overline{P_1}(x)dx$ (при $k = 0,1,2$), аппроксимирующей функции $\overline{P_1}(x)$ с найденными выше моментами $a_0$, $a_1$ и $a_2$ для функции $P_1(x)$.

В работе показано, что значения параметров $C_1$, $C_2$, $z_1$ и $z_2$ определяются равенствами

$$C_1 = Cq,\ C_2 = C(1-q),\ z_1 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2v},\ z_2 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2v}, \qquad (19)$$

где $u = \dfrac{f_1 f_2 - f_3}{f_1^2 - f_2}, v = \dfrac{f_2^{\,2} - f_1 f_3}{f_1^2 - f_2}, f_1 = a_0 C^{-1},\ f_2 = -a_1 C^{-1},\ f_3 = a_2 (2C)^{-1}.$
Следовательно, аппроксимирующую функцию $P(s)$ можно записать в виде

$$P(s) = \begin{cases} \overline{P_1}(s-S), & s \le S, \\ Ce^{-\gamma(s-S)}, & s \ge S, \end{cases} \tag{20}$$

где $\overline{P_1}(x)$ имеет вид $\overline{P_1}(x) = C_1\,\mathrm{e}^{z_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{z_2 x}$, а значения ее параметров $C_1$, $C_2$, $z_1$ и $z_2$ определяются равенствами (19).

Поскольку значения параметров $C_1$, $C_2$, $z_1$ и $z_2$ аппроксимирующей функции $\overline{P_1}(x)$ определяются моментами $a_0$, $a_1$ и $a_2$ , которые в свою очередь зависят от трех моментов $b_1$, $b_2$ и $b_3$ функции распределения $B(x)$ в силу (18), то функцию $P(s)$ из (20) будем называть аппроксимацией третьего порядка. Точность такой аппроксимации установлена в Главе 4 путем численных экспериментов. Так же рассмотрены аппроксимации четвертого и пятого порядков.

В **третьей главе** рассматривается математическая модель, описанная в главе 1. В связи с тем, что основное уравнение (4) для стационарной плотности распределения $P(s)$ вероятностей значений уровня запасов, накопленных в системе, является интегро-дифференциальным с кусочно-постоянными коэффициентами, то его решение при произвольной функции распределения $B(x)$ известными методами найти в явном виде затруднительно. Однако, в силу того, что частичное решение $P_2(s)$ при $s > S$ уравнения (4) получено в полной мере, с помощью предложенной в работе модификации метода преобразования Фурье, найдено выражение, определяющее решение $P_1(s)$ при $s < S$ основного интегро-дифференциального уравнения (4).

В работе сформулирована и доказана теорема о виде решения $P(s)$.

**Теорема 6.** Решение уравнения (4) при произвольном распределении объемов потребления имеет вид

$$P(s) = \gamma\frac{1-\lambda_1 b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jus}\,\frac{1}{ju-\gamma}\,\frac{ju\nu_2 - \lambda_2 + \lambda_2\int_0^{\infty} e^{jux}dB(x)}{ju\nu_1 - \lambda_1 + \lambda_1\int_0^{\infty} e^{jux}dB(x)}du, & s < S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s \ge S. \end{cases}$$

Таким образом, задача исследования стохастической модели системы релейного управления ресурсами решена полностью.

В **четвертой главе** приведено описание комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для исследования представленных в данной диссертации стохастических моделей систем релейного управления ресурсами, а также численный анализ полученных результатов.

Приведена численная реализация результатов исследований стохастических моделей систем релейного управления скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления ресурсов при фазовых распределениях объемов потребления, полученных аналитически.

Отражены результаты численного анализа стохастических моделей систем релейного управления интенсивностью случайного потока потребления ресурсов с постоянной скоростью поступления при произвольном распределении объемов потребления, полученных методами неявной и явной аппроксимаций и их сравнение с результатами имитационного моделирования.

Будем считать, что распределение объемов потребления $B(x)$ является гамма распределением, и проведем $R$-аппроксимацию по первым трем моментам функции распределения $B(x)$.

