

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная
научная конференция
«Все грани математики и
механики»**

(25–29 апреля 2016 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

Математическое моделирование поверхности профильной фрезы для обработки выходной детали передаточного механизма

Костарев А. А., Щербаков Н. Р.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: artem_kost@bk.ru

Аннотация

При обработке поверхностей деталей передаточного механизма используются различные типы фрез (сферические, тороидальные и др.). Стоимость специального профильного инструмента несколько выше, чем таких фрез. Но увеличение стоимости инструмента окупается значительным сокращением машинного времени обработки деталей. В работе построена математическая модель поверхности профильной фрезы (как поверхности вращения) для обработки выходной детали передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением. Создана компьютерная программа для определения радиусов круговых сечений фрезы для заданного набора смещений по оси вращения.

Ключевые слова: профильная фреза, эксцентриково-циклоидальное зацепление, касание кривых, выходная деталь, математическое моделирование.

В данной работе моделируется построение поверхности так называемой профильной фрезы для обработки выходной детали передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [1].

Из механических передач, применяющихся в машинах и приборах, наиболее распространёнными являются зубчатые. Стремление повысить нагрузочную способность зубчатых передач, производительность, точность приводят к появлению всё новых видов зацеплений, более совершенных, чем применявшиеся ранее [2]. Так, в 2007 году томскими конструкторами во главе с В.В. Становским было разработано эксцентриково-циклоидальное зацепление [3].

КПД эксцентриково-циклоидального зацепления, в отличие от всех предыдущих зубчатых зацеплений, составляет примерно 99.9%.

ЭЦ-зацепление состоит из двух деталей: входной и выходной. Входную деталь передаточного механизма принято называть «шестерней», а выходную «колесом».

Непрерывно совершенствуются методы изготовления зубчатых колёс. Здесь речь пойдет об обработке выходной детали.

Профильные фрезы позволяют вытачивать поверхность зуба «за один заход» в отличие от сферических и тороидальных фрез, что значительно сокращает количество времени, которое необходимо для обработки детали.

Введём обозначения констант, входящие в уравнения поверхностей детали:

Aw – межцентровое расстояние (расстояние между параллельными осями вращения деталей);

ε – эксцентриситет;

z_1 – количество зубьев шестерни;

z_2 – количество зубьев колеса;

$n = z_2/z_1 + 1$;

ρ – радиус окружности сечения зуба шестерни;

lr – размер деталей по оси вращения;

K – количество сечений поверхности фрезы;

μ_i – высота подъема сечения ($i = 0, 1 \dots K$);

$r_i(\mu)$ – радиусы окружностей сечения фрезы, для различных значений μ_i ;

η – сдвиг оси фрезы.

Поверхность выходной детали (колеса) образована вращением плоской циклоидальной кривой вокруг оси вращения колеса с одновременным смещением ее вдоль этой оси. Этой кривой является эквидистанта эпитрохоиды [4]. Зададим эпитрохоиду в виде вектор-функции аргумента $\tau = 0, \dots, 2\pi n$:

$$\overline{\mathbf{T}e}(\tau) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \tau + Aw \cos \frac{\tau}{n} \\ -\varepsilon \sin \tau + Aw \sin \frac{\tau}{n} \end{pmatrix}.$$

Эквидистанту эпитрохоиды (кривую, удаленную по нормальям от эпитрохоиды на величину ρ) запишем в виде:

$$\overline{\mathbf{E}}(\tau) = \overline{\mathbf{T}e}(\tau) + \rho \frac{\overline{\mathbf{N}e}(\tau)}{|\overline{\mathbf{N}e}(\tau)|}, \quad (1)$$

где

$$\overline{N\mathbf{e}}(\tau) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \tau - \frac{Aw}{n} \cos \frac{\tau}{n} \\ \varepsilon \sin \tau - \frac{Aw}{n} \sin \frac{\tau}{n} \end{pmatrix}$$

– вектор нормали в точке эпитрохоиды. Данная кривая представлена на рис. 1.

