МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–29 апреля 2016 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

Исследование математической модели "хищник-жертва"с учётом внутривидовой конкуренции

Чу А. Р., Михайлов М. Д.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: chu.antoniy@gmail.com

Аннотация

Существует много различных математических моделей, описывающих динамику численности популяций, взаимодействующих по принципу «хищник-жертва». Классическая модель Вольтерра системы «хищник-жертва» с помощью замены из [1] приводится к более простому виду, с меньшим количеством коэффициентов. После чего в полученной модели были учтены условия внутривидовой конкуренции среди хищников и жертв. С помощью «Wolfram Mathematica 9» получена область устойчивости этой модели.

Ключевые слова: математическая модель, внутривидовая конкуренция, хищник-жертва, неявный метод Эйлера, равномерная сетка.

Классическая модель Лотки-Вольтерра [2] описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = au - buv, \\ \dfrac{dv}{dt} = -cu + duv, \end{cases} \tag{1}$$

с соответствующими начальными условиями

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

где u и v – численности популяции жертв и хищников соответственно, a – удельная скорость роста популяции жертв в отсутствие хищников, b — константа, характеризующая скорость потребления популяцией хищников особей популяции жертв, c – удельная скорость смертности хищников, d – константа, характеризующая скорость увеличения численности хищников за счет биомассы потребленных жертв.

В исходной записи (1) система зависит от четырех параметров. Заменой переменных

$$x = \frac{a}{d}u,\ y = \frac{a}{b}v,\ \tau = \frac{t}{a},\ \gamma = \frac{c}{a},$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - uv, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\gamma u + uv, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(0) = u_0,\ v(0) = v_0,$$

в которой всего один параметр γ.

Модифицируем модель (2), учитывая фактор внутривидовой конкуренции среди хищников и жертв соответственно. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - uv - c_1u^2, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\gamma v + uv - c_2v^2, \end{cases} \tag{3}$$

$$u(0) = u_0,\ v(0) = v_0.$$

где c_1, c_2 - удельная скорость смертности жертв и хищников соответственно за счёт внутривидовой конкуренции.

Определим, устойчива ли эта система. Для этого найдём нетривиальные точки стационарного равновесия, приравнивая правые части уравнений системы (3) к нулю:

$$\begin{cases} u(1 - v - c_1u) = 0, \\ v(-\gamma + u - c_2v) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что либо u=0, либо $1 - v - c_1u$=0, или v=0, или $-\gamma + u - c_2v$=0. Если u^*=0, v^*=0, то получаем тривиальное решение. Для нетривиального решения возможны три случая:

$$1.u^* = 0; v^* = \frac{-\gamma}{c_2};$$

$$2.u^* = \frac{1}{c_1}; v^* = 0;$$

$$3.u^* = \frac{c_2 + \gamma}{1 + c_1c_2}; v^* = \frac{1 - \gamma c_1}{1 + c_1c_2};$$

Для исследования устойчивости процессов, описываемых моделью (3) для случая $u^* = \dfrac{c_2+\gamma}{1+c_1c_2}; v^* = \dfrac{1-\gamma c_1}{1+c_1c_2}$; линеаризуем её с помощью формул:

$$\begin{cases} u = u^* + \tilde{u} \\ v = v^* + \tilde{v}; \end{cases} \tag{4}$$

где $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ - малые величины такие, что значением произведений которых, а так же степенями, начиная со второй, можно пренебречь. Подставляя (4) в (3), будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{du^*}{dt} = (u^* + \tilde{u}) - (u^* + \tilde{u})(v^* + \tilde{v}) - c_1(u^* + \tilde{u})^2, \\ \dfrac{dv^*}{dt} = -\gamma(v^* + \tilde{v}) + (u^* + \tilde{u})(v^* + \tilde{v}) - c_2(v^* + \tilde{v})^2. \end{cases}$$

После несложных преобразований система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{dt} = -c_1u^*\tilde{u} - u^*\tilde{v}, \\ \dfrac{d\tilde{v}}{dt} = v^*\tilde{u} - c_2v^*\tilde{v}. \end{cases} \tag{5}$$

