

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
V Международной молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 19–20 мая 2017 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Заключение

В данной работе представлены результаты экспериментального изучения процедуры CUSUM для обнаружения разладки в процессе авторегрессии первого порядка со стандартными гауссовскими шумами. Результаты моделирования показывают наличие логарифмической асимптотики для устойчивого процесса при достаточно больших значениях порогов, используемых для вычисления системы базовых статистик и реализации алгоритма CUSUM.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lai T.L. Information bounds and quick detection of parameter changes in stochastic systems // IEEE Transaction of Information Theory. – 1998. – Vol. 44. – № 7. – P. 2917–2929.
2. Lorden G. Procedures for reacting to a change in distribution // The Annals of Mathematical Statistics. – 1971. – Vol. 42. – № 6. – P. 1897–1908.
3. Tartakovsky A. Sequential analysis: Hypothesis testing and changepoint detection / A. Tartakovsky, I. Nikiforov, M. Basseville. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2014.
4. Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем / В.В. Конев. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 267 с.
5. Конев В.В. Об одном свойстве мартингалов с условно-гауссовскими приращениями и его применении в теории неасимптотического вывода // Доклады академии наук. – 2017. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 676–680.

ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ ПРИ ПОМОЩИ ПРОЦЕДУРЫ CUSUM ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ И ЗАВИСИМЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

А.В. Пупков

Томский государственный университет
andrewpupkov@gmail.com

Введение

В прикладных задачах анализа временных рядов, построения математических моделей, в теории управления и идентификации, фильтрации и прогнозирования широко используются стохастические динамические системы, описываемые стохастическими разностными и стохастическими дифференциальными уравнениями. Как правило, эти уравнения задаются с точностью до некоторых параметров, которые могут изменяться в процессе функционирования системы. Одной из важнейших прикладных задач в статистике случайных процессов и теории временных рядов является задача скорейшего обнаружения разладки – момента скачкообразного изменения параметров системы. Задача обнаружения разладки заключается в построении процедуры, которая позволяет наискорейшим образом обнаружить этот момент. Задачи обнаружения разладки разделены на две группы. Задачи первой группы представляют апостериорное обнаружение разладки, т.е. поиск момента разладки на основе анализа большого массива данных, включающих разладку. Задачи второй группы заключаются в наискорейшем обнаружении момента изменения некоторых свойств наблюдаемого процесса. В данной работе будет рассмотрена задача второй группы, основанная на применении алгоритма кумулятивных сумм (CUSUM).

1. Статистика логарифмического правдоподобия

В большинстве параметрических алгоритмов кумулятивных сумм предполагается априорное знание функций распределения поведения случайного процесса до и после момента разладки. Теоретическое исследование CUSUM началось со схемы независимых наблюдений. Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – последовательность независимых случайных величин, при том, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v$ имеют плотность распределения $f_0(x)$, а $\xi_{v+1}, \xi_{v+2}, \dots$ имеют плотность $f_1(x)$, при условии, что функции плотностей

$f_0(x)$, $f_1(x)$ определены на множестве X , v – точка смены функции распределения (точка разладки). Многие алгоритмы обнаружения разладки основаны на последовательном применении к элементам выборки функции логарифмического правдоподобия. Функция логарифмического правдоподобия имеет вид:

$$g(x) = \log \frac{f_1(x)}{f_0(x)}.$$

Подставляя в данную функцию последовательно наблюдения x_1, x_2, \dots, x_n , получаем последовательность статистик, поведение которых меняется в момент разладки. Целесообразность использования данных статистик вызвана тем, что она преобразует элементы выборки к последовательности, обладающей определенными полезными свойствами. По свойствам логарифма имеем:

1. Если в точке $x \in X$ отношение плотностей $f_1(x)/f_0(x) \geq 1$, то $g(x) \geq 0$.
2. Если в точке $x \in X$ отношение плотностей $0 < f_1(x)/f_0(x) < 1$, то $g(x) < 0$.

Функция логарифмического правдоподобия реагирует на изменение закона распределения случайной величины ξ_i , $i \geq 1$, если $f_1(x) \neq f_0(x)$, и подчиняется определенным закономерностям. Именно эти закономерности и лежат в основе CUSUM-метода. Остановимся подробнее на процедуре кумулятивных сумм.

