Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

7. Bushlanov I. V., Gortsev A. M., Nezhel'skaya L. A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. – 2008. – Vol. 69, № 9. – P. 1517–1533.
8. Vasil'eva L. A., Gortsev A. M. Dead-time interval estimation of incompletely observable asynchronous bistochastic flow of events // Avtomatika i Telemekhanika. – 2003. – № 12. – P. 69–79.
9. Vasil'eva L. A., Gortsev A. M. Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability // Avtomatika i Telemekhanika. – 2002. – № 3. – P. 179–184.
10. Апанасович В. В., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во "Университетское", 1988. – 254с.
11. Gortsev A. M., Nezhelskaya L. A., Soloviev A. A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, № 8. – P. 1316–1326.
12. Горцев А. М., Ниссенбаум О. В. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного ниверситета. – 2004. – № 284. – С. 137–145.
13. Gortsev A. M., Nezhel'skaya L. A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. – 2004. – №. 10. – P. 8–16.
14. Горцев А. М., Калягин А. А., Нежельская Л. А. Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщённом полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного ниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (30). – С. 27–37.
15. Горцев А. М., Леонова М. А., Нежельская Л. А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мёртвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного ниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 32–42.
16. Леонова М. А., Нежельская Л. А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2(23). – С. 54–63.

DOI: 10.17223/9785751124335/27

КВАЗИГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ, ГАММА- И ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЛИНЕЙНЫХ RQ-СИСТЕМ

Е. А. Фёдорова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Исследования систем массового обслуживания с повторными вызовами, или RQ-систем (Retrial queueing systems) [1, 2], имеют большой интерес в современном мире. С помощью них решаются задачи, возникающие в системах передачи информации, сетях сотовой связи, call-центров и т.д. Однако аналитических результатов анализа RQ-систем известно немного, тем более для многолинейных моделей.

В работе [3] были предложены универсальные методы квазигеометрической и гамма-аппроксимации для анализа однолинейных RQ-систем, требующие для своего применения лишь известные моменты первого и второго порядков. В данной работе предлагается расширить область применимости исследований в виде использования указанных методов для многолинейных RQ-систем.

Математическая модель

Рассмотрим (рис. 1) многолинейную RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ, время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Если поступившая заявка застает один из приборов свободным, то она занимает его для обслуживания. Если все приборы заняты, то заявка переходит в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой получить обслуживание. Если есть свободный прибор, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае она мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов в такой системе.

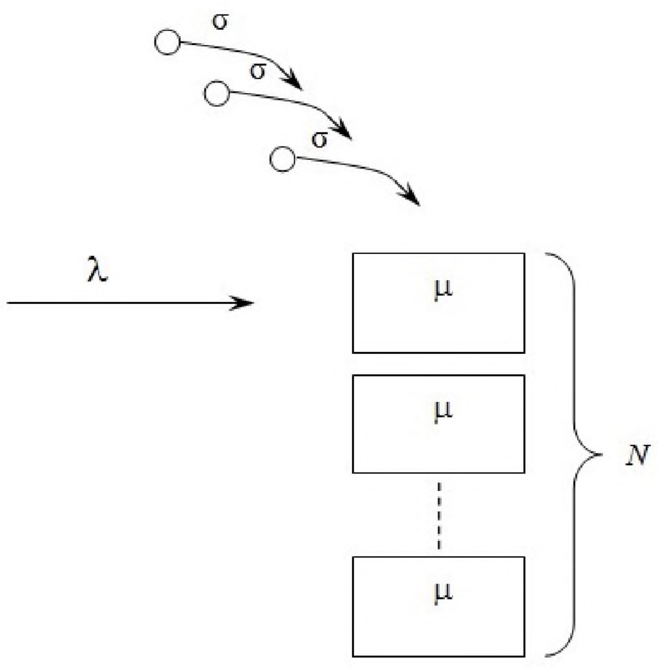

Рис. 1. RQ-система M|M|N

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен},\\ 1, \text{ если 1 прибор занят},\\ 2, \text{ если 2 прибора заняты},\\ \dots\\ N, \text{ если все приборы заняты.}\end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t)=k,\ i(t)=i\}=P(k,i,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Для распределения вероятностей $P(k,i,t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме имеет вид

$$\begin{cases}-(\lambda+i\sigma)P(0,i)+\mu P(1,i)=0,\\ -(\lambda+k\mu+i\sigma)P(k,i)+\lambda P(k-1,i)+(i+1)\sigma\cdot P(k-1,i+1)+\\ +(k+1)\mu P(k+1,i)=0, \text{ для } k=\overline{1,N-1}\\ -(\lambda+N\mu)P(N,i)+\lambda P(N-1,i)+(i+1)\sigma\cdot P(N-1,i+1)+\\ +\lambda P(N,i-1)=0.\end{cases} \tag{1}$$

где $P(k,i)=\lim\limits_{t\to\infty}P(k,i,t)$.

