Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

$$\mathbf{F}(y,v,t)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{\kappa t\left(e^{jv}-1\right)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}. \qquad (5)$$

Полагая в (5) y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания:

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=\mathbf{H}(0,v,t)\mathbf{E}=\mathbf{F}(0,v,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, в настоящей работе получена асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока обращений при условии растущего времени обслуживания и предельно редких изменениях состояний входящего потока в бесконечнолинейной СМО с входящим MMPP-потоком и обратной связью.

Литература

1. Назаров А. А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

2. Назаров А. А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

3. Жидкова Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1 (26). – С. 53–62.

4. Pekoz E. A., Joglekar N. Poisson traffic flow in a general feedback // Appl. Probab. – 2002. – № 39(3). – P. 630–636.

5. Melikov A. Z. Calculation of the characteristics of multichannel queuing system with pure losses and feedback / A. Z. Melikov, L. A. Ponomarenko, K. H. N. Kuliyeva // J. Autom. Inf. Sci. – 2015. – № 47(5). – P. 19–29.

DOI: 10.17223/9785751124335/18

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С МАРКОВСКИМ МОДУЛИРОВАННЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

С. П. Моисеева, О. В. Суворова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Введение

Примерами современных приложений ТМО являются исследования математических моделей демографических процессов [1], торговых и страховых компаний [2, 3], пенсионных фондов [4]. В настоящей работе рассматривается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с входящим марковским модулированным потоком с интенсивностью, зависящей от числа занятых приборов. В качестве примера применения таких моделей можно рассмотреть страховую компанию. Число потенциальных клиентов любой страховой компании в общем случае является неограниченным. Клиенты, желающие заключить договор страхования, обращаются в страховую компанию независимо друг от друга с некоторой интенсивностью. Кроме того, каждый клиент с некоторой вероятностью рекомендует своим знакомым обратиться в ту же компанию, услугами которой он пользуется. Таким образом, наблюдается эффект «неявной рекламы». То есть общая интенсивность может зависеть от числа клиентов компании. Время, на которое заключается договор страхования, является случайной величиной.

Математическая модель марковского модулированного потока с переменной интенсивностью

Случайным потоком однородных событий называется последовательность моментов наступления рассматриваемых событий [5].

Также случайный поток однородных событий определяется в виде случайного процесса $m(t)$ – числа событий рассматриваемого потока, которые наступили за время t , то есть на интервале $[0,t)$ [6, 7].

Д. Коксом [8] были рассмотрены потоки однородных событий с интенсивностью, зависящей от состояний управляющего потоком процесса (дважды стохастические потоки). Наиболее распространенными случаями являются MAP-потоки и его частный случай – марковский модулированный пуассоновский поток событий (MMPP-поток).

Рассмотрим класс модулированных пуассоновских потоков. Такие потоки в литературе также называют дважды стохастическими потоками [8, 9].

Пусть задан случайный процесс $k(t)=1,2,...,K$ и множество неотрицательных чисел $\lambda_k \geq 0$.

Случайный поток однородных событий называется модулированным пуассоновским (MP-потоком), управляемым случайным процессом $k(t)$, если выполнены условия

$$P\{m(t+\Delta t)=m+1 \mid m(t)=m, k(t)=k\}=\lambda_k \Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{m(t+\Delta t)>m+1 \mid m(t)=m, k(t)=k\}=o(\Delta t).$$

Если случайный процесс $k(t)=1,2,...,K$ – цепь Маркова, то поток называется марковским модулированным пуассоновским (MMPP-потоком).