2. Алгоритм кумулятивных сумм (CUSUM) для схемы независимых наблюдений

Алгоритм CUSUM был предложен Е.С. Пэйджем для обнаружения скачка среднего в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Данная идея стала основой для дальнейшего развития теории обнаружения разладок. Работа Пэйджа впервые была опубликована в научном журнале *Biometrika* в 1954 г., без обоснования оптимальности алгоритма [4].

Рассмотрим последовательность независимых наблюдений, описанных выше. Обозначим через P_v распределение наблюдаемого процесса ($v = 1, 2, \dots$) в случае, когда разладка происходит в момент v . При отсутствии разладки ($v = \infty$) распределение наблюдений обозначают P_0 .

Основными характеристиками процедуры T обнаружения разладки являются среднее время между ложными тревогами и среднее значение величины запаздывания. Процедура обнаружения является хорошей если она обеспечивает малую величину запаздывания при больших временных промежутках между ложными тревогами. В качестве меры запаздывания Г. Лорден предложил использовать следующую величину

$$\bar{E}_1 T = \sup_{v \geq 1} \text{ess sup } E_v \left[(T - v + 1)^+ \mid X_1, X_2, \dots, X_{v-1} \right], \quad (1)$$

здесь в правой части используется условное математическое ожидание относительно наблюдений до момента разладки. Поскольку условное математическое ожидание является функцией от случайных величин, то логично использовать существенный супремум вместо верхней грани \sup .

Лорден поставил следующую оптимизационную задачу: в классе всех процедур T обнаружения разладки, удовлетворяющих условию $E_0 T \geq \gamma$, где $\gamma > 0$ – заданная константа, найти процедуру, минимизирующую величину запаздывания $\bar{E}_1 T$.

Процедура обнаружения разладки Пэйджа для схемы независимых наблюдений имеет следующий вид:

$$N = \inf \left\{ n : \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n \log \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq c \right\},$$

где c – пороговое значение, выбираемое из условия $E_0(T) = \gamma$. Лорденом было доказано, что данная процедура является асимптотически оптимальной при $\gamma \rightarrow \infty$ и имеет вид:

$$\bar{E}_1(N) \sim \inf_{T: E_0(T) \geq \gamma} \bar{E}_1(T) \sim \frac{\log \gamma}{I(f_1 | f_0)},$$

где $I(f_1 | f_0) = E^{(1)} \log \frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)}$ – относительная энтропия или информация по Кульбаку-Лейблеру [3].

Далее будет рассмотрен более общий случай процедуры CUSUM для случайных процессов с зависимыми значениями.

3. Алгоритм кумулятивных сумм (CUSUM) для схемы зависимых наблюдений

Задачу скорейшего обнаружения разладки в динамических системах с зависимыми наблюдениями была впервые исследована в общей постановке в работе Т. Лая. Лай предполагает что в момент разладки происходит смена условных распределений, а именно, переход с условной плотности распределения $f_0(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$ на условную плотность распределения $f_1(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$ в момент разладки v .

Статистика логарифмического правдоподобия по наблюдениям X_1, \dots, X_i вычисляется по формуле

$$Z_i = \log \frac{f_1(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})}{f_0(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})}.$$

Процедура CUSUM записывается аналогично случаю с независимыми наблюдениями

$$N = \inf \left\{ n : \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n Z_i \geq c \right\}.$$

При этом предполагается, что величина $n^{-1} \sum_{i=v}^{v+n} Z_i$ сходится по вероятностной мере $P^{(n)}$ к некоторому положительному числу I .

Для обобщения результата Лордена на процессы с зависимыми значениями Лай налагает определенные требования на поведение системы статистик Z_i , предполагая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \geq 1} P^{(v)} \left\{ \max_{1 \leq n} \sum_{i=v}^{v+n} Z_i \geq I(1 + \delta)n \mid X_1, \dots, X_{v-1} \right\} = 0, \quad \forall \delta > 0, \quad (2)$$

где I – некоторая положительная константа. В работе Лая была установлена асимптотическая нижняя граница для среднего времени запаздывания, которая сформулирована в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть условие (2) выполнено для некоторой положительной постоянной I . Тогда при $\gamma \rightarrow \infty$ выполняются асимптотические неравенства

$$\inf \left\{ \bar{E}_1(T) : E_0(T) \geq \gamma \right\} \geq \inf \left\{ \sup_{v \geq 1} E^{(v)}(T - v \mid T \geq v) : E_0(T) \geq \gamma \right\} \geq (I^{-1} + o(1)) \log \gamma,$$

где $\bar{E}_1(T)$ определено в (1).