Аналитически решить систему (1) не представляется возможным.

Данная система может быть решена численно (например, с помощью мегаматричного алгоритма [4]), но очевидно, что при больших значениях I_{max} погрешность любых численных методов возрастает, а также возникают проблемы с реализацией алгоритмов на ЭВМ.

Однако можно предложить приближенные методы нахождения $P(i)$, например, метод асимптотического анализа [5], или методы квазигеометрической и гамма-аппроксимаций [3], которые были разработаны для однолинейных RQ-систем.

Гамма-аппроксимация

Метод гамма аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ заключается в построении аппроксимирующего дискретного аналога $G(i)$ гамма распределения [3], параметры которого вычислены путем приравнивания моментов первого и второго порядков распределения $P(i)$ и $G(i)$ следующим образом:

$$\alpha=\frac{\mathrm{E}\{i(t)\}}{\operatorname{var}\{i(t)\}},\ \beta=\frac{\mathrm{E}^2\{i(t)\}}{\operatorname{var}\{i(t)\}},$$

где $E\{i(t)\}$ - математическое ожидание, а $\operatorname{var}\{i(t)\}$ - дисперсия распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ или их оценки, полученные с помощью статистических методов.

Проведенный численный анализ результатов гамма-аппроксимации для различных параметров системы позволил сделать выводы об области применимости (в табл. 1 представлены результаты для N=10), в качестве критерия приемлемости результатов было выбрано соотношение $\Delta \leq 0{,}05$, где Δ – расстояние Колмогорова между аппроксимирующим и точным распределениями.

Таблица 1. Область применимости метода гамма-аппроксимации

Значения параметра задержки σ	Значения загрузки ρ
σ=0,01	ρ≤0,7
σ=0,1	ρ<0,.4 или ρ≥0,7
σ=0,5	ρ≤0,5 или ρ≥0,8
σ=1	ρ≤0,5 или ρ>0,9
σ=2	ρ<0,6 или ρ≥0,9
σ=10	ρ≤0,9

Квазигеометрическая аппроксимация

Метод квазигеометрической аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ заключается в построении аппроксимирующего квазигеометрического распределения $Qg(i)$ [6], параметры которого вычислены путем приравнивания моментов первого и второго порядков распределения $P(i)$ и $Qg(i)$ следующим образом:

$$\delta = \frac{\mathrm{var}\{i(t)\}}{2\cdot \mathrm{E}\{i(t)\} + \mathrm{var}\{i(t)\}} \text{ и } p_0 = 1-(1-\delta)\,\mathrm{E}\{i(t)\}. \qquad (2)$$

Заметим, что величина p_0, определяемая по формуле (2), может оказаться отрицательной, в таких случаях мы будем полагать p_0=0.

В результате численного анализа результатов гамма-аппроксимации для различных параметров системы была составлена следующая таблица области применимости метода гамма аппроксимации для $N=10$ (табл. 2).

Таблица 2. Область применимости квазигеометрической аппроксимации

Значения параметра задержки σ	Значения загрузки ρ
σ=0,01	ρ≤0,4
σ=0,1	ρ<0,5
σ=0,5	ρ<0,7
σ=1	ρ≤0,7
σ=2	ρ<0,8
σ=10	ρ≤0,8

Гауссовская аппроксимация

В литературе показано [7], что в условии большой задержки (σ→0) асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в ИПВ в различных RQ-системах имеет вид нормального распределения.

В связи с этим в данной работе предлагается построить диалог гауссовской аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ с целью расширить область применения.

Метод гауссовской аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ заключается в построении аппроксимирующего дискретного аналога гауссовского распределения $Gs(i)$, параметры которого вычислены путем приравнивания моментов первого и второго порядков распределения $P(i)$ и $Gs(i)$.

