

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная
научная конференция
«Все грани математики и
механики»**

(25–29 апреля 2016 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

Стохастическое линейное моделирование стоимости энергоресурсов и курсов национальных валют

Чернушенко К. А., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: k.chernushenko@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе строится математическая модель, которая выявит зависимость курса валюты от времени и даст возможность спрогнозировать стоимость валюты в будущем.

Ключевые слова: авторегрессионная модель типа ARMA(p,q), критерий Дики-Фуллера, критерий KPSS, теорема Вольда, модель скользящего среднего.

Уже на протяжении долгого времени на валютном рынке отсутствует стабильность. С каждым днём растёт количество экономических факторов, влияющих на курс валют.

Построим математическую модель, которая выявит зависимость курса валюты от времени и даст возможность спрогнозировать стоимость валюты в будущем. В данной работе рассматривается курс казахстанского тенге, российского рубля и цена за баррель нефти, экономическая связь между которыми вполне логична [2].

Итак, имеем данные, которые находятся в свободном доступе, взятые с шагом в 10 дней: курс тенге [4] с 01.03.15 по 19.04.15, курс рубля [5] с 15.02.15 по 05.04.15, цена за баррель нефти (Urals) [6] с 01.09.14 по 15.04.16 (по 50 элементов в каждой выборке).

В работе данные будут представлены в виде временных рядов. Основной чертой, выделяющей анализ временных рядов среди других видов статистического анализа, является существенность порядка, в котором производятся наблюдения. Отметим, что значения наблюдаются через равные промежутки времени.

Существует множество моделей для описания временных рядов. Например, модели типа ARIMA, ARCH, GARCH. Одна из самых распространённых – авторегрессионная модель типа ARMA(p,q) [8].

Их обоснованность вытекает из теоремы Вольда [1], которая является одним из самых фундаментальных результатов в теории временных рядов. Утверждение говорит о том, что любой стационарный процесс можно представить в виде так называемого линейного фильтра от белого шума плюс детерминированная компонента.

Теорема Вольда. Пусть выполнен ряд следующих условий:

А) x_t – стационарный в широком смысле временной ряд, η_t – ошибки одношагового линейного прогноза по полной предыстории процесс. Тогда ошибки η_t являются белым шумом, т.е. имеют нулевое математическое ожидание, не автокоррелированы и имеют одинаковую дисперсию.

В) Пусть, кроме того, x_t является регулярным. Тогда он представим в следующем виде:

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \eta_{t-i} + v_t,$$

где $\psi_0 = 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$; процесс v_t здесь является строго стационарным, линейно детерминированным и не коррелирован с ошибками η_t . Такое представление единственно.

Утверждения А и В составляют теорему Вольда. Эта теорема является одним из самых фундаментальных результатов в теории временных рядов. Утверждение В говорит о том, что любой стационарный процесс можно представить в виде так называемого линейного фильтра от белого шума плюс линейно детерминированная компонента. Это так называемое разложение Вольда.

Определение 1. Случайный процесс x_t называют $AR(p)$ процессом авторегрессии порядка p , если его значение определяется линейной комбинацией p его предыдущих значений и добавлением «белого шума» ε_t .

Определение 2. Случайный процесс x_t называют $MA(q)$ процессом скользящего среднего порядка q , если в разложении Вольда присутствует q слагаемых.

На практике иногда бывает целесообразно ввести в модель как элементы авторегрессии, так и элементы скользящего среднего. Это делается для того, чтобы с использованием как можно меньшего числа параметров уловить характеристики исследуемого эмпирического ряда. Такой процесс называется смешанным процессом авторегрессии – скользящего среднего и обозначается $ARMA(p, q)$.

Эта модель получила название модели Бокса-Дженкинса, поскольку была популяризирована Дж. Боксом и Г. Дженкинсом в их известной книге «Анализ временных рядов».

Основным условием построения $ARMA$ модели является стационарность временного ряда, это вытекает из теоремы Вольда.

Существует множество различных критериев проверки гипотезы о стационарности временного ряда. Воспользуемся двумя из них: критерий Дики-Фуллера [9] и критерий Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина (KPSS в дальнейшем) [3].

