МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# МАТЕРИАЛЫ

## V Международной молодежной научной конференции

# «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

**Томск, 19–20 мая 2017 г.**

*Под общей редакцией*
*кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

# УПРАВЛЕНИЕ ПОСТАВКАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЦЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

**С.С. Смородинова, Г.Н. Решетникова**
*Томский государственный университет*
svetlanasmorodinovas@gmail.com, tomrgn@ngs.ru

## Введение

В современных условиях развития рыночных отношений внутренняя и внешняя деятельность предприятия зависят от качества принимаемых решений, в частности, от правильной работы с товарными запасами, а также правильного их распределения. В настоящее время наблюдается прогресс в широком использовании компьютеров на предприятии, а самым эффективным способом управления поставками продукции на склад является использование программирования.

В данной работе главной задачей является построение математических моделей экономических процессов. Для решения подобной логистической задачи используются методы теории управления. В частности, реализуется построение динамической модели, описывающей процесс поставок, сбыта и хранения товара, а также с помощью использования метода матрицы чувствительности производится формирование объемов поставок.

## 1. Построение математической модели

Для процессов производства, хранения и сбыта товара достаточно использовать нелинейную динамическую модель [1,2]

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= k_3 U(t) - k_4\left(y(t) - v(t)\right)z(t) - k_1 z(t),\ z(t_0) = z_0, \\ \dot{v}(t) &= k_4\left(y(t) - v(t)\right)z(t) - k_2 v(t),\ v(t_0) = v_0, \\ \dot{w}(t) &= k_4\left(y(t) - v(t)\right)z(t) - U(t) - k_5 z(t),\ w(t_0) = w_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $z(t)$, $v(t)$, $w(t)$, $y(t)$ описывают в ценах продажи объем товара на складе торговой фирмы, у потребителя, прибыль и потенциальный спрос, а $u(t)$ – объем поставок в закупочных ценах. Коэффициенты $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $k_5$, определяют порчу товара при хранении на складе, скорость потребления, торговую наценку, скорость продаж, плату за хранение.

Для использования методов теории автоматического управления построим дискретную стохастическую модель

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k),\ x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + \Delta t \upsilon(k),\ u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x(k) = \left(x_1(k), x_2(k), x_3(k)\right)^{\mathrm{T}} = \left(z(t_k), v(t_k), w(t_k)\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния, $u(k)$ –объем поставок, $v(k)$ – управление, задающее скорость изменения объема поставок, $q(k)$ – вектор, описывающий действие случайных факторов, которые будем задавать в виде последовательности гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{q(k)\} = 0,\ M\left\{\left(q(k) - \overline{q}(k)\right)\left(q(j) - \overline{q}(j)\right)^{\mathrm{T}}\right\} = Q(k)\delta_{k,j}.$$

Матрица $A(k)$ и вектор $B(k)$ в (2) имеют вид

$$A(k)=\begin{pmatrix} 1-\Delta tk_4\left(\varphi_y(k)-\varphi_v(k)\right)-\Delta tk_1 & \Delta tk_4\varphi_z(k) & 0 \\ \Delta tk_4\left(\varphi_y(k)-\varphi_v(k)\right) & 1-\Delta tk_4\varphi_z(k)-\Delta tk_2 & 0 \\ \Delta tk_4\left(\varphi_y(k)-\varphi_v(k)\right)-\Delta tk_5 & -\Delta tk_4\varphi_z(k) & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(k)=\left(\Delta tk_3 \quad 0 \quad -\Delta t\right)^{\mathrm{T}}$$

Матрица $F(k)$ описывает влияние случайных факторов в модели. Линеаризация системы (1) осуществляется методом Тейлора, функции, $\varphi_z(t)$, $\varphi_v(t)$, $\varphi_y(t)$ описывают расчетные значения объемов товара на складе, у потребителя и потенциальный спрос на товар, последующая дискретизация производится методом Эйлера с шагом $\Delta t$, $k$ соответствует моменту времени $t_k=t_0+k\Delta t$, $k=\overline{0,N}$.

## 2. Алгоритмы управления

При управлении экономическими системами чаще всего используются следящие системы управления. Пусть управление осуществляется на основе минимизации математического ожидания функционала обобщенной работы [3]. При этом слежение осуществляется за частью компонент состояния, для чего используется матрица $S$ размерности $p\times 3$, $p<3$.

Существуют различные формы алгоритмов управления для задач минимизации функционала обобщенной работы. Наиболее универсальным из них считаются алгоритмы с прогнозирующей моделью. В данной работе рассматривается алгоритм с матрицей чувствительности.

