Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

12. Kruk J., Dudovskaya Yu. Stationary Distribution Insensitivity of a Closed Multiregime Queueing Network with Non-active Customers // Dudin, A. et al. (eds.) ITMM 2015, CCIS. – LNCS, Springer, Heidelberg, 2015. – Vol. 564. – P. 373–383.
13. Boyarovich J. S., Dudovskaya Yu. Stationary Distribution of a Closed Queueing Network with Non-active Customers and Multimode Service Strategies // Proc. of the National Academy of Sci. of Belarus. Physic and Mathematics series. – 2015. – Vol. 1. – P. 54–57.

DOI: 10.17223/9785751124335/15

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА С ВХОДЯЩИМ MMPP-ПОТОКОМ

Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Введение

Системы и сети массового обслуживания (СМО) играют большую роль при моделировании современных информационно-вычислительных и телекоммуникационных систем [2, 3, 5, 7].

Отдельно можно выделить задачи проектирования информационных систем, где информация передается порциями в виде сообщений случайного объема [1, 2, 10]. В этом случае говорят о системах массового обслуживания с требованиями случайного объема. Несмотря на большой перечень прикладных задач, которые могут быть решены с использованием таких моделей, на сегодняшний день точные аналитические результаты по исследованию объема находящихся требований в системе существуют только для случая пуассоновского входящего потока. Если на вход системы поступает марковский модулированный (MMPP) или рекуррентнтый поток требований, как правило, применяют асимптотические методы исследования [5, 8].

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$ и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ [8]. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v > 0$, $G(y) = P\{v < y\}$ – функция распределения случайного процесса v. Объемы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t; $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t),V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания (метод просеянного потока) [8, 9].

Построим просеянный поток для рассматриваемой СМО MMPP|GI|∞. Для этого зафиксируем некоторый момент времени T. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < T$ с вероятностью

$$S(t) = 1 - B(T-t),$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1-S(t)$ эта заявка не рассматривается.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t. Тогда если в начальный момент $t_0 < T$ система была свободна, то для момента времени T выполняется равенство

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\}.$$

Следует отметить, что использование метода просеянного потока позволяет более точно определить характеристики процесса $V(t)$, так как в просеянном потоке присутствуют только те заявки, которые не закончат обслуживание к моменту времени T.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Введем обозначение $P(k,n,z,t) = P\{k(t) = k, n(t) = n, V(t) < z\}$ – распределение вероятностей трехмерного марковского процесса $\{k(t), n(t), V(t)\}$, где $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени t, $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, $V(t)$ – суммарный объем требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t. Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial t} = \lambda_k S(t)\left[\int\limits_0^z P(k,n-1,z-y,t)dG(y) - P(k,n,z,t)\right] +$$

$$+\sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu,n,z,t),\ k = \overline{1,K},\ n = 0,1,2,\ldots,\ z > 0.$$

Введем частичные характеристические функции вида:

$$H(k,u_1,u_2,t) = M\{\exp(ju_1 n(t) + ju_2 V(t))\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_1 n}\int\limits_0^{\infty} e^{ju_2 z} P(k,n,z,t)dz,$$

$$k = \overline{1,K},\ n = 0,1,2,\ldots,\ z > 0.$$

Введем обозначение

$$G^*(u_2) = \int\limits_0^{\infty} e^{ju_2 y}\, dG(y), \qquad (1)$$

тогда можно записать следующую систему уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda} S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q}\right] \tag{2}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0) = \mathbf{r}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t) = \left[H(1,u_1,u_2,t), H(2,u_1,u_2,t),\ldots, H(K,u_1,u_2,t)\right],$$

$$\mathbf{r} = \left[r(1), r(2),\ldots, r(K)\right],$$

здесь и далее $\mathbf{r}$ – вектор-строка стационарного распределения управляющей цепи Маркова, определяемая системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = 0 \\ \mathbf{re} = 1 \end{cases}, \tag{4}$$

здесь и далее $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (2) не представляется возможным, то для решения задачи (2)–(3) воспользуемся методом асимптотического анализа [4, 8] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [4]. Обозначим $\mathbf{\Lambda} = N\mathbf{\Lambda}^1$, $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}^1$, где $N \to \infty$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda}^1 S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q}^1\right] \tag{5}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0) = \mathbf{r}. \tag{6}$$

Асимптотический анализ первого порядка приведем в виде формулировки следующей леммы.

Лемма. *Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса* $\{k(t), n(t), V(t)\}$ *первого порядка имеет вид*

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t) = \mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\},$$

где вектор-строка $\mathbf{r}$ *определяется системой линейных уравнений* (4), *а* λ *– выражением*

$$\lambda = \mathbf{r}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{e},$$

a_1 *– математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований* $G(y)$.

Асимптотический анализ второго порядка проведем в виде доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса* $\{k(t), n(t), V(t)\}$ *второго порядка имеет вид*

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{r}\exp\left\{N\lambda(ju_1+ju_2a_1)\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\right.$$

$$+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(N\lambda\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+N\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+N\kappa a_1{}^2\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+$$

$$\left.+j^2u_1u_2\left(N\lambda a_1\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+N\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)\right\},\tag{7}$$

где

$$\kappa=2\mathbf{g}\left(\mathbf{\Lambda^1}-\lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{e},\tag{8}$$

а вектор-строка $\mathbf{g}$ *удовлетворяет следующим матричным уравнениям*:

$$\mathbf{gQ^1}=\mathbf{r}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda^1}\right),\ \mathbf{ge}=1.$$

Доказательство.