В результате численного анализа результатов гамма-аппроксимации для различных параметров системы была составлена следующая таблица области применимости метода гамма-аппроксимации для $N=10$ (табл. 3).

Таблица 3. Область применимости квазигеометрической аппроксимации

Значения параметра задержки σ	Значения загрузки ρ
σ=0,001	ρ<0,2 или ρ≥0,5
σ=0,01	ρ≤0,1 или ρ≥0,5
σ=0,1	ρ≤0,6 или ρ≥0,9

Заключение

Обобщая табл. 1–3, можно составить общую таблицу о принятии решения, аппроксимацию какого типа необходимо использовать для соответствующего набора параметров (табл. 4).

Таблица 4. Принятие решения о выборе метода аппроксимации

Значения параметров системы	σ=0.001	σ=0.01	σ=0.1	σ=0.5	σ=1	σ=2	σ=10
ρ=0.1	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$
ρ=0.3	$Gs(i)$	$G(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$
ρ=0.5	$Gs(i)$	$Gs(i)$	$G(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$
ρ=0.8	$Gs(i)$	$Gs(i)$	$G(i)$		$Qg(i)$	$Qg(i)$	$Qg(i)$
ρ=0.9	$Gs(i)$	$Gs(i)$	$G(i)$	$G(i)$	$G(i)$	$G(i)$	$G(i)$
ρ=0.95	$Gs(i)$	$Gs(i)$	$Gs(i)$	$G(i)$	$G(i)$	$G(i)$	$G(i)$

Как видно из таблицы, совокупность предложенных аппроксимаций покрывает практически весь спектр значений параметров системы. Кроме того, область применения предложенных методов для систем с несколькими приборами значительно шире, чем для однолинейных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

Литература

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Springer, 2008.

2. Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997.

3. Fedorova E. Quasi-geometric and gamma approximation for retrial queueing systems / A. Dudin et al (Eds.) // Information Technologies and Mathematical Modelling. – CCIS 487. – Springer International Publishing Switzerland, 2014. – P. 123–136.

4. Фёдорова Е. А., Назаров А. А. Численные методы исследования RQ-систем с входящим MMPP-потоком // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: матер. Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск (23–26 февраля 2015 г.). – Минск: РИВШ, 2015. – С. 338–342.

5. Моисеева Е. А., Назаров А. А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – Т. 25, № 4. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – С. 84–94.

6. Любина Т. В., Назаров А. А. Немарковская динамическая RQ-система с входящим MMP-потоком заявок // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 7. – С. 89–101.

7. Nazarov A., Chernikova Y. Gaussian approximations of probabilities distribution of states of the retrial queueing system with r-persistent exclusion of alternative customers // A. Dudin et al (Eds.) // Information Technologies and Mathematical Modelling. – CCIS 564. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 200–209.

DOI: 10.17223/9785751124335/28

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ-ЗАПАСАНИЯ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ ЗАПАСОВ

М. О. Шахмалыев

Национальная Академия Авиации, Баку, Азербайджан

Предложены модели систем обслуживания-запасания при наличии ограниченной или неограниченной очереди нетерпеливих расходующих заявок, в которых время жизни запасов является конечным. Разработаны точный и приближенный методы расчета характеристик предложенных моделей. Даны результаты численных экспериментов.

Введение. Для повышения адекватности моделей систем обслуживания-запасания (Queueing-Inventory Systems, QIS) необходимо учитывать время жизни ее запасов, так как во многих QIS время жизни запасов является конечным (Perishable Inventory Systems, PIS) [1–4]. Кроме того, в ряде реальных PIS расходующие заявки (*p*-заявки) в очереди являются нетерпеливыми. Исходя из этих обстоятельств, в данной работе предложена новая модель PIS, в которой учитываются указанные особенности реальных систем и предложены методы их точного и асимптотического анализа.

Описание моделей QIS. Система имеет склад ограниченного объема S. В эту систему поступает пуассоновский поток *p*-заявок с интенсивностью λ. Для простоты изложения, предположим, что каждая *p*-заявка требует ресурса единичного размера. Время обслуживания *p*-заявок является случайной величиной, имеющей экспоненциальную ф.р. с параметром μ. После завершения обслуживания *p*-заявки уровень ресурсов на складе системы уменьшается на единицу. Отметим, что ресурсы системы не являются долговечными; иными словами, каждая единица ресурсов системы ста-