Функционал обобщенной работы зададим в виде:

$$J^{(s)}(k)=\frac{1}{2}M\left\{\int_{t_k}^{t_k+l_p\Delta t}\left[\left(x^{(s)}(t)-x_z^{(s)}(t_k)\right)^{\mathrm{T}}C_s\left(x(t)-x_z^{(s)}(t_k)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\upsilon^{\mathrm{T}}(t)D\upsilon(t)+\upsilon_{\text{op}}^{\mathrm{T}}(t)D\upsilon_{\text{op}}(t)\right]dt\right\}, \tag{3}$$

где $C_s$– неотрицательно определенная весовая матрица порядка $p$, $D$ – положительный весовой коэффициент, $\upsilon_{\text{op}}(\cdot)$ – оптимальное управление по критерию обобщенной работы (3), $l_p\Delta t$ – длина скользящего интервала оптимизации, $x^{(s)}(\cdot)=Sx(\cdot)$, $x_z^{(s)}(t_k)$ – вектор, за которым осуществляется слежение. Тогда управление задается следующим образом [4]:

$$\upsilon(k)=\upsilon_{\text{op}}(k)=-D^{-1}\varphi(k),\ \varphi(k)=\Delta t\sum_{j=k+1}^{k+l_p}Z_s^{T}(j)C_s\left(x_M^{(s)}(j)-x_z^{(s)}(t_k)\right). \tag{4}$$

Прогнозирующую модель, описывающую динамику системы (2) на интервале оптимизации функционала (3) $\left[t_k,t_k+l_p\Delta t\right]$, зададим в виде стационарной детерминированной системы

$$x_M(j+1)=A(k)x_M(j)+B(k)u(k),\ x_M(j=k)=x(k), \tag{5}$$

а систему, описывающую изменение части компонент вектора состояния зададим в виде:

$$x_M^{(s)}(j+1)=A_s(k)x_M^{(s)}(j)+B_s(k)u(k),\ x_M^{(s)}(j=k)=Sx(k), \tag{6}$$

где $A_s(k)=SA(k)S^T$, $B_s(k)=SB(k)$.

Вектор $Z_s(\cdot)$ размерности $p$, определяющий чувствительность прогнозируемого состояния $x_M^{(s)}(\cdot)$ к вектору объема поставок $u(\cdot)$ изменяется следующим образом:

$$Z_s(j+1) = A_s(k)x_M^{(s)} + B_s(k),\ Z_s(j=k) = 0_p.$$

Здесь $0_p$ – нулевой вектор размерности $p$.

Для управления поставками при использовании модели (1), (2) требуется знание информации об объемах товаров на складе, у потребителя и прибыли. Любая торговая фирма подсчитывает прибыль, знает объем товара на складе, но получить информацию об объеме товара у потребителей является затруднительным. Кроме того это требует больших материальных затрат. Поэтому формирование объемов поставок осуществляется при неполной информации.

Будем считать, что математическая модель информационной системы, имеет вид

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где $y(k)$ – вектор, содержащий информацию о состоянии рассматриваемого процесса, $H$ – матрица, состоящая из нулей и единиц, задающая полноту информации, $r(k)$ – вектор, описывающий погрешности информационной системы, которые будем задавать последовательностью гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{r(k)\} = 0,\ M\{r(k)r^{\mathrm{T}}(j)\} = R\delta_{k,j}.$$

Для того, чтобы использовать соотношения (4)–(6), необходимо построить оценку состояния $\hat{x}(k)$, которая имеет размерность $n$. Для построения оценки $\hat{x}(k)$ используются соотношения [5,6]:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k+1/k) + K(k)\left[y(k+1) - H\hat{x}(k+1/k)\right],$$

$$\hat{x}(k+1/k) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + F(k)\bar{q}(k),\ \hat{x}(0) = \bar{x}_0,$$

$$K(k) = P(k+1/k)H^{\mathrm{T}}\left[HP(k+1/k)H^{\mathrm{T}} + R\right]^{-1},$$

$$P(k+1/k) = A(k)P(k)A^{\mathrm{T}}(k) + F(k)QF^{\mathrm{T}}(k),$$

$$P(k+1) = \left[I - K(k)H\right]P(k+1/k),$$

$$P(0) = P_{x_0}.$$

При этом предполагается, что априорное распределение вектора $x_0$ является гауссовским:

$$M\{x_0\} = \bar{x}_0,\ M\left\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\right\} = P_{x_0},$$

где $P_{x_0}$ – дисперсионная матрица ошибок оценивания начального состояния.

При синтезе управлений по оценкам состояния в (5), (6) появились следующие изменения:

$$x_M(j=k) = \hat{x}(k),\ x_M^{(s)}(j=k) = S\hat{x}(k).$$

При реализации предложенных алгоритмов необходимо накладывать ограничения на значения векторов состояния и управления. Так как объемы товара на рынке и у потребителя не могут быть отрицательными, на первые две компоненты вектора состояния накладывается ограничения:

$$x_i(k) = \begin{cases} x_i(k),\ x_i(k) \geq 0, \\ 0,\ x_i(k) < 0,\ i = 1,2. \end{cases}$$

Такие же ограничения устанавливаются и на соответствующие компоненты вектора оценок состояния.