Запишем для линеаризованной системы (5) матрицу Якоби:

$$\begin{pmatrix} -c_1u^* & -u^* \\ v^* & -c_2v^* \end{pmatrix}.$$

Определим её собственные значения из характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (c_1u^* + c_2v^*)\lambda + (c_1c_2 + 1)u^*v^* = 0. \tag{6}$$

Запишем корни характеристического уравнения (6)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_1u^* + c_2v^*}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1u^* + c_2v^*)^2}{4} - (c_1c_2 + 1)u^*v^*}. \tag{7}$$

По теореме Виета имеем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(c_1u^* + c_2v^*), \tag{8}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = (c_1c_2 + 1)u^*v^*. \tag{9}$$

Система устойчива, если выполняется одно из двух условий:

1. Корни уравнения (6) комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью (устойчивый фокус).

2. Корни уравнения (6) вещественные, отрицательные (устойчивый узел).

Очевидно, для случая устойчивый фокус требуется, чтобы подкоренное выражение в (7) было меньше нуля, а правые части в (8) и (9) были больше нуля. Запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{(c_1u^*+c_2v^*)^2}{4} - (c_1c_2+1)u^*v^* < 0, \\ c_1u^* + c_2v^* > 0, \\ (c_1c_2+1)u^*v^* > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Полученную систему разрешим с помощью «Wolfram Mathematica 9». Для определения параметров c_1, c_2, γ, фиксируем два параметра (c_1, γ) и находим промежуток изменений c_2. Осуществляем эту процедуру также с помощью «Wolfram Mathematica 9».

Из результатов расчетов видно, что с ростом параметра γ значения c_2 уменьшаются. Таким образом, устанавливаем обратную зависимость значения параметра γ от c_2.

Для решения задачи (3) используем неявный метод Эйлера [4], причём коэффициенты c_1, c_2, γ выбираются из результатов расчетов системы неравенств (10). Результаты представим в виде графиков. На рис. 1 показана зависимость плотности популяции хищников и жертв от времени.

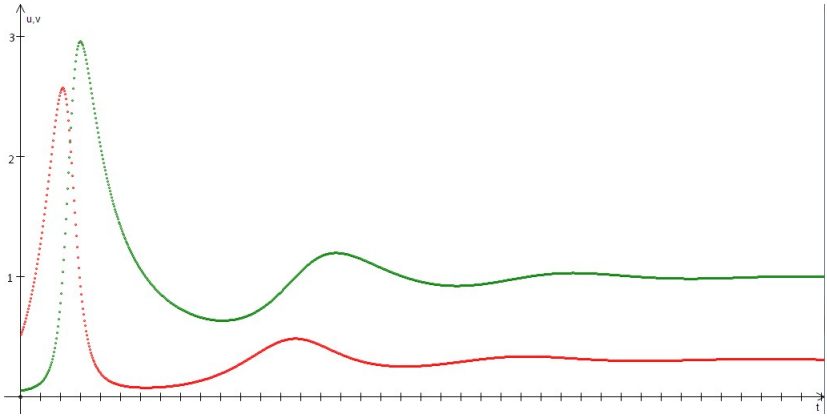


Рис. 1. $\gamma = 0.01, c_1 = 0.01, c_2 = 0.3, u(0) = 0.5, v(0) = 0.05$.

На рис. 2 представлена зависимость плотности популяции хищников и жертв в фазовой плоскости. В качестве начальных данных

берутся те же значения.

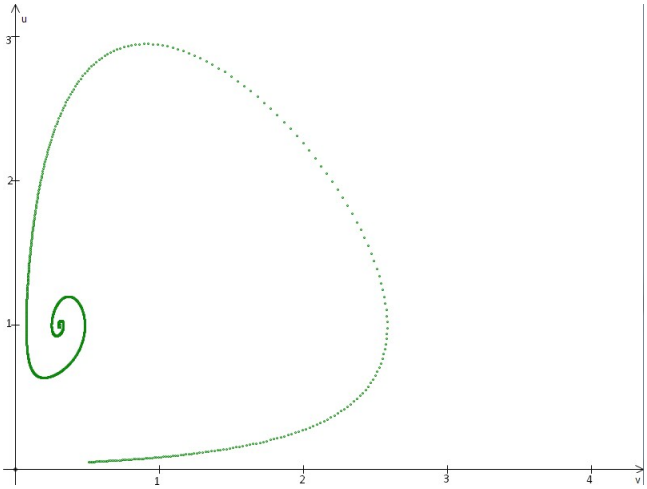


Рис. 2. $\gamma = 0.01, c_1 = 0.01, c_2 = 0.3, u(0) = 0.5, v(0) = 0.05$.

