МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–29 апреля 2016 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел

Норбосамбуев Ц.Д.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: nstsddts@yandex.ru

Аннотация

В данной статье изучаются 2-хорошие диагональные целочисленные формальные матрицы порядка 2. Именно, получены условия 2-хорошести диагональной формальной матрицы порядка 2 над кольцом целых чисел и над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Найдены зависимость между четностью множителя кольца формальных матриц над кольцом целых чисел и 2-хорошестью диагональных матриц в этом кольце, а также условия, накладываемые на элемент a, при которых формальная матрица $A = diag(a, 0)$ будет 2-хорошей.

Ключевые слова: обобщенные матрицы, формальные матрицы, хорошие кольца.

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей отличной от нуля.

Подробно с формальными матрицами и кольцами формальных матриц можно ознакомиться в [1], [2] и [3]. С аналогом определителя для формальных матриц — в [1]. Напомним лишь, что для формальной матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ порядка 2 над данным коммутативным кольцом R он равен

$$|A| = a \cdot d - s \cdot c \cdot b,$$

где s - множитель кольца формальных матриц, то есть некоторый элемент из R.

Определение 1. *Элемент кольца называется k–хорошим, если он может быть записан в виде суммы k обратимых элементов, где k — некоторое фиксированное натуральное число. Кольцо называется k–хорошим, если все его элементы — k–хорошие.*

Очень важен для данного исследования следующий результат, полученный П.А. Крыловым и А.А. Туганбаевым в [1].

Теорема 1. *Пусть дано кольцо формальных матриц* $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, *где* R *— коммутативное кольцо с единицей. Пусть* A *— матрица из этого кольца. Матрица* A *обратима тогда и только тогда, когда её определитель — обратимый элемент кольца* R.

Зная правило вычисления определителя формальной матрицы порядка 2, из теоремы 1 легко получить условия 2-хорошести формальных матриц порядка 2.

Следствие 1. *Пусть M(2,R,s) — кольцо формальных матриц порядка 2 над коммутативным кольцом R. Диагональная матрица* $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *будет 2-хорошей в M(2,R,s) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы* $x, y, a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$, *что* $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ *и* $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x \cdot y \in U(R)$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x \cdot y \in U(R)$.

Доказательство. Очевидным образом следует из теоремы 1. $\square$

Заменяя произвольное кольцо R на кольцо целых чисел, получим условие.

Следствие 2. *Пусть* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *— кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица* $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *будет 2-хорошей в* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *тогда и только тогда, когда найдутся такие целые числа* x, a_1, a_2, b_1, b_2, *что* $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ *и* $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x = \pm 1$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x = \pm 1$.

Доказательство. Очевидным образом следует из теоремы 1 и следствия 1. $\square$

Далее будут изложены некоторые условия для 2-хорошести диагональных формальных матриц над $\mathbb{Z}$ при дополнительных условиях.

Предложение 1. *Пусть* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *— кольцо формальных целочисленных матриц порядка 2, и пусть множитель* s *— четное число. Если диагональная матрица* $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *является 2-хорошей в* $M(2, \mathbb{Z}, s)$, *то тогда её элементы* a *и* b *— четные числа.*

Доказательство. Пусть множитель s — четное число, и матрица $=$ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ — 2-хорошая. Тогда по *следствию 2* найдутся такие целые числа x, a_1, a_2, b_1, b_2, что $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ и $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x = \pm 1$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x = \pm 1$.

Пусть — нечетно. Тогда либо a_1 — четно и a_2 — нечетно, либо наоборот a_2 — четно и a_1 — нечетно. Для определенности пусть a_1 — четно и a_2 — нечетно. Тогда $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x = \pm 1$, где $a_1 \cdot b_1$ и $s \cdot x$ — четные числа, в сумме дающие нечетное. Очевидное противоречие. Таким образом, a должно быть четным, если матрица A — 2-хорошая, вне зависимости от четности b.

Аналогичным образом доказывается, что и b должно быть четным числом, если матрица A — 2-хорошая. □

Теорема 2. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо целочисленных формальных матриц порядка 2. Диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ будет 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$ тогда и только тогда, когда $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$ при нечетном множителе s, и $a \in \{0; 2; -2\}$ при четном.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошая матрица из $M(2, \mathbb{Z}, s)$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x \\ z & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -x \\ -z & -y \end{pmatrix} = U_1 + U_2,$$

где U_1 и U_2 – обратимые матрицы из $M(2, \mathbb{Z}, s)$. По теореме 1 U_1 и U_2 обратимы тогда и только тогда, когда $|U_1|$ и $|U_2| \in U(\mathbb{Z})$. Напомним, что $U(\mathbb{Z}) = \{1; -1\}$. То есть

$$|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = \pm 1,$$
$$|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = \pm 1.$$

Таким образом, возможны четыре случая:

1)$|U_1| = 1$ и $|U_2| = 1$,

2)$|U_1| = 1$ и $|U_2| = -1$,

3)$|U_1| = -1$ и $|U_2| = 1$,

4)$|U_1| = -1$ и $|U_2| = -1$.

Рассмотрим каждый из них по отдельности.

1) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = 1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = 1$. Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} = 0.$$

Получили, что в первом случае a может быть равно только нулю.

2) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = 1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = -1$. Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{1 + s \cdot x \cdot z + 1 - s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{2}{y}.$$

Итак, $a = \frac{2}{y}$, причем $a \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $y \in \{1; -1; 2; -2\}$ и $a \in \{1; -1; 2; -2\}$. Получили, что во втором случае a может быть равно только $1, -1, 2, -2$.

3) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = -1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = 1$. Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} =$$
$$\frac{-1 + s \cdot x \cdot z - 1 - s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{-2}{y}.$$

Итак, $a = \frac{-2}{y}$, причем $a \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $y \in \{1; -1; 2; -2\}$ и $a \in \{1, -1, 2, -2\}$. Получили, что в третьем случае a может быть равно только $1; -1; 2; -2$.

4) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = -1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = -1$. Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} = 0.$$

Получили, что в четвертом случае a может быть равно только нулю.

Таким образом, если $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошая матрица, то $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$. В случае, когда множитель s кольца $M(2, \mathbb{Z}, s)$ четен, элемент a матрицы $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ может быть только четен, то есть $a \in \{0; 2; -2\}$.

Достаточность. Пусть s четно и пусть $a \in \{0; 2; -2\}$. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошей? Запишем

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x \\ z & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -x \\ -z & -y \end{pmatrix} = U_1 + U_2.$$

Пусть a=0. Возьмем тогда

$$a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Получим

$$|U_1| = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} \cdot y - s \cdot x \cdot z = 1,$$
$$|U_2| = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = 1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть a=2. Возьмем тогда

$$y = 1, a_1 = 1 + s \cdot x \cdot z, a_2 = 1 - s \cdot x \cdot z.$$

Получим

$$|U_1| = (1 + s \cdot x \cdot z) \cdot 1 - s \cdot x \cdot z = 1,$$
$$|U_2| = (1 - s \cdot x \cdot z) \cdot (-1) - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть a=-2. Возьмем тогда

$$y = -1, a_1 = -1 - s \cdot x \cdot z, a_2 = -1 + s \cdot x \cdot z.$$

Получим

$$|U_1| = (-1 - s \cdot x \cdot z) \cdot (-1) - s \cdot x \cdot z = 1,$$
$$|U_2| = (-1 + s \cdot x \cdot z) \cdot 1 - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть теперь s нечетно и пусть $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$. При $a \in \{0; 2; -2\}$ доказательство проводится аналогично случаю с четным множителем s. Пусть a=1. Возьмем тогда

$$y = 2, a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{2}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{2}.$$

Получим

$$|U_1| = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{2} \cdot 2 - s \cdot x \cdot z = 1,$$
$$|U_2| = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{2} \cdot (-2) - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть $a=-1$. Возьмем тогда

$$y=-2, a_1=\frac{1+s\cdot x\cdot z}{-2}, a_2=-\frac{-1+s\cdot x\cdot z}{-2}.$$

Получим

$$|U_1|=\frac{1+s\cdot x\cdot z}{-2}\cdot(-2)-s\cdot x\cdot z=1,$$

$$|U_2|=-\frac{-1+s\cdot x\cdot z}{-2}\cdot 2-s\cdot x\cdot z=-1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

□

Замечание 1. *Утверждение аналогичное теореме 2 можно доказать и для матриц вида* $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}$.

Предложение 2. *Пусть* $M(2,\mathbb{Z},s)$ *— кольцо формальных целочисленных матриц порядка 2. Матрица вида* $\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$ *будет 2-хорошей тогда и только тогда, когда a равно* 0.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$ — 2-хорошая. Тогда она может быть записана в виде суммы двух обратимых матриц U_1 и U_2.

$$A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&a_1\\z&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x&a_2\\-z&-y\end{pmatrix}=U_1+U_2.$$

Матрицы U_1 и U_2 обратимы тогда и только тогда, когда

$$|U_1|=x\cdot y-s\cdot z\cdot a_1=\pm1,$$

$$|U_2|=(-x)\cdot(-y)+s\cdot z\cdot a_2=\pm1.$$

Выразим a_1 и a_2:

$$a_1=\frac{\mp1+x\cdot y}{s\cdot z}, a_2=\frac{\pm1-x\cdot y}{s\cdot z}.$$

Тогда

$$a=\frac{\mp1+x\cdot y}{s\cdot z}+\frac{\pm1-x\cdot y}{s\cdot z}=\frac{0}{s\cdot z}=0.$$

Достаточность. Пусть $a=0$. Будет ли матрица А$=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$ — 2-хорошей? Запишем

$$A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&a_1\\z&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x&a_2\\-z&-y\end{pmatrix}=U_1+U_2.$$

Положим

$$a_1=\frac{1+x\cdot y}{s\cdot z}, a_2=\frac{-1-x\cdot y}{s\cdot z}$$

и вычислим определители матриц U_1 и U_2.

$$|U_1| = x \cdot y - s \cdot z \cdot \frac{1 + x \cdot y}{s \cdot z} = -1,$$

$$|U_2| = x \cdot y + s \cdot z \cdot \frac{-1 - x \cdot y}{s \cdot z} = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая. $\square$

Замечание 2. *Утверждение аналогичное предложению 2 можно доказать и для матриц вида* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Литература

1. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. № 1(19). С. 65–119.

2. Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 34–41.

3. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. № 8(15). С. 145–211.

4. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // Journal of Algebra. 1974. Vol. 31. P. 182–193.

5. Vamos P. 2-good rings // The Quarterly Journal of Mathematics. 2005. Vol. 56. P. 417–430.

6. Srivastava A.K. A survey of rings generated by units // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathatiques. 2010. Vol. 19. P. 203–213.