Ограничения на объем поставок, т.е. на компоненты вектора $u(k)$, задаются следующим образом:

$$u(k)=\begin{cases}0,\ u(k)<U_{\min},\\ u(k),\ U_{\min}\le u(k)\le U_{\max},\\ U_{\max},\ u(k)>U_{\max},\end{cases}$$

где значения $U_{\min}$, $U_{\max}$ задаются исходя из транспортных издержек и экономической обоснованности поставки т.е. прибыль от реализации товара должна превышать затраты на его доставку.

## 3. Численные результаты

Для численного моделирования использовались данные работы торговой фирмы, занимающейся продажей продуктов питания. Моделирование проводилось по данным закупок, хранения и сбыта одного вида товара. Информация о векторе состояния являлась неполной, так как отсутствовала информация об объеме товара у потребителя. Это определилось матрицей

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Чтобы защитить компанию от расходов, связанных с неэффективным управлением складскими остатками, главным является слежение за прибылью и объемом товара на складе. Это поможет вычислить оптимальный объем складских остатков.

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Результаты моделирования приведены на рис. 1, 2.

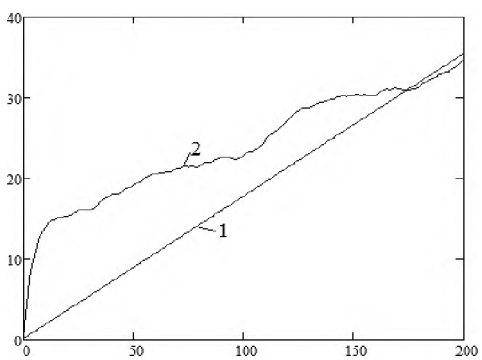


Рис. 1. Желаемая прибыль $w_z(k)$ – (1), реализованная прибыль – (2)

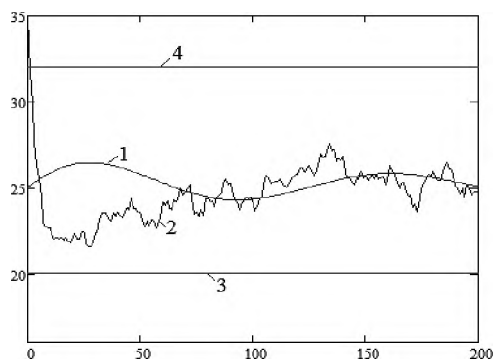


Рис. 2. Желаемый объем на складе $\varphi_z(t)$ – (1), реализованный – (2), $z_{\min}(k)$ – (3), $z_{\max}(k)$ – (4)

На рис. 2 значения $z_{\max}$ и $z_{\min}$ задают ограничения на объем складских помещений, выделенных для хранения рассматриваемого товара.

Результаты, приведенные на графиках, иллюстрируют работоспособность и качество предложенных алгоритмов, так как удовлетворяются все требования, предъявляемые к работе системы управления.

## Заключение

В данной работе построена математическая модель экономической системы, описывающая процесс поставок, хранения и сбыта продукции. Для задания объемов поставок была сформирована система управления на основе модификации критерия обобщенной работы с матрицей чувствительности. Управление формируется при отсутст-

вии информации о потребителе по оценкам состояния, при слежении за желаемым уровнем прибыли и заданным объемом товара на складе. Результаты, полученные с помощью моделирования, проиллюстрированы графиками, которые показывают хорошее качество работы управления.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Решетникова Г.Н., Смагин В.И Адаптивное управление линейным динамическим объектом на основе принципа минимума обобщенного критерия / Г.Н. Решетникова, В.И Смагин // Оптимизация систем управления и фильтрации. – Томск. – 1988. – С. 48–52.

2. Горский А.А. Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса / А.А. Горский, И.Г. Колпакова, Б.Я. Локшин // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1998. – № 1. – С. 144–148.

3. Решетникова Г.Н. Адаптивное управление поставками рекламой Алгоритмы. Модели. Ограничения. / Г.Н. Решетникова. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 152 p.

4. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом / В.Н. Буков. – М.: Наука, 1987. – 232 с.

5. Решетникова Г.Н. Моделирование систем: учеб. пособие / Г.Н. Решетникова. – Федеральное агентство по образованию, Томск. гос. ун-т систем упр и радиоэлектротехники. 2-е изд., перераб и доп. – Томск: Томск, гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 441 с.

6. Решетникова Г.Н. Адаптивные системы: учеб. пособие / Г.Н. Решетникова. – Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2016. – 112 с.