Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Российский университет дружбы народов
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2016)

Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

12–16 сентября 2016 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2016

DOI: 10.17223/9785751124335/13

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО MAP|GI|∞ С ЗАЯВКАМИ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА

И. А. Кононов, Е. Ю. Лисовская

Национальный исследовательский Томский государственный университет

1. Введение

В последнее время системы массового обслуживания (СМО) с заявками случайного объема получили большое распространение. Модели таких систем имеют свое применение в задачах проектирования телекоммуникационных и информационных систем, где информация передается в виде сообщений случайного объема. Как было замечено в работах [1, 2], задачи исследования моделей таких систем играют большую роль при моделировании современных информационно-вычислительных систем. Системы с неограниченным числом приборов являются математическими моделями многих социально-экономических систем, например, Пенсионного фонда, кредитно-депозитных организаций и т.д. [3–5].

В работе [6] была исследована система массового обслуживания с заявками случайного объема вида M|GI|∞. Были найдены вид характеристической функции и основные вероятностные характеристики суммарного объема в системе.

В настоящей работе рассмотрена более общая модель с входящим марковским модулированным потоком (MAP-потоком) и произвольным временем обслуживания. Исследование проводится методом асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MAP-поток) [7], управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$, диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ и набором вероятностей $d_{k_1k_2}$ при всех $k_1 \neq k_2$. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v>0$, $G(y)=P\{v<y\}$ – функция распределения случайной величины v. Объемы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t, $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t), V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания (метод просеянного потока) [7, 8].

Построим просеянный поток для рассматриваемой СМО MAP|GI|∞. Для этого зафиксируем некоторый момент времени T. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t<T$ с вероятностью

$$S(t)=1-B(T-t),$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1-S(t)$ эта заявка не рассматривается.

3. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Введем обозначение $P(k,n,z,t)=P\{k(t)=k,n(t)=n,V(t)<z\}$ – распределение вероятностей трехмерного Марковского процесса, где $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова в момент времени t, $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, $V(t)$ – суммарный объем требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t. Для этого распределения вероятностей составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial t}=\lambda_k S(t)\left[\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)dG(y)-P(k,n,z,t)\right]+$$
$$+\sum_\nu\left\{P(\nu,n,z,t)+S(t)\left[\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)dG(y)-P(\nu,n,z,t)\right]d_{\nu k}\right\}q_{\nu k}. \tag{1}$$

$$k=\overline{1,K},\ n=0,1,2,\ldots,\ z>0.$$

Введем частичные характеристические функции вида:

$$H(k,u_1,u_2,t)=M\{\exp(ju_1n(t)+ju_2V(t))\}=\sum_{i=0}^{\infty}e^{ju_1n}\int_0^\infty e^{ju_2z}P(k,n,z,t)dz, \tag{2}$$
$$k=\overline{1,K},\ n=0,1,2,\ldots,\ z>0.$$

И, следовательно, получим

$$\frac{\partial H(k,u_1,u_2,t)}{\partial t}=\lambda_k S(t)H(k,u_1,u_2,t)\left[e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right]+$$
$$+\sum_\nu H(\nu,u_1,u_2,t)\{1+S(t)[e^{ju_1}G^*(u_2)-1]d_{\nu k}\}q_{\nu k}, \tag{3}$$
$$k=\overline{1,K}.$$

Запишем данную систему (3) в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{B}S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q}\right] \tag{4}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0)=\mathbf{r}. \tag{5}$$

Здесь и далее $\mathbf{r}$ – вектор-строка стационарного распределения управляющей цепи Маркова, определяемая системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = 0 \\ \mathbf{re} = 1 \end{cases}, \tag{6}$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

4. Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (4) не представляется возможным, то для решения задачи (4)–(5) воспользуемся методом асимптотического анализа [0] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [0]. Обозначим $\mathbf{B} = N\mathbf{B}^1$, $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}^1$, где $N \to \infty$.

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{B}^1 S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q}^1\right] \tag{7}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0) = \mathbf{r}. \tag{8}$$

Асимптотический анализ первого порядка приведем в виде следующей леммы.

Лемма. Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{k(t), n(t), V(t)\}$ первого порядка имеет вид

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t) = \mathbf{r}\exp\left\{N\beta\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}, \tag{9}$$

где вектор-строка $\mathbf{r}$ определяется системой линейных уравнений (6), а β – выражением

$$\beta = \mathbf{r}\cdot\mathbf{B}^1\cdot\mathbf{e}, \tag{10}$$

a_1 – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$.