Для проведения численных расчётов и построения графиков использовалась программа, написанная на языке Pascal.

Для случая устойчивый узел требуется, чтобы подкоренное выражение в (7) и правые части в (8) и (9) были больше нуля. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{(c_1u^*+c_2v^*)^2}{4} - (c_1c_2+1)u^*v^* > 0, \\ c_1u^* + c_2v^* > 0, \\ (c_1c_2+1)u^*v^* > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Случай устойчивого узла исследуется аналогично предыдущему.

Численные расчёты задачи (3) представим в виде графиков.

На рис. 3 показана зависимость плотности популяции хищников и жертв от времени.

На рис. 4 представлена зависимость плотности популяции хищников и жертв в фазовой плоскости.

Для исследования устойчивости процессов, описываемых данной моделью, последняя была линеаризована, и было показано, что особые точки узел и фокус являются устойчивыми. Для определения значений параметров разрешалась система трёх неравенств с помощью программы «Wolfram Mathematica 9». Для численной

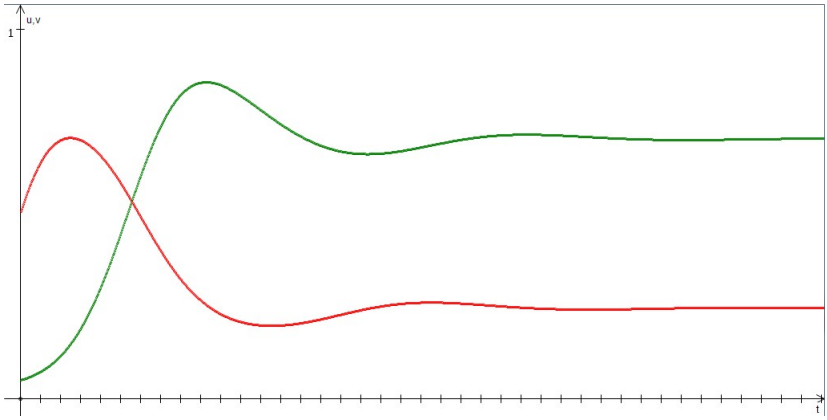


Рис. 3. $\gamma = 0.21, c_1 = 1.21, c_2 = 0.05, u(0) = 0.5, v(0) = 0.05$.

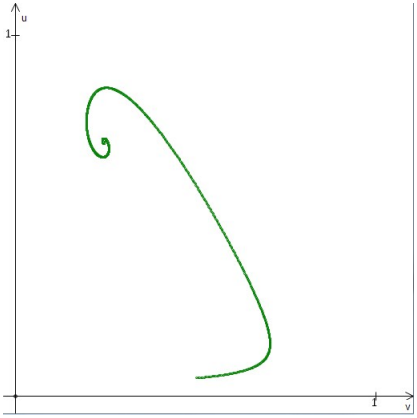


Рис. 4. $\gamma = 0.21, c_1 = 1.21, c_2 = 0.05, u(0) = 0.5, v(0) = 0.05$.

реализации модели построен неявный метод Эйлера [4]. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков изменения плотности популяции хищников и жертв с течением времени и в фазовой плоскости.

Найдено множество значений параметров c_1, c_2, γ, при которых система устойчива. Эти значения можно использовать для исследования динамики популяции хищников и жертв с учётом дополни-

тельных факторов, характеризующих процесс их взаимодействия.

Литература

1. Апонин Ю. М., Апонина Е. А. Математическая модель сообщества хищник — жертва с нижним порогом численности жертвы // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т. 1. № 1. С. 51-56.

2. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 368 с.

3. Балыкина Ю. Е., Колпак Е. П. Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 3. С. 20-31.

4. Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. 2014. С. 122.