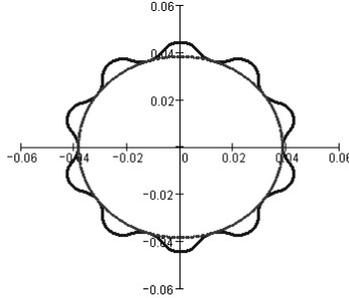


Рис. 1. Эквидистанта эпитрохоиды

Поверхность зуба колеса получается поворотами профиля (1) вокруг оси вращения колеса и смещениями вдоль этой оси [5]. Уравнение поверхности колеса запишем в виде вектор-функции двух аргументов:

$$\overline{E\mathbf{v}}(v, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \frac{v}{n-1} E(\tau)_1 + \sin \frac{v}{n-1} E(\tau)_2 \\ -\sin \frac{v}{n-1} E(\tau)_1 + \cos \frac{v}{n-1} E(\tau)_2 \\ \frac{lr}{2\pi} v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $v = 0, \dots, 2\pi$ – угол поворота входной детали, $\frac{v}{n-1}$ – угол поворота эквидистанты. Здесь обозначения $E(\tau)_1$, $E(\tau)_2$ означают соответствующие координаты вектор-функции (1), которые являются скалярными функциями.

При обработке поверхности зуба колеса фреза перемещается в пространстве, сохраняя положение своей оси перпендикулярно оси вращения колеса.

Ось OX лежит на оси симметрии первого профиля зуба колеса и проходит через точку $\overline{E\mathbf{v}}(0, 0)$. Начальное положение оси фрезы – параллельно оси OX , со смещением по оси OY на малую величину η . Это смещение необходимо для того, чтобы при обработке одной

боковой поверхности зуба не касаться другой боковой поверхности. Уравнение оси фрезы можно записать в виде вектор-функции:

$$\overline{Osf}(\mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Положение оси фрезы со смещением относительно оси симметрии изображено на рис. 2.

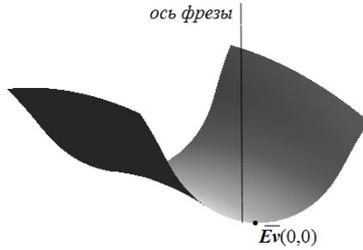


Рис. 2. Положение оси фрезы

Точка $\overline{E_v}(0,0)$ лежит на оси симметрии профиля зуба колеса. Исходя из полученного уравнения, запишем семейство параллельных плоскостей, перпендикулярных оси фрезы, и найдем кривые, получающиеся в сечениях этими плоскостями поверхности (2):

$$X = E(0)_1 + \mu. \quad (3)$$

Подставив вместо X первую координату вектор-функции (2), получим:

$$\cos \frac{v}{n-1} E(\tau_1) + \sin \frac{v}{n-1} E(\tau_2) = E(0)_1 + \mu. \quad (4)$$

Из полученного уравнения найдем зависимость между параметрами v и τ . Используя встроенные функции в пакете *Mathcad*, найдём аналитическое решение уравнения (4):

$$v(\tau, \mu) = (n-1) \arctan \left(\frac{E(\tau)_1 [E(\tau)_2 (E(0)_1 + \mu) + Ed(\tau, \mu)]}{E(\tau)_1^2 (E(0)_1 + \mu) - E(\tau)_2 Ed(\tau, \mu)} \right),$$

где

$$Ed(\tau, \mu) = \sqrt{-E(\tau)_1^2 (E(0)_1 + \mu)^2 - E(\tau)_1^2 - E(\tau)_2^2}.$$

Далее, подставив полученное решение $v(\tau, \mu)$ в (2) вместо v , получаем уравнение семейства сечений зуба колеса плоскостями, пер-

пендикулярными оси фрезы (μ – параметр семейства):

$$\overline{\mathbf{Sem}}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ -\sin\left(\frac{v(\tau, \mu)}{n-1}\right) E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{v(\tau, \mu)}{n-1}\right) E(\tau)_2 \\ v(\tau, \mu) \frac{z}{2\pi} lr \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Этих кривых должны касаться окружности, образующие поверхность профильной фрезы. Эти окружности располагаются в плоскостях семейства (3), их центры лежат на оси фрезы, а радиусы r меняются в зависимости от параметра μ семейства (3). Исходя из этого, запишем уравнения семейства таких окружностей с произвольным радиусом r в виде:

$$\overline{\mathbf{Okr}}(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ r \cos(\alpha) + \eta \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Это практически и есть уравнение поверхности профильной фрезы, но оно для произвольного радиуса. Следовательно, осталось найти значения радиусов круговых сечений фрезы r_i , которые будут соответствовать высоте сечения μ_i .