Следствие. При $t = T$ для характеристической функции процесса $\{i(t), V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$H(u_1,u_2,t) = \exp\{N\beta b_1\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\}, \tag{11}$$

здесь и далее

$$b_1 = \int_{-\infty}^{T} S(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{T}(1 - B(T-\tau))d\tau = \int_{0}^{\infty}(1 - B(\tau))d\tau \tag{12}$$

определяет математическое ожидание случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Асимптотический анализ второго порядка приведем в виде следующей теоремы.

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{k(t),n(t),V(t)\}$ второго порядка имеет вид

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\mathbf{r}\exp\left\{N\beta(ju_1+ju_2a_1)\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\right.$$

$$+\frac{(ju_1)^2}{2}\left(N\beta\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+N\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\beta a_2\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.\left.++Na_1{}^2\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)+j^2u_1u_2N\left(\beta a_1\int_{t_0}^{t}S(\tau)d\tau+\kappa a_1\int_{t_0}^{t}S^2(\tau)d\tau\right)\right\},$$

где

$$\kappa=2\mathbf{g}(\mathbf{B}^1-\beta\mathbf{I})\mathbf{e}, \tag{13}$$

а вектор-строка $\mathbf{g}$ удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\mathbf{g}\mathbf{Q}^1=\mathbf{r}(\beta\mathbf{I}-\mathbf{B}^1),\ \mathbf{g}\mathbf{e}=1. \tag{14}$$

Следствие 1. При $t=T$ для характеристической функции процесса $\{i(t),V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$\begin{aligned}H(u_1,u_2,t)=\exp\left\{N\beta(ju_1+ju_2a_1)b_1+\frac{(ju_1)^2}{2}(N\beta b_1+N\kappa b_2)+\right.\\ \left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(N\beta a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\right)+j^2u_1u_2(N\beta a_1b_1+N\beta a_1b_2)\right\},\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$b_2=\int_{-\infty}^{T}S^2(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Из вида функции (15) очевидно, что двумерный процесс $\{i(t),V(t)\}$ является асимптотически гауссовским с вектором математических ожиданий

$$\mathbf{a}=[N\beta b_1, N\beta a_1b_1] \tag{17}$$

и ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\sigma_1{}^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N\beta b_1+N\kappa b_2 & N\beta a_1b_1+N\beta a_1b_2\\ N\beta a_1b_1+N\beta a_1b_2 & N\beta a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Следствие 2. Асимптотическая характеристическая функция суммарного объема требований в системе в стационарном режиме имеет вид гауссовской характеристической функции

$$H(u,t)=\exp\left\{juN\beta a_1b_1+\frac{(ju)^2}{2}\left(N\beta a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2\right)\right\} \tag{19}$$

с параметрами $a=N\beta a_1b_1$ и $\sigma^2=N\beta a_2b_1+Na_1{}^2\kappa b_2$.

Заключение

В данной работе была поставлена задача исследования бесконечнолинейной системы массового обслуживания MAP|GI|∞ с заявками случайного объема. Эта система была исследована методом асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока. Были построены асимптотики первого и второго порядка.

Показано, что асимптотическая характеристическая функция суммарного объема требований в системе MAP|GI|∞ в стационарном режиме имеет вид гауссовской характеристической функции с параметрами $a = N\beta a_1 b_1$ и $\sigma^2 = N\beta a_2 b_1 + N a_1^2 \kappa b_2$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

Литература

1. Печинкин А. В. Система M|G|1|n с дисциплиной обслуживания LIFO и ограничением на суммарный объем требований // Автоматика и телемеханика. – 1998. – №4. – С. 106–116.

2. Тихоненко О. М. Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций. – Минск : БГУ, 2008. – 148 с.

3. Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 49–52.

4. Задиранова Л. А., Моисеева С. П. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе MMPP|M|∞ с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. Управление и вычислительная техника. – 2015. – № 2(31). – С. 26–34.

5. Синякова И. А., Моисеева С. П. Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321, № 5. – С. 24–28.

6. Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П. Исследование суммарного объема требований в бесконечнолинейной системе массового обслуживания вида M|GI|∞ // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва, РУДН, 18–22 апреля 2016 г. – М.: РУДН, 2016. – С. 28–30.

7. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

8. Моисеев А. Н., Назаров А. А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.