МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–29 апреля 2016 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

Заметка о сепарабельных и ω - тонких топологических группах

Каргин Д. И.

НИ ТГУ, г. Томск
e-mail: foreshop@mail.ru

Аннотация

В данной работе приведен пример связной топологической группы негомеоморфной никакой ω-тонкой топологической группе, позволяющий отрицательно ответить на вопрос, предложенный А.В. Архангельским и М.Г. Ткаченко в [1]. Также даны достаточные условия для сепарабельности и наследственной сепарабельности топологических групп, обобщающие условия известной теоремы о том, что всякая подгруппа ω-тонкой метризуемой топологической группы сепарабельна.

Ключевые слова: связная группа, ω-тонкая группа, сепарабельная группа, метризуемая группа.

Чтобы ответить на вопрос о том, гомеоморфна ли всякая связная топологическая группа ω-тонкой, нам потребуется несколько предварительных результатов. Начнем с определения.

Определение 1. *Топологическая группа G называется ω-тонкой, если для всякой окрестности U нейтрального элемента группы G найдется счетное множество $A \subset G$ такое, что $A \cdot U = G$.*

Доказательство следующих результатов можно найти в [1].

Предложение 1. *Любая подгруппа ω-тонкой топологической группы является ω-тонкой.*

Предложение 2. *Замыкание метризуемой подгруппы топологической группы является метризуемой подгруппой.*

Следующий результат хорошо известен.

Теорема 1. *Пусть G — метризуемая ω-тонкая топологическая группа. Тогда в G существует счетная база.*

Следствие 1. *Пусть G — метризуемая ω-тонкая топологическая группа. Тогда G сепарабельна.*

Предложение 3. *Пусть G — связная метрическая топологическая группа, гомеоморфная ω-тонкой топологической группе. Тогда G сепарабельна.*

Доказательство. Пусть ρ — метрика на G, $f\colon G \to X$ — гомеоморфизм, где X — ω-тонкая топологическая группа. Пусть $g \in G$ такое, что $f(g) = e$, где e — нейтральный элемент группы X. Рассмотрим $B = \left\{ f\left(U_\rho(g, \frac{1}{n})\right); n \in \mathbb{N} \right\}$, где $U_\rho(g, \frac{1}{n}) = \{h \in G; \rho(g,h) < \frac{1}{n}\}$. Пусть U — произвольная окрестность точки e. Тогда, в силу непрерывности, найдется $W \subset G$, для которой: $g \in W$ и $f(W) \subset U$. Существует также номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $U_\rho(g, \frac{1}{n}) \subset W$. Отсюда $f\left(U_\rho(g, \frac{1}{n})\right) \subset f(W) \subset U$. Следовательно, B — счетная фундаментальная система окрестностей e. По теореме (Биркгофа, Какутани): X — метризуемая топологическая группа. По следствию 1: X — сепарабельна. Откуда G — сепарабельна. □

Пример 1. *Пространство ℓ_∞, состоящее из всех ограниченных вещественных последовательностей, снабженное sup-нормой, является связной метрической несепарабельной топологической группой. Следовательно, ℓ_∞ негомеоморфно никакой ω-тонкой топологической группе.*

Следующее утверждение обобщает следствие 1:

Предложение 4. *Пусть G — ω-тонкая топологическая группа, представимая в виде*

$$G = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n},$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ G_n — метризуемая подгруппа. Тогда G сепарабельна.

Доказательство. Поскольку замыкание метризуемой подгруппы метризуемо, то можно считать, что все G_n замкнуты. Так как G_n является ω-тонкой метризуемой подгруппой, то по следствию 1: G_n — сепарабельна для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A_n \subset G_n$ — счетное всюду плотное в G_n множество. Положим $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\overline{A} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, и, следовательно, $G = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n} \subset \overline{A}$. □

Определение 2. *Топологическая группа G называется наследственно-сепарабельной, если каждая подгруппа G сепарабельна.*

Предложение 5. *Пусть G — ω-тонкая топологическая группа, представимая в виде*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ G_n — метризуемая подгруппа. Тогда G наследственно-сепарабельна.

Доказательство. Пусть $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $H \subset G$ — подгруппа. Пусть далее B_n — счетная всюду плотная в $H \cap G_n$ подгруппа, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда (замыкание берется в H):

$$\overline{B} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \cap H = H.$$

$\square$

Определение 3. *Топологическая группа G называется σ-метризуемой, если G представима в виде*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ G_n — метризуемая подгруппа.

Пример 2. *Неметризуемой топологической группы, содержащей всюду плотную σ-метризуемую подгруппу.*

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ подмножество, состоящее из функций f, для которых существуют $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$, где a_i, b_i — рациональные числа, такие, что

$$1) f\left(\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\right)\right) = \{0\},$$

$$2) f(a_i, b_i) = q_i,$$

где $q_i \in \mathbb{Q}$.

Поскольку каждая такая функция определяется конечным набором рациональных чисел, то H — счетное подмножество. Ясно также, что H всюду плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Рассмотрим алгебраическую оболочку $X = AlgH$. Из счетности H следует, что X — счетная подгруппа. Поскольку $H \subset X$ и $\overline{H} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, то и $\overline{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Из того, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ неметризуема и предложения 2 следует, что X — неметризуема.