Определение. Случайный поток однородных событий будем называть марковским модулированным потоком с переменной интенсивностью (MMP(i)), если управляющий процесс $k(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем с конечным множеством состояний $k(t)=k=1,2,...,K$, определяемой матрицей её инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\lfloor q_{k_1k_2} \rfloor, k_1,k_2=1,2,...,K$, и выполнены условия

$$P\{m(t+\Delta t)=m+1 \mid m(t)=m, k(t)=k\}=\lambda_k(i)\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\lambda_k(i) = a_k + b_k i,$$
$$P\{m(t+\Delta t) > m+1 \mid m(t) = m, k(t) = k\} = o(\Delta t). \qquad (1)$$

Таким образом, марковский модулированный поток с переменной интенсивностью определяется эргодичной цепью Маркова $k(t)$, которая задана матрицей $\mathbf{Q} = \lfloor q_{k_1 k_2} \rfloor, k_1, k_2 = 1,2,...,K$ – матрицей ее инфинитезимальных характеристик и матрицей интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_k); k = \overline{1,K}$, где $\lambda_k(i) = a_k + b_k i \geq 0$.

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_k \end{pmatrix}$.

Математическая модель СМО MMP(i)|M|∞ с интенсивностью входящего потока вида $\lambda_k(i) = a_k + b_k i$

Рассмотрим систему массового обслуживания (рис. 1), на вход которой подается марковский модулированный поток заявок, заданный матрицей её инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \lfloor q_{k_1 k_2} \rfloor$, $k_1, k_2 = 1,2,...,K$, и матрицей интенсивностей вида $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A} + \mathbf{B}i$.

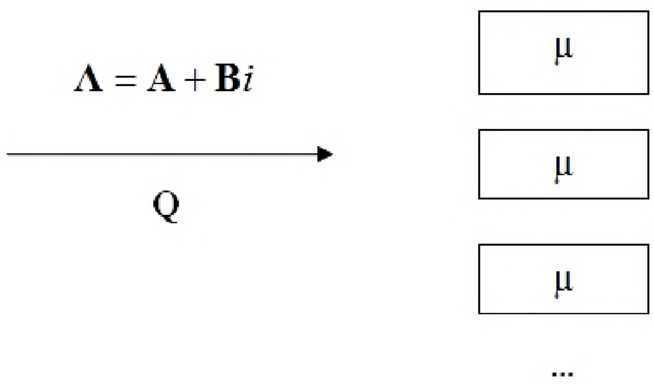

Рис. 1. СМО с интенсивностью входящего марковского модулированного потока, зависящей от числа приборов в системе

Время обслуживания будем считать случайной величиной с функцией распределения вероятностей $A(x) = 1 - e^{-\mu x}$. То есть дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка занимает любой из свободных приборов в системе, на котором выполняется ее обслуживание, в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Процесс $i(t)$ характеризует число занятых приборов в системе в момент времени t. Ставится задача исследования характеристик случайного процесса $i(t)$.–

Пусть существует стационарный режим функционирования системы. Тогда стационарное распределение вероятностей значений процесса $i(t)$ обозначим в виде

$$\Pi(i) = P\{i(t) = i\}. \tag{2}$$

В случае непуассоновского входящего потока процесс $i(t)$ является немарковским. Поэтому будем рассматривать двумерный случай процесс $\{k(t), i(t)\}$, который является цепью Маркова.

С помощью применения методов исследования марковских процессов найдем совместное стационарное распределение вероятностей вида

$$P(k,i) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}.$$

Используя условие согласованности, получим одномерное маргинальное распределение

$$\Pi(i) = \sum_k P(k,i).$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Процесс $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, поэтому для распределения вероятностей

$$P(k,i,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}$$

запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} P(k,i,t+\Delta t) &= P(k,i,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1-i\mu\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) + \\ &+ P(k,i-1,t)\lambda_k\Delta t + P(k,i+,t)(i+1)\mu\Delta t + \sum_{\nu\neq k} P(\nu,i,t)q_{\nu k}\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda_k(i) = a_k + b_k i$.