Пусть гамма распределение $B(x)$ имеет параметры формы α и масштаба β, такие что α = β, тогда среднее значение будет равно единице, а параметры аппроксимирующей функции $R(x)$ имеют вид

$$q=\frac{1}{2}+\frac{2\alpha-1}{D},\ \mu_1=\frac{6\alpha}{2(\alpha+1)+D},\mu_2=\frac{6\alpha}{2(\alpha+1)-D},D=\sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)}.$$

В работе использовано расстояние Колмогорова Δ для оценки точности неявной аппроксимации функции распределения $F_R(x)$ объема накопленного ресурса, полученной на основе неявной аппроксимации,

$$\Delta=\sup_{-\infty<x<\infty}|F(x)-F_R(x)|,$$

где $F(x)$ – эмпирическая функция распределения того же объема, полученная на основе имитационного моделирования при следующих значениях параметров $S = 10$, $\nu = 1$, $\lambda_1 = 0{,}8$ и $\lambda_2 = 1{,}2$.

В таблице 1 приведены результаты аппроксимации. В первой строке приведены значения параметра формы α, а во второй строке указано соответствующее параметрам расстояние Колмогорова.

Таблица 1 – Точность неявной аппроксимации $P_R$(s) функции $P(s)$

| α | 0,2 | 0,6 | 1,6 | 2 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Δ | 0,014 | 0,005 | 0,005 | 0,004 | 0,001 |

Данные таблицы свидетельствуют о высоком качестве неявной аппроксимации, которая применима для любых значений параметра $\alpha$.

Аналогичное исследование проведено для логнормального распределения объемов потребления с логарифмическими средним и дисперсией $\mu$ и $\sigma^2$ соответственно, такими что $\mu = -\sigma^2$.

Таблица 2 – Точность неявной аппроксимации $P_R(s)$ функции $P(s)$

| $\exp(\sigma^2)$ | 1,1 | 1,3 | 1,49 | 1,51 | 1,7 | 1,98 | 2,2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | 0,003 | 0,002 | 0,003 | – | – | – | 0,006 | 0,005 |

Результаты исследования, представленные в таблице 2, говорят о том, что неявная аппроксимация не может быть применена при $1{,}5 < \exp(\sigma^2) < 2$, а в остальных случаях обладает высокой точностью.

Для оценки точности явной аппроксимации третьего, четвертого и пятого порядков проведено сравнение данных, полученных на основе приближенных формул с результатами имитационного моделирования.

Рассмотрим в качестве распределения $B(x)$ объемов потребления распределение логнормальное распределение с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$.

Для следующего набора параметров $S = 40$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\lambda_1 = 0{,}8$ и $\lambda_2 = 1{,}2$, $\mu = m$ приведем сравнение функций распределения, полученных на основе имитационного моделирования $F(x)$, и аппроксимации $i$-го порядка $F_i(x)$, $i = \overline{3,5}$ , с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta_i = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_i(x)|.$$

В таблице 3 отражена точность аппроксимации решения уравнения (4) для логнормального распределения с логнормального распределения объемов потребления.

Таблица 3 – Точность явной аппроксимации $i$-го порядка функции $P(s)$

| $\exp(\sigma^2)$ | 1,2 | 1,3 | 1,49 | 2,01 | 2,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_3$ | 0,003 | 0,035 | – | 0,110 | 0,006 | 0,022 |
| $\Delta_4$ | 0,003 | – | 0,005 | 0,004 | 0,005 | 0,013 |
| $\Delta_5$ | – | – | 0,004 | 0,005 | 0,005 | 0,010 |

Результаты, представленные в таблице 3, свидетельствуют о высокой точности предложенной явной аппроксимации.

Кроме этого в главе 4 предложен численный анализ результатов исследования стохастических моделей систем релейного управления скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления ресурсов, полученных модифицированным методом преобразования Фурье. А так же приведено описание программы имитационного моделирования стохастической модели систем релейного управления запасами.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, сделанные в данном диссертационном исследовании.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук:*

1. Назаров А. А. Исследование потоковых моделей управления запасами методом R-аппроксимации / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Информационно-управляющие системы. – 2016. – № 5 (84). – С. 91–97. – DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.5.91. – 0,81 / 0,41 а.л.

2. Назаров А. А. Управление ресурсами физических экспериментов в модели Крамера-Лундберга / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 7. – С. 99–108. – 1,16 / 0,58 а.л.