Пусть $H = \{h_m\}_{m=1}^{\infty}$. *Положим* $X_k = Alg\{h_1, \dots, h_k\}$. *Для каждой функции* $h_i, i \le k$ *обозначим* $a_{i,1}, b_{i,1}, \dots, a_{i,n_i}, b_{i,n_i}$ *такие числа, что*

$$1) h_i\left(\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n_i}(a_{i,j}, b_{i,j})\right)\right) = \{0\},$$

$$2) h_i(a_{i,j}, b_{i,j}) = q_j\ ,$$

где $q_j \in \mathbb{Q}, j = 1, \dots, n_i$.

Пусть $s_1 \le \ldots \le s_N$ *— расположенные по возрастанию числа* $a_{i,j}, b_{i,j}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i$. *Рассмотрим функцию* $d(x, y) = \sum_{j=1}^{N-1}\left|x\left(\frac{s_j + s_{j+1}}{2}\right) - y\left(\frac{s_j + s_{j+1}}{2}\right)\right| + \sum_{j=2}^{N-1}\left|x(s_j) - y(s_j)\right|\ \forall x, y \in X_k$.

Проверим, что функция $d\colon X_k \times X_k \to [0, +\infty)$ *является метрикой. Свойства* $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X_k$, *следуют из свойств модуля действительного числа. Покажем, что если* $z \in X_k$, *то из условия* $s_i < s_{i+1}$ *следует, что* $z(t_1) = z(t_2)\ \forall t_1, t_2 \in (s_i, s_{i+1})$. *Предположим, что найдутся* $t_1, t_2 \in (s_i, s_{i+1})$, *для которых* $z(t_1) < z(t_2)$. *Тогда найдется* $h_j, j \le k$, *для которой* $h_j(t_1) < h_j(t_2)$, *так как* z *является линейной комбинацией с целочисленными коэффициентами функций* $h_1, \dots, h_k$. *Для* h_j *существуют* $a_{j,l}, b_{j,l}$, *удовлетворяющие условиям* $t_1 \in (a_{j,l}, b_{j,l})$, $t_2 \notin (a_{j,l}, b_{j,l})$ *Если* $t_1 < t_2$, *то* $s_i < t_1 < b_{j,l} < t_2 < s_{i+1}$, *чего не может быть по выбору чисел* $s_1, \dots, s_N$. *Если же* $t_1 > t_2$, *то выбору чисел* $s_1, \dots, s_N$ *противоречат неравенства* $s_i < t_2 < a_{j,l} < t_1 < s_{i+1}$. *Таким образом, на каждом непустом интервале* (s_i, s_{i+1}) *выполняется условие* $\forall z \in X_k\colon z(t) = z\left(\frac{s_j + s_{j+1}}{2}\right) \forall t \in (s_i, s_{i+1})$.

Пусть $d(x, y) = 0$. *Тогда* $x(t) = y(t)$ *для любого* $t \in (s_1, s_N)$. *А для каждого* $t \in \mathbb{R} \setminus (s_1, s_N)$ $x(t) = 0 = y(t)$. *Следовательно,* $x = y$. *Покажем, что метрика* $d(\cdot, \cdot)$ *определяет исходную топологию. Пусть* $U(e, r_1, \dots, r_p, \varepsilon)$ *— произвольная окрестность нуля* e *группы* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *а* x *принадлежит шару радиуса* ε *—* $U_d(e, \varepsilon)$. *Тогда для любого* $l \in \{1, \dots, p\}$ *найдется* $i(l) \in \{1, \dots, N\}$ *такой, что* $x(r_l) = x\left(\frac{s_{i(l)} + s_{i(l)+1}}{2}\right)$. *Следовательно, для любого* $l \in \{1, \dots, p\}$:

$$\left|x(r_l)\right| = \left|x\left(\frac{s_{i(l)} + s_{i(l)+1}}{2}\right)\right| < \sum_{j=1}^{N-1}\left|x\left(\frac{s_j + s_{j+1}}{2}\right)\right| + \sum_{j=2}^{N-1}\left|x(s_j)\right| =$$

$$= d(x, e) < \varepsilon,$$

то есть $U_d(e,\varepsilon) \subset U(e, r_1, \dots, r_p, \varepsilon)$. *С другой стороны, если* $x \in U\Big(e, s_2, \dots, s_{N-1}, \dfrac{s_1+s_2}{2}, \dots, \dfrac{s_{N-1}+s_N}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2N-3}\Big)$, *то* $d(x,e) =$
$= \sum\limits_{j=1}^{N-1} \Big|x\Big(\dfrac{s_j+s_{j+1}}{2}\Big)\Big| + \sum\limits_{j=2}^{N-1} \Big|x(s_j)\Big| < (N-1)\cdot\dfrac{\varepsilon}{2N-3} + (N-2)\cdot\dfrac{\varepsilon}{2N-3} =$
$= \varepsilon$, *то есть* $U\Big(e, s_2, \dots, s_{N-1}, \dfrac{s_1+s_2}{2}, \dots, \dfrac{s_{N-1}+s_N}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2N-3}\Big) \subset$
$\subset U_d(e,\varepsilon)$. *Таким образом, каждая группа* $X_k = Alg\{h_1, \dots, h_k\}$ *метризуема, а* $X = AlgH = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Alg\{h_1, \dots, h_k\}$ σ*-метризуема.*

Литература

1. Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G. Topological groups and related structures // Atlantis Studies in Mathematics. Atlantis Press/World Scientific. V. 1. 2008.

2. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.