На практике часто переходят от самих выборок к первым разностям, для того, чтобы избавиться от нестационарности. Этот метод использовался в работе. Перейдя к первым разностям, воспользуемся критериями.

Воспользуемся критерием Дики-Фуллера для проверки гипотезы на стационарность. Этот критерий является одним из тестов на единичные корни (Unit root test). Был предложен в 1979 году Дэвидом Дики и Уэйном Фуллером.

За вклад в исследование коинтегрированных процессов с использованием предложенного теста Дики-Фуллера проверки на стационарность, в 2003 году Клайв Грейнджер (Clive Granger) получил Нобелевскую премию по экономике.

Пусть временной ряд x_t представим в виде:

$$x_t = ax_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t - \text{ошибки.}$$

Имеется 2 гипотезы:

H0: процесс с единичным корнем, т.е. $a = 1$ (ряд не стационарен);

H1: $a < 1$ (ряд стационарен).

Для финансово-экономических процессов значение $a > 1$ не свойственно. Возникновение таких процессов маловероятно, так как финансово-экономическая среда достаточно инерционная, что не позволяет принимать бесконечно большие значения за малые промежутки времени.

Статистика теста (DF-статистика) – это обычная t -статистика для проверки значимости коэффициентов линейной регрессии. Однако, распределение данной статистики отличается от классического распределения t -статистики (распределение Стьюдента или асимптотическое нормальное распределение). Распределение DF-статистики выражается через винеровский процесс и называется распределением Дики-Фуллера.

Статистика критерия:

$$DF = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{m}}{s^2}$$

имеет распределение Стьюдента с $m - 1$ степенями свободы, где

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i - \text{выборочное среднее,}$$

$$s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 - \text{выборочная дисперсия.}$$

Критические значения DF-статистики берутся из специальной таблицы Дики-Фуллера (МакКиннона). Если значение статистики лежит левее критического значения (критические значения - отрицательные) при данном уровне значимости, то нулевая гипотеза о единичном корне отклоняется и процесс признается стационарным. В противном случае гипотеза не отвергается и процесс может содержать единичные корни, то есть быть нестационарным временным рядом.

Для расчетов данных была использована встроенная функция `adftest` пакета MATLAB. Были получены следующие результаты: была принята гипотеза о том, что все временные ряды являются стационарными.

Критерий KPSS назван по первым буквам ученых Квятковский-Филлипс-Шмидт-Шин (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin), которые ввели его в 1992 году.

Пусть рассматриваемый ряд имеет вид:

$$x_t = c_t + d_t + \varepsilon_t,$$

$$c_t = c_{t-1} + u_t,$$

где

d – коэффициент тренда,

ε_t – некоторый стационарный процесс,

u_t – некоторый независимый и одинаково распределенный с ε_t процесс с математическим ожиданием 0 и дисперсией δ^2 .

Выдвигаются две конкурирующие гипотезы:

H_0 : временной ряд является стационарным (аналогично $\delta^2 = 0$);

H_1 : временной ряд не является стационарным.

Статистика критерия:

$$\frac{\sum_{i=0}^T S_i^2}{s^2 T^2},$$

где

T – размер выборки,

$S_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$ – стандартная ошибка в форме Ньюи-Веста (Newey-West estimate) [7].

Для расчетов данных была использована встроенная функция `kpsstest` пакета MATLAB. Были получены следующие результаты: была принята гипотеза о том, что все временные ряды являются стационарными. Т.е. результаты те же, что и в предыдущем методе.

Стационарность первых разностей временных рядов не была опровергнута двумя различными критериями, поэтому далее подбирались ARMA модели с различными параметрами. Были построены модели ARMA(1,0), ARMA(1,1), ARMA(2,0), ARMA(0,1) для каждой выборки.