Лай доказал, что при выполнении некоторого дополнительного требования процедура CUSUM является оптимальной, т.е. для нее величина запаздывания ограничена сверху величиной $(I^{-1} + o(1)) \log \gamma$ [2].

В данной работе будет рассматриваться задача обнаружения разладки в процессе с зависимыми значениями с просеянными наблюдениями. Остановимся на этой модели подробнее.

4. Авторегрессионная модель с разладкой и описание наблюдаемого процесса

Рассмотрим модель авторегрессии первого порядка AR(1), в которой в определенный момент времени ν происходит смена параметра авторегрессии с a_0 на a_1 :

$$J_k = \left(a_0 \mathbf{1}_{\{k \leq \nu\}} + a_1 \mathbf{1}_{\{k > \nu\}} \right) J_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \geq 1,$$

где $a_0 \neq a_1$ – известные параметры, $\mathbf{1}_{\{x\}}$ – индикаторная функция условия x , ε_k – белый гауссовский шум, J_0 – независимое от ε_k начальное значение процесса, ν – момент разладки.

Целью ставится обнаружение момента времени ν по некоторым (доступным) наблюдениям данного процесса.

Рассмотрим поток восстановления следующего вида

$$N_k = \sum_{m \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_m \leq k\}}, \quad k \geq 1, \quad S_m = \sum \xi_i,$$

где S_m – моменты наступления событий (моменты восстановления), ξ_i – интервалы времени между наступлениями событий, являющиеся независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения вида $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, λ – известный параметр (мешающий параметр). Поток восстановления $\{N_k\}_{k \geq 0}$ и процесс $\{J_k\}_{k \geq 0}$ независимы.

Рассмотрим процесс $\tilde{J}_k = J_{N_k}$, который является подпоследовательностью начального процесса. Для наблюдения доступны значения процесса $\{\tilde{J}_k\}_{k \geq 0}$ в моменты времени, когда произошло хотя бы одно событие. Обозначим этот процесс через X_k . Получим

$$X_k = \tilde{J}_{\sigma_k}, \quad k \geq 0, \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_k = \inf \{l \geq \sigma_{k-1} + 1 : N_l - N_{\sigma_{k-1}} > 0\}, \quad k \geq 1,$$

т.е. $\{X_k\}_{k \geq 0}$ представляет из себя подпоследовательность процесса $\{J_k\}_{k \geq 0}$, элементы которого открываются для наблюдения, если реализовалось хотя бы одно событие.

Для обнаружения момента разладки необходимо обследовать полученный процесс X_k и найти момент времени когда он начнет соответствовать следующей модели:

$$X_k = \theta_k X_{k-1} + \eta_k, \quad k \geq \nu + 1, \quad \eta_k = \sum_{j=1}^{s_k} a_1^{s_k - j} \varepsilon_{j + \sigma_{k-1}}, \quad s_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}, \quad \theta_k = a_1^{s_k}.$$

Введем условные плотности вида

$$f(x, y; a_i) = f_i(y | x) = \sum_{k \geq 1} \gamma_k \varphi_{i,k}(y, x), \quad i = 0, 1,$$

где $\gamma_k = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda(k-1)}$ и $\varphi_{i,k}(y, x) = \frac{1}{\zeta_{i,k} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - a_i^k x)^2}{2\zeta_{i,k}^2}}$, $\zeta_{i,k}^2 = \frac{1 - a_i^{2k}}{1 - a_i^2}$. Далее найдем статистики Z_j для наблюдаемого процесса X_k следующего вида:

$$Z_j = g(X_{j-1}, X_j), \quad j \geq 1, \quad g(x, y) = \ln \frac{f(x, y; a_1)}{f(x, y; a_0)},$$

и путем применения алгоритма CUSUM найдем момент разладки [1].

Остановимся подробно на результатах моделирования процедуры обнаружения разладки. Рассмотрим случай схемы независимых наблюдений.

5. Моделирование процедуры CUSUM для схемы с независимыми наблюдениями

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$. Пусть случайные величины $\{\xi_k\}_{1 \leq k \leq v} \sim N(\mu_0, \sigma_0)$, а случайные величины $\{\xi_k\}_{k > v} \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, где v – момент разладки. Рассмотрим частный случай, при котором $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 1.5$, $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$, $v = 100$.