Для (3) получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k,i,t)}{\partial t} &= -P(k,i,t)a_k - P(k,i,t)b_k i - P(k,i,t)i\mu + P(k,i,t)q_{kk} + \\ &+ P(k,i-1,t)a_k + P(k,i-1,t)b_k i + P(k,i+,t)(i+1)\mu + \sum_{\nu\neq k} P(\nu,i,t)q_{\nu k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для стационарного распределения $P(k,i)$ систему (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} &-P(k,i)a_k - P(k,i)b_k i - P(k,i)i\mu + P(k,i-1)a_k + P(k,i-1)b_k i + \\ &+ P(k,i+1)(i+1)\mu + \sum_{\nu} P(\nu,i)q_{\nu k} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Метод характеристических функций

Введем частичные характеристические функции

$$H(k,u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k,i) \tag{6}$$

и примем во внимание то, что

$$\frac{\partial H(k,u)}{\partial u} = j\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} iP(k,i).$$

Тогда из (5) для функций $H(k,u)$ получим систему уравнений:

$$j\left[\mu(e^{-ju}-1)+b_k(e^{ju}-1)\right]\frac{\partial H(k,u)}{\partial u} = \left[a_k(e^{ju}-1)\right]H(k,u)+\sum_{\nu} H(\nu,u)q_{\nu k}. \quad (7)$$

Систему (7) запишем в матричной форме, обозначив вектор-строку

$$\mathbf{H}(u) = \{H(1,u), H(2,u),...\}$$

и следующие матрицы:

Q – матрица инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$;

A – диагональная матрица с элементами a_k по главной диагонали;

B – диагональная матрица с элементами b_k по главной диагонали.

Тогда систему (7) запишем в виде матричного дифференциального уравнения

$$j\left[\mu(e^{-ju}-1)\mathbf{I}+(e^{ju}-1)\mathbf{B}\right]\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u)\left[(e^{ju}-1)\mathbf{A}+\mathbf{Q}\right]. \quad (8)$$

После нахождения решения $\mathbf{H}(u)$ этого уравнения характеристическую функцию числа приборов, занятых в системе обслуживания, можно записать в следующем виде:

$$Me^{jui(t)} = \mathbf{H}(u)\mathbf{E}. \quad (9)$$

Уравнение (8) позволяет найти и другие характеристики рассматриваемой системы обслуживания, например моменты любого порядка для числа занятых приборов.

В работе показано, что моменты первого и второго порядков числа занятых приборов в системе определяются выражениями

$$m_1 = Mi(t) = \mathbf{m_1 E} = -\mathbf{R}(\mathbf{B}-\mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{AE},$$

$$m_2 = Mi^2(t) = -\mathbf{R}(2\mathbf{B}-2\mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}\left\{(-\mathbf{B}-\mathbf{Q}+\mu\mathbf{I})^{-1}(2\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mu\mathbf{I})\mathbf{E}+\mathbf{E}\right\}.$$

Численные примеры

Пусть заданы следующие характеристики системы для входящего марковского модулированного потока заявок:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 2.5 & 2.5 & -5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix}.$$

Продолжительность обслуживания распределена по экспоненциальному закону с параметром $\mu = 0{,}6$.

Ставится задача нахождения среднего числа заявок в системе и дисперсии числа заявок.

В таблице представлены результаты численного анализа при увеличении матрицы $\mathbf{A}$ в 1, 10, 20 и 100 раз соответственно.

Результаты численного анализа

N	1	10	20	100
Среднее число заявок в системе	5.365	53.647	107.295	1471
Дисперсия числа заявок в системе	6.351	48.999	67.783	159

Заключение

Таким образом, в качестве математической модели рассмотрена система массового обслуживания, на вход которой подается марковский модулированный поток заявок с матрицей интенсивностей вида $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A} + \mathbf{B}i$, с помощью метода характеристических функций определены выражения для вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе в стационарном режиме.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 1.511.2014/К.

Литература

1. Моисеева С. П., Захорольная И. А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 51–58.

2. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004.– 180 с.

3. Назаров А. А., Даммер Д. Д. Исследование числа требований на страховые выплаты в компании с произвольной величиной продолжительности договора // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – №2(15). – С. 24-32.

4. Гарайшина И. Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования: дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Томск, 2005. – 148 с.

5. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

6. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин / – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 520 с.

7. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.

8. Cox D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the in-elusion of supplementary variables // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – Vol. 51. – № 3. – P. 433–441.

9. Моисеева С. П. Теория случайных процессов. –Томск : Издательский Дом Томского государственного университета. 2014. – 57 с.