Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

DOI: 10.17223/9785751124335/17

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СУММАРНОГО ПОТОКА В СИСТЕМЕ MMPP|M|∞ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С. П. Моисеева, Л. А. Задиранова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Развитие телекоммуникационных и информационно-вычислительных систем порождает необходимость создания технических решений, которые позволят обеспечить оптимальное использование и управление данными ресурсами.

Известно, что системы массового обслуживания (СМО) используются для описания информационных потоков в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах, однако использование пуассоновского потока в качестве входящего дает большую погрешность при расчете характеристик качества обслуживания и рекомендуется использовать модели модулированных потоков.

В данной работе проводится исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с входящим марковским модулированным пуассоновским потоком и обратной связью [4, 5].

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный пуассоновский поток (*MMPP*), управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \ldots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, K$, и матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = diag[\lambda_k], k = \overline{1, K}$ [3].

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1 - r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается в нее для повторного обслуживания.

Ставится задача исследования потока заявок, обратившихся в рассматриваемую систему за время t как для первичного обслуживания, так и для повторного (суммарный поток обращений).

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t, $m(t)$ – число заявок суммарного потока, обратившихся в систему за время t, $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова. Трехмерный процесс $\{k(t), i(t), m(t)\}$ является марковским.

Для распределения вероятностей $P(k,i,m,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, m(t) = m\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P(k,i,n,t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k,i,n,t) - i\mu P(k,i,n,t) + \lambda_k P(k,i-1,n,t) +$$
$$+\mu(1-r)(1+i)P(k,i+1,n,t) + \mu i r P(k,i,n-1,t) + \sum P(\nu,i,n,t) q_{\nu k}, \tag{1}$$
$k,v = 1, 2, \ldots, K,\ i = \overline{0,\infty}, m = \overline{0,\infty}$.

Введя частичные характеристические функции [1]

$$H(k,u,v,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{jui} e^{jvm} P(k,i,m,t),$$

запишем систему (1) в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,v,t)}{\partial t} + j\mu(re^{jv} - 1 + (1-r)e^{-ju})\frac{\partial \mathbf{H}(u,v,t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u,v,t)[(e^{j(u+v)} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \tag{2}$$

где

$$\mathbf{H}(u,w,t) = [H(1,u,w,t), H(2,u,w,t), \ldots, H(K,u,w,t)],$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K} \\ . & . & . & . \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему $MMPP|M|\infty$ при условии растущего времени обслуживания [2] и предельно редких изменений состояний входящего потока. Зафиксируем некоторую матрицу инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$. Положим, что S – некоторая положительная величина, при этом

$$\mathbf{Q} = S \cdot \mathbf{Q}^{(1)}.$$

Очевидно, что стационарные распределения вероятностей состояний управляющей цепи $k(t)$, заданной матрицами инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}^{(1)}$ и $\mathbf{Q}$=S $\mathbf{Q}^{(1)}$, совпадают (не зависят от S). Но при уменьшении значений параметра S интенсивности перехода цепи Маркова $k(t)$ из одного состояния в другое уменьшаются, что соответствует условию предельно редких изменений состояния потока.

Теорема. Пусть $\mathbf{R} = [R(1), R(2), \ldots, R(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяется решением системы уравнений $\begin{cases} \mathbf{RE} = 1 \\ \mathbf{RQ} = 0 \end{cases}$, вектор-функция $\mathbf{H}(u,v,t) = [H(1,u,v,t), H(2,u,v,t), \ldots, H(K,u,v,t)]$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (2).

Тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока $h(v,t) = M\left\{e^{jvm(t)}\right\}$ при условии растущего времени обслуживания и предельно редких изменениях состояний входящего потока имеет вид

$$h(v,t)=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\},\ \kappa=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}.$$

Доказательство.