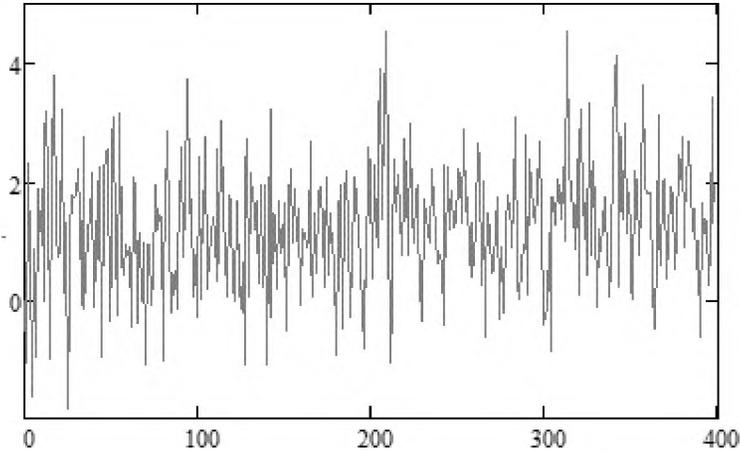


Рис. 1. Реализация последовательности ($\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 1.5$, $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$)

Статистики логарифмического правдоподобия от элементов выборки имеют вид:

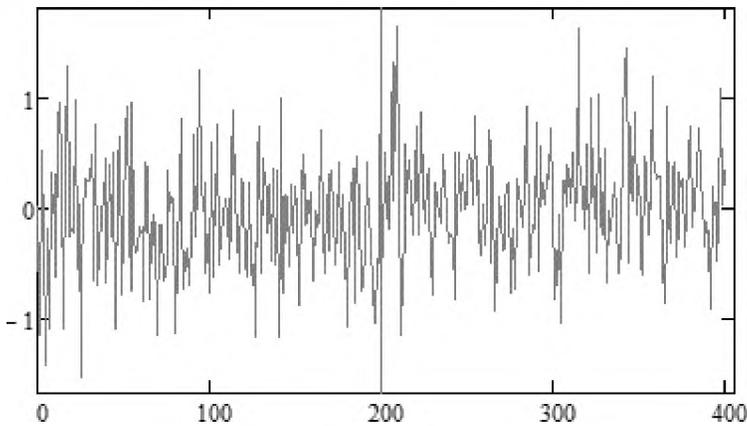


Рис. 2. Статистики $\{Z_k\}_{1 \leq k \leq 400}$

Применяя, процедуру CUSUM, получаем

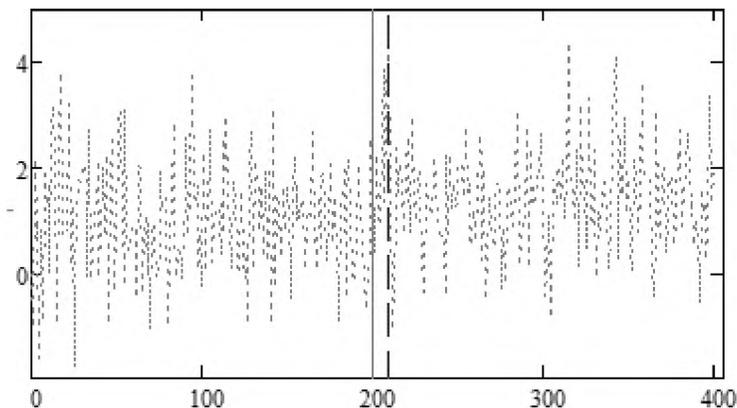


Рис. 3. Применение процедуры CUSUM

На рис. 3 изображена реализация исследуемой последовательности случайных величин $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ с моментом разладки $\nu = 200$. На графике сплошной линией отмечен момент разладки, пунктирной – оценка момента разладки, найденная с помощью алгоритма CUSUM. В данной реализации процедура CUSUM с пороговым значением $c = 4$ обеспечивает запаздывание $\Delta = \hat{\nu} - \nu = 8$.