Обозначим через $\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)$ многомерную функцию, удовлетворяющую выражению

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)\exp\left\{N\lambda(ju_1+ju_2a_1)\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя это выражение в (5) и (6), получим следующую задачу Коши:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)}{\partial t}+\lambda(ju_1+ju_2a_1)S(t)\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)=$$
$$=\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda^1}S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q^1}\right],\tag{9}$$

$$\mathbf{H_2}(u_1,u_2,t_0)=\mathbf{r}.\tag{10}$$

Выполним следующие замены:

$$\varepsilon^2=\frac{1}{N},\ u_1=\varepsilon w_1,\ u_2=\varepsilon w_2,\ \mathbf{H_2}(u_1,u_2,t)=\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t,\varepsilon).\tag{11}$$

С использованием этих обозначений задача (9)–(10) перепишется в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial t}+\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t,\varepsilon)\lambda(j\varepsilon w_1+j\varepsilon w_2a_1)S(t)=$$
$$=\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda^1}S(t)\left(e^{j\varepsilon w_1}G^*(\varepsilon w_2)\right)+\mathbf{Q^1}\right],\tag{12}$$

$$\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t_0,\varepsilon)=\mathbf{r}.\tag{13}$$

Найдем асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ решение этой задачи, то есть $\mathbf{F}_2(w_1,w_2,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_2(w_1,w_2,t,\varepsilon)$.

Этап 1. Выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в задаче (12) – (13), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{F_2}(w_1, w_2, t)\mathbf{Q^1} = 0, \\ \mathbf{F_2}(w_1, w_2, t_0) = \mathbf{r}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (4) следует, что $\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t) = \mathbf{r}\Phi_2(w_1, w_2, t), \tag{14}$$

где $\Phi_2(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(w_1, w_2, t_0) = 1$.

Этап 2. С учетом (14) функцию $\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t)$ представим в виде разложения

$$\mathbf{F_2}(w_1, w_2, t, \varepsilon) = \Phi_2(w_1, w_2, t)[\mathbf{r} + \mathbf{g}(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1)S(t)] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \tag{15}$$

где $\mathbf{g}$ – некоторая вектор-строка, удовлетворяющая условию $\mathbf{ge} = 1$, а $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ – вектор-строка, состоящая из величин порядка малости ε^2. Подставим (15) и разложения

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2),\; e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + O(\varepsilon^2)$$

в (12). Учитывая (1), выполним в полученном равенстве предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим матричное уравнение относительно вектора $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{gQ^1} = \mathbf{r}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda^1}),$$

где $\mathbf{I}$ – диагональная единичная матрица.

Этап 3. Умножая обе части уравнения (12) на вектор $\mathbf{e}$, используя (15) и разложения $e^{j\varepsilon w_1}$, $e^{j\varepsilon w_2}$, в результате несложных преобразований с учетом обозначения (8) получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_2(w_1, w_2, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t)}{\partial t} = \Phi_2(w_1, w_2, t)\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}\left(\lambda S(t) + \kappa S^2(t)\right) + \right.$$
$$+ \frac{(jw_2)^2}{2}\left(\lambda a_2 \int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau + a_1{}^2\kappa \int_{t_0}^{t} S^2(\tau)d\tau\right) +$$
$$\left. + j^2 w_1 w_2 \left(\lambda a_1 \int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau + \kappa a_1 \int_{t_0}^{t} S^2(\tau)d\tau\right)\right\},$$

здесь и далее $a_2 = \int_0^\infty y^2 dG(y)$ – второй начальный момент случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$. Решение уравнения при имеющемся начальном условии $\Phi_2(w_1, w_2, t_0) = 1$ дает выражение, подставляя которое в (14), получаем

$$\mathbf{F_2}(w_1,w_2,t)=\mathbf{r}\exp\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}\left(\lambda\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+\right.$$

$$+\frac{(jw_2)^2}{2}\left(\lambda a_2\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+a_1{}^2\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+ \tag{16}$$

$$\left.+j^2w_1w_2\left(\lambda a_1\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)\right\}.$$

Выполним в выражении (16) замены, обратные к (11), получим выражение для асимптотической характеристической функции $\mathbf{H}(u_1,u_2,t)$ числа событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, и суммарного объема требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t, которое совпадает с (7). *Теорема доказана.*

Литература

1. Александров А. М., Кац Б. А. Обслуживание потоков неоднородных требований // Известия АН СССР. Технич. кибернетика. – 1973. – №2. – С. 47–53.
2. Basharin G. P., Gaidamaka Yu. V., Samouylov K. E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Autom. Control Comp. Sci. – 2013. – Vol. 47, № 2. –P. 62–69.
3. Ивановская И. А., Моисеева С. П. Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // Известия Томского политехнического ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – Т. 317. № 5. – С. 32–34.
4. Моисеев А. Н., Назаров А. А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.
5. Моисеев А. Н. Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP/GI/∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 56–65.
6. Моисеева С. П., Захорольная И. А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. – 2011. – Т.47, № 6. – С. 51–58.
7. Мокров Е. В., Самуйлов К. Е. Модель системы облачных вычислений в виде системы массового обслуживания с несколькими очередями и с групповым поступлением заявок // Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7. – № 11. – С. 139–141.
8. Моисеева С. П. Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. – Томск, 2014. – 280 с.
9. Синякова И. А., Моисеева С. П. Исследование системы MAP(2)|GI2|∞ методом просеянного потока // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – № 1(49). – С. 47–52.
10. Тихоненко О. М. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций. – Минск : БГУ, 2008. – 148 с.