Обозначим

$$\mu=\varepsilon,\ u=\varepsilon y,\ S=\varepsilon,\ H\left(u,v,t\right)=F\left(y,v,t,\varepsilon\right).$$

Перепишем уравнение (2) с учетом введенных обозначений

$$\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t}=j\varepsilon\left(1-(1-r)e^{-jy\varepsilon}-re^{jv}\right)\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\varepsilon\cdot\partial y}+$$
$$+\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)\left(\mathbf{\Lambda}\left(e^{j(\varepsilon y+v)}-1\right)+S\mathbf{Q}^{(1)}\right). \tag{3}$$

Полагая $\varepsilon\to 0$, получим систему

$$\mathbf{F}(y,v,t)\mathbf{Q}^{(1)}=0, \tag{4}$$

решение которой имеет вид

$$\mathbf{F}(y,v,t)=\mathbf{R}\cdot\Phi(y,v,t),$$

где $\mathbf{R}$ – вектор стационарного распределения состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, а $\Phi(y, v, t)$ – некоторая скалярная функция. Для определения вида этой функции умножим справа уравнение (3) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}$ соответствующей размерности

$$\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial t}\mathbf{E}=j\left(1-(1-r)e^{-jy\varepsilon}-re^{jv}\right)\frac{\partial\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)}{\partial y}\mathbf{E}+$$
$$+\mathbf{F}(y,v,t,\varepsilon)\left(\mathbf{\Lambda}\left(e^{j(\varepsilon y+v)}-1\right)+S\mathbf{Q}^{(1)}\right)\mathbf{E}.$$

Выполняя в полученном уравнении предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и учитывая вид решения (4), имеем уравнение дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial\Phi(y,v,t)}{\partial t}=jr\left(1-e^{jv}\right)\frac{\partial\Phi(y,v,t)}{\partial y}+\Phi(y,v,t)\kappa\left(e^{jv}-1\right).$$

Запишем соответствующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy}{jr\left(1-e^{jv}\right)}=\frac{d\Phi(y,v,t)}{\kappa\left(e^{jv}-1\right)\Phi(y,v,t)},$$

решая которую с учетом начального условия $\Phi(y,v,0)=\Phi(y)=\exp\left\{\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}$ [3], имеем

$$\Phi(y,v,t)=\exp\left\{\frac{\kappa t\left(e^{jv}-1\right)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\},$$

следовательно, решение уравнения (3) имеет вид

$$\mathbf{F}(y,v,t)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{\kappa t\left(e^{jv}-1\right)}{1-r}+\frac{j\kappa y}{1-r}\right\}. \quad (5)$$

Полагая в (5) y=0, имеем асимптотическое приближение характеристической функции суммарного числа обращений, поступивших в систему за время t для повторного и первичного обслуживания:

$$h(v,t)=M\{e^{jvm(t)}\}=\mathbf{H}(0,v,t)\mathbf{E}=\mathbf{F}(0,v,t)\mathbf{E}=\exp\left\{\frac{\kappa t(e^{jv}-1)}{1-r}\right\}.$$

Таким образом, в настоящей работе получена асимптотическая характеристическая функция числа заявок суммарного потока обращений при условии растущего времени обслуживания и предельно редких изменениях состояний входящего потока в бесконечнолинейной СМО с входящим ММРР-потоком и обратной связью.

Литература

1. Назаров А. А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

2. Назаров А. А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

3. Жидкова Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1 (26). – С. 53–62.

4. Pekoz E. A., Joglekar N. Poisson traffic flow in a general feedback // Appl. Probab. – 2002. – № 39(3). – P. 630–636.

5. Melikov A. Z. Calculation of the characteristics of multichannel queuing system with pure losses and feedback / A. Z. Melikov, L. A. Ponomarenko, K. H. N. Kuliyeva // J. Autom. Inf. Sci. – 2015. – № 47(5). – P. 19–29.

DOI: 10.17223/9785751124335/18

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С МАРКОВСКИМ МОДУЛИРОВАННЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

С. П. Моисеева, О. В. Суворова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Введение

Примерами современных приложений ТМО являются исследования математических моделей демографических процессов [1], торговых и страховых компаний [2, 3], пенсионных фондов [4]. В настоящей работе рассматривается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с входящим марковским модулированным пото-