Покажем эффективность работы алгоритма. Для этой цели рассмотрим ситуации, в которых происходила смена математического ожидания в момент разладки, смена дисперсии в момент разладки, а также рассмотрим комбинацию этих ситуаций. Произведем для каждого конкретного случая по 1000 реализаций последовательности $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ и рассчитаем среднее значение величины запаздывания $\bar{\Delta}$, долю случаев, когда была обнаружена разладка δ_{true} , долю случаев, когда разладка не была обнаружена δ_{false} , и долю случаев, на которые приходились ложные тревоги, δ_{FA} (ситуация когда процедура сигнализировала о разладке при ее отсутствии). Пусть момент разладки $\nu = 200$. Приведем результаты моделирования в табл. 1.

Таблица 1

Результаты применения процедуры CUSUM

N	μ_0	μ_1	σ_0	σ_1	c	$\bar{\Delta}$	δ_{true}	δ_{false}	δ_{FA}
1	0	0	0.7	1	6	6.944	0.982	0.002	0.016
2	0	0	5	3.5	5	37.701	0.899	0.022	0.079
3	0	0	5	3.5	6	51.061	0.968	0.008	0.024
4	1	1.3	1	1	4	67.524	0.909	0.002	0.089
5	4	3.7	1	1	3	40.034	0.725	0.014	0.261
6	4	3.7	1	1	4	67.133	0.909	0.008	0.083
7	4	3.7	1	1.2	5	20.023	0.962	0.004	0.034
8	4	1	1	2	10	0.002	1	0	0

Результаты моделирования, приведенные в табл. 1, указывают на работоспособность алгоритма. Первые 6 случаев были рассмотрены для ситуации изменения одного из параметров (среднее, дисперсия). Реализации под номерами 2, 3 и 5, 6 наглядно указывают на прямую зависимость между величиной порогового значения c и средним значением запаздывания $\bar{\Delta}$. Очевидно, что при увеличении порога уменьшится доля ложных тревог δ_{FA} среди всех реализаций, и увеличится доля реализаций, в которых разладка будет обнаружена δ_{true} . Результат моделирования под номером 7 демонстрируют тот факт, что, чем сильнее отличаются распределения, тем лучше алгоритм CUSUM работает, т.е. уменьшается среднее время запаздывания и доля ложных тревог,

а также увеличивается доля случаев, при которых разладка обнаружена успешно. Случай под номером 8 обобщает выводы случая 7.

Заключение

В данной работе описаны процедуры поиска момента разладки при помощи процедуры CUSUM для процесса с зависимыми и с независимыми наблюдениями, описана схема зависимых наблюдений с просеиванием, произведено моделирование для схемы независимых наблюдений и приведены статистические результаты моделирования, которые показывают работоспособность данного алгоритма и применимость его на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Girardin V. Kullback-Leibler Approach to CUSUM Quickest Detection Rule for Markovian Time Series / V. Girardin, V. Konev, S. Pergamenchtchikov // The Sixth International Workshop in Sequential Methodologies (IWSM 2017). – 2017.
2. Lai T.L. Information bounds and quick detection of parameters changes in stochastic system // IEEE Transactions on Information theory. – 1998. – 44. – P. 2917–2929.
3. Lorden G. Procedures for Reacting to a Change in Distribution // Annals Math. Stat. – 1971. – 42. – P. 1897–1908.
4. Page E.S. Continuous inspection schemes // Biometrika. – 1954. – 41. – P. 100–115.

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Н.Д. Дубина, С.И. Колесникова

Томский государственный университет
dubina-nina@mail.ru, skolesnikova@yandex.ru

Введение

Целью работы является продолжение исследований условий управляемости объекта третьего порядка [1]. Рассматривается постановка задачи в достаточно общем виде, затем приводится пример решения прикладной задачи применительно к экономическим приложениям, базовым математическим описанием которого является модель Лоренца [2].

Базовым методами, используемыми при выводе системы управления, являются метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [1] и метод нелинейной адаптации [3] на заданном многообразии, как обобщение АКАР.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейный объект 3-го порядка с плохо формализуемой правой частью:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) + z(t) + u(t),\end{aligned}\tag{1}$$

$x \in R^2$ – вектор состояний, $u \in R$ – управление, $f \in R^2$ – нелинейная векторная функция, $z(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение. Для системы вида (1) ставится задача управления $u(t) = U(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ в пространстве состояний, обеспечивающего перевод объекта управления (1) из произвольного начального состояния в некоторой окрестности фазового пространства в окрестность целевого многообразия $\psi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 0$, и асимптотически устойчивое состояние объекта в его окрестности. Делаются естественные предположения: 1) существует устойчивая целевая система