*в переводной версии журнала:*

Nazarov A. A. Resource Control for Physical Experiments in the Cramer–Lundberg Model / A. A. Nazarov, **V. I. Broner** // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 59, is. 7. – P. 1024–1036. – DOI: 10.1007/s11182-016-0869-6. (*Web of Science*)

3. Назаров А. А. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 1 (34). – С. 43–49. – DOI: 10.17223/19988605/34/5. – 0,81 / 0,41 а.л.

*Статьи в зарубежных изданиях, индексируемых Scopus:*

4. Nazarov A. Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow / A. Nazarov, **V. Broner** // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 800. – P. 370–381. – DOI : 10.1007/978-3-319-68069-9_30. – 1,2 / 0,6 а.л.

5. Nazarov A. Modified Cramer-Lundberg Models with On/Off Control and Hyperexponential Distribution of Demands Purchases Values / A. Nazarov, **V. Broner** // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 700. – P. 380–394. – DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_32. – 1,5 / 0,75 п.л.

6. Nazarov A. Inventory Management System with Erlang Distribution of Batch Sizes / A. Nazarov, **V. Broner** // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 638. – P. 273–280. – DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8_24. – 0,8 / 0,4 а.л.

7. Nazarov A. Inventory Management System with On/Off Control of Output Product Flow / A. Nazarov, **V. Broner** // Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – Vol. 10684. – P. 132–144. – DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9_13. – 1,2 / 0,6 а.л.

*Статьи в сборниках материалов конференций:*

8. Назаров А. А. Модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольными объемами потребления ресурса / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ 2017) : материалы международной научной конференции. Москва, 23–27 октября 2017 г. – М., 2017. – С. 350–354. – 0,29 / 0,15 а.л.

9. Назаров А. А. Модифицированная модель Крамера-Лундберга при релейном управлении и произвольном распределении объёмов потребления / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Марчуковские научные чтения – 2017 : тезисы. Новосибирск, 25 июня – 14 июля 2017 г. – Новосибирск, 2017. – С. 158. – 0,12 / 0,06 а.л.

10. Nazarov A. A. Inventory Management Models with On/Off Control and Hyperexponential Distribution of Demands Purchases Values / A. A. Nazarov, **V. I. Broner** // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017) : материалы Двадцатой международной научной конференции. Москва, 25–29 сентября 2017 г. – М., 2017. – С. 98–105. – 0,57 / 0,29 п.л.

11. Назаров А. Модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением поступлением ресурса / А. Назаров, **В. Бронер** // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы всероссийской конференции с международным участием. Москва, 24–28 апреля 2017 г. – М., 2017. – С. 41–43. – 0,17 / 0,09 а.л.

12. Назаров А. А. Система управления запасами с распределением Эрланга объемов потребления ресурсов / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 2. – С. 53–59. – DOI: 10.17223/9785751124335/11. – 0,41 / 0,21 а.л.

13. Nazarov A. A. Inventory management system with On/Off control and phase-type distribution of purchases quantity / A. A. Nazarov, **V. I. Broner** // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой международной научной конференции. Москва, 21–25 ноября 2016 г. – М., 2016. – Т. 3 : Молодежная школа-семинар. – С. 349–355. – 0,35 / 0,17 а.л.

14. Назаров А. Метод R-аппроксимации для системы управления запасами с релейным управлением / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Инфор-

мационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы всероссийской конференции с международным участием. Москва, 18–22 апреля 2016 г. – М., 2016. – С. 40–42. – 0,17 / 0,09 а.л.

15. Назаров А. Модифицированная модель Крамера-Лундберга релейного управления запасами с пуассоновскими потоками моментов поступления и потребления ресурсов / А. А. Назаров, **В. И. Бронер** // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2016: труды международной конференции. Ташкент, Узбекистан, 09–10 ноября 2016 г. – Ташкент, 2016. – С. 213–217. – 0,44 / 0,22 а.л.

16. **Бронер В. И.** Численная реализация метода R-аппроксимации для системы управления запасами с релейным управлением / В. И. Бронер // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XX Всероссийской научно-практической конференции. Томск, 28–29 апреля 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 49–52. – 0,23 а.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати Издательского Дома
Томского государственного университета.
Заказ № 3132 от «13» апреля 2018 г. Тираж 100 экз.
г. Томск Московский тр.8 тел. 53-15-28