В каждом сечении μ окружность (6) должна касаться кривой (5). Выполнение данного требования осуществляется в два этапа. Во-первых, приравниваем координаты вектор-функций (5) и (6), что приводит к системе двух уравнений (первые координаты совпадают тождественно), из которых можно найти зависимости r и α от τ для каждого значения μ :

$$r(\tau, \mu) = \sqrt{Sd^2(\tau, \mu) + \left(v(\tau, \mu) \frac{z}{2\pi} lr\right)^2}, \quad (7)$$

$$\alpha(\tau, \mu) = \arctan \frac{lr v(\tau, \mu) z}{2\pi Sd(\tau, \mu)} + \pi, \quad (8)$$

где

$$Sd(\tau, \mu) = \left[-\sin\left(\frac{v(\tau, \mu)}{n-1}\right) E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{v(\tau, \mu)}{n-1}\right) E(\tau)_2 - \eta \right].$$

Во-вторых, должно обращаться в нуль скалярное произведение векторов:

$$\left(\overline{\mathbf{Osf}}(\mu) - \overline{\mathbf{Sem}}(\tau, \mu), \overline{\mathbf{Sem}}'(\tau, \mu) \right) = 0, \quad (9)$$

где $\overline{\mathbf{Sem}}'(\tau, \mu)$ – производная вектор функции $\overline{\mathbf{Sem}}(\tau, \mu)$ по параметру τ .

Уравнение (9) на τ при переходе к координатам имеет весьма

громоздкий вид и решается с помощью специальной компьютерной программы. В результате для каждого значения высоты подъема сечения μ_i (которая определяется из условия: $E(-x_0)_1 - E(0)_1 = 0$, где x_0 – значение по параметру τ , для поиска которого написан алгоритм в пакете *MathCad*, и также x_0 – это значение, определяющее, с какой глубины лунки нужно стачивать) получаем значение $\tau(\mu)$. Подставляя $\tau(\mu)$ в (7) вместо τ , получаем значения радиусов $r_i(\mu)$ окружностей сечений фрезы для каждого значения μ . Теперь из (6) получается уравнение поверхности фрезы:

$$\overline{Fr}(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ r_i(\mu) \cos(\alpha) + \eta \\ r_i(\mu) \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Если $\tau\mu$ подставить в (8), то получим параметр $\alpha(\mu)$ точки касания окружности сечения фрезы с кривой сечения зуба колеса (для каждого значения μ). Координаты всех точек касания получатся при подстановке $\alpha(\mu)$ в (10). Эти точки показаны на рис. 3.

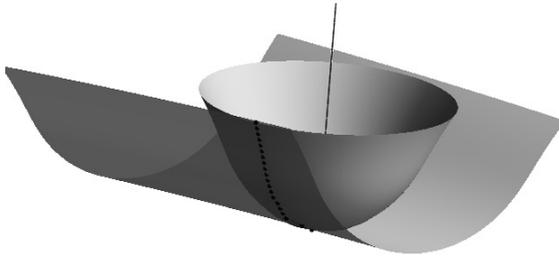


Рис. 3. Профильная фреза для обработки зуба колеса

Таким образом, поверхность профильной фрезы получена как семейство окружностей вида (6), т.е. как поверхность вращения.

Литература

1. Kazakyavichyus S. M., Stanovskoy V. V., Remneva T. A., Kuznetsov W. M., Bubentchikov A. M. and Shcherbakov N. R. 2011. Russ. Eng. Research. Vol. 31(3), P. 197–199.

2. Ф.Л. Литвин. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука, 1968. 584 с.

3. Патент РФ 2439401. Эксцентриково-циклоидальное зацепление зубчатых профилей (варианты) / В.В. Становской, С.М. Казьявичюс, Т.А. Ремнева, В.М. Кузнецов, А.В. Становской. Заявлено 29.01.2010; опубл. 10.01.2012, Бюлл. № 1.

4. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 118.

5. Камчатный С.А., Сквородин А.В., Становской А.В., Щербачев Н.Р. Математическое моделирование процесса сближения поверхностей при формообразовании деталей передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 15–24.