Далее были приведены только те модели, которые визуально описывали данные лучше, чем остальные. Для первых разностей курса тенге была выбрана модель ARMA(1,0):

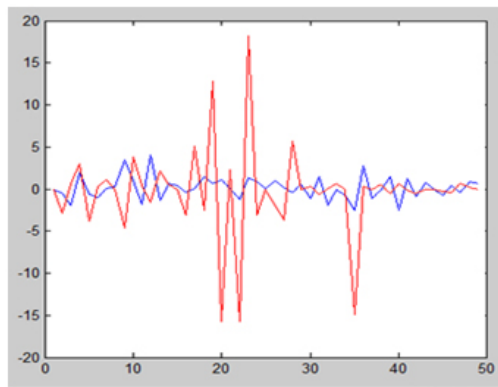


Рис. 1. Модель ARMA(1,0) для временного ряда курса тенге

На рисунке 1 ARMA модель изображена синим цветом и имеет вид:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Далее строим модель ARMA(2,0) для первых разностей курса рубля:

На графике ARMA модель также отмечена синим цветом, и имеет вид:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Строим модель ARMA(0,1) для первых разностей стоимости нефти:

Вид модели ARMA(0,1):

$$x_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon(t-1).$$

Можно сделать вывод, что модели не очень хорошо описывают участки с высокой волатильностью, но динамика сохраняется.

Таким образом, имеем следующие результаты:

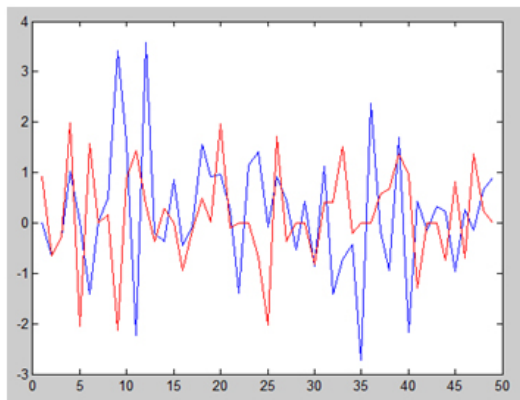


Рис. 2. Модель $ARMA(2,0)$ для временного ряда курса рубля

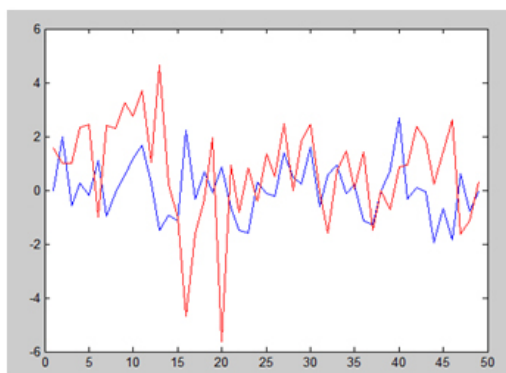


Рис. 3. Модель $ARMA(0,1)$ для стоимости за баррель нефти

1. Проверена стационарность первых разностей выборок двумя критериями. Оба критерия приняли гипотезу о стационарности.

2. Подобраны линейные стохастические модели типа $ARMA(p,q)$ для курса тенге, курса рубля и стоимости за баррель нефти.

Литература

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 756 с.

2. История казахстанской нефтяной отрасли [Электронный ресурс]: - URL: <http://www.neftegaz.kz/analitik-articles/istoriya-kazaxstanskoj-neftyanoj-otrasli.html>

3. Критерий KPSS [Электронный ресурс]: - URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=B9_KPSS (Дата обращения: 11.12.2015).

4. Курс доллара США к казахскому тенге [Электронный ресурс]: - URL: <http://bankir.ru/kurs/dollar-ssha-k-kazahskij-tenge>

5. Курс доллара и евро [Электронный ресурс]: - URL: http://www.consultant.ru/law/ref/stavki/kurs-dollar-euro-2015/?utm_campaign=popular&utm_source=google.adwords&utm_medium=cpc&utm_content=kurs2015&gclid=CjwKEAjw0q2pBRC3jrb24JjE8VgSJAAYIzAd59_QgLpJLkN51J_mN-brXc0zEpvQsLWuy4b6-59XxoCs7_w_wcB

6. Нефтетранспортная территория [Электронный ресурс]: - URL: <http://www.nefttrans.ru/info/quotes/index.php>

7. Стандартные ошибка в форме Ньюи-Уеста [Электронный ресурс]: - URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%>

8. Суслов В.И. Эконометрия. М.: СО РАН, 2005. 744 с.

9. Тест Дики-Фуллера [Электронный ресурс]: - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%81%D1%82_%D0%94%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%E2%80%94