МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

V Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 19–20 мая 2017 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

$$h(u)=\sum_{k=0}^{2}H_k(u)=F_2\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)\approx F_1\left(\frac{u}{\varepsilon}\right),$$

имеем асимптотику первого порядка

$$h^{(1)}(u)=R_2\exp\left\{ju\frac{\lambda-2\mu}{\alpha}\right\},\ R_2=h^{(1)}(0).$$

Таким образом, был получен вид асимптотической характеристической функции первого порядка с математическим ожиданием $\frac{\lambda-2\mu}{\alpha}$.

Заключение

В настоящей работе была исследована математическая модель RQ-системы M|M|2 с нетерпеливыми заявками и был найден вид асимптотики первого порядка характеристической функции числа заявок в источнике повторных вызовов в условии долгой терпеливости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А. Теория массового обслуживания / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.

2. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral. – Springer, 2008.

3. Falin G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – Chapman & Hall, London, 1997.

4. Roszik J. Retrial queues in the performance modelling of cellular mobile networks using MOSEL / J. Roszik, J. Sztrik, C. Kim // International Journal of Simulation. – 6. – 2005. – P. 38–47.

5. Kuznetsov D. Analysis of non-Markovian models of communication networks with adaptive protocols of multiple random access / D. Kuznetsov, A. Nazarov // Automation and Remote Control. – 2001.– № 5. – P. 124–146.

6. Martin M. Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units / M. Martin, J. Artalejo // Advances in Applied Probability. – 1995. – № 27. – P. 840–861.

7. Назаров А.А Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С MMPP ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА

А.А. Галилейская, Е.Ю. Лисовская
Томский государственный университет
lusta.nastya@mail.ru, ekaterina_lisovs@mail.ru

Введение

Задача исследования систем массового обслуживания (СМО), в которых каждая поступающая в систему заявка имеет случайный объем [1,2], играет важную роль при моделировании работы самых разнообразных технических устройств, в частности, современных информационно-вычислительных систем.

В настоящее время известны работы по математическому моделированию и исследованию таких систем, однако аналитические результаты удалось получить лишь в предположении, что входящий поток пуассоновский или обслуживание имеет экспоненциальное распределение. Тем временем, пуассоновский поток не всегда верно описывает реальные потоки, и «обслуживание» не всегда соответствует экспоненциальному закону. Поэтому актуальными являются исследования систем с непуассоновскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания [3,4].

Двухфазные СМО представляют собой последовательное обслуживание требований, где, завершая обслуживание на первой фазе, заявки образуют входящий поток для второй фазы [5].

Настоящая работа посвящена исследованию двухфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой из фаз, входящим марковски модулированным пуассоновским потоком требований случайного объема и произвольным временем обслуживания (не зависящим от объема заявок).

1. Постановка задачи

Рассмотрим двухфазную СМО с неограниченным числом приборов. На вход системы поступает MMPP-поток заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)=1,2,...,K$, задающийся матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$ размера $K\times K$ и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}=diag\{\lambda_1,...,\lambda_k\}$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v>0$, и $G(y)=P\{v<y\}$ – функция распределения случайной величины *v*. Объемы различных требований независимы. Считаем, что продолжительность обслуживания заявки на первой фазе имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов, которую обозначим $B_1(x)$, и на второй фазе – $B_2(x)$. После обслуживания на первой фазе заявка с тем же объемом переходит на вторую фазу, после обслуживания на второй фазе заявка покидает систему и «уносит» с собой свой объем.

Пусть $i_k(t)$ – число заявок на *k*-й фазе в момент времени *t*, $V_k(t)$ – суммарный объем заявок на *k*-й фазе в момент времени *t*, $k=1,2$ – номер фазы.

Поставим задачу нахождения характеристик четырехмерного случайного процесса $\{i_1(t),V_1(t),i_2(t),V_2(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания [6].

Изобразим три параллельных оси времени, пронумерованных от 0 до 2 (рис. 1). Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 – второму.

Пусть имеется набор функций $S_1(t)$, $S_2(t)$, значения которых лежат в диапазоне $[0,1]$ и обладают свойством $S_1(t)+S_2(t)\le 1$ для любых *t*.

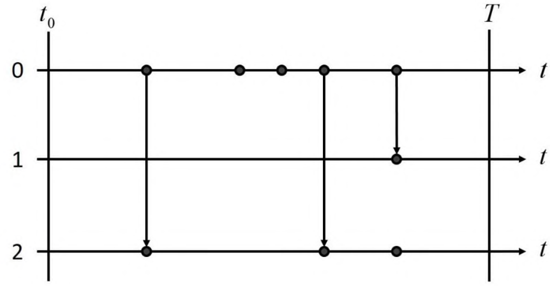

Рис. 1. Просеивание входящего потока

Событие входящего потока может просеяться только на одну из осей 1, 2, либо ни на одну. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t>t_0$,

– сформирует событие потока на оси 1, т.е. к моменту времени T не закончит обслуживание на первой фазе, равна $S_1(t)=1-B_1(T-t)$;

– сформирует событие потока на оси 2, т.е. к моменту времени T закончит обслуживание на первой фазе и не закончит на второй, равна $S_2(t)=B_1(T-t)-B_2^*(T-t)$, где $B_2^*(\tau)=(B_1*B_2)(\tau)$ – свертка функций распределения $B_1(x)$, $B_2(x)$ длительности обслуживания на фазах системы;

– не сформирует событие ни на одной из осей, т.е. к моменту времени T заявка закончит обслуживание на обеих фазах и покинет систему, равна $S_0(t)=1-S_1(t)-S_2(t)$.

Обозначим $n_k(t)$ – число событий, наступивших на k-й оси просеянного потока до момента t, $W_k(t)$ – суммарный объем просеянных заявок на k-ю ось.

Как показано в [7], многомерное распределение вероятностей числа заявок на стадиях системы в момент времени T совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{i_1(T)=m_1,i_2(T)=m_2\}=P\{n_1(T)=m_1,n_2(T)=m_2\}$$

для любых $m_1,m_2=0,1,2,\ldots$. Нетрудно показать, что для исследуемого процесса $\{i_1(t),V_1(t),i_2(t),V_2(t)\}$ справедливо

$$\begin{aligned}&P\{i_1(T)=m_1,V_1(T)<z_1,i_2(T)=m_2,V_2(T)<z_2\}=\\&=P\{n_1(T)=m_1,W_1(T)<z_1,n_2(T)=m_2,W_2(T)<z_2\}\end{aligned} \tag{1}$$

для любых $m_1,m_2=0,1,2,\ldots$ и $z_1,z_2\geq 0$. Будем использовать (1) для исследования процесса $\{i_1(t),V_1(t),i_2(t),V_2(t)\}$ с помощью исследования процесса $\{n_1(t),W_1(t),n_2(t),W_2(t)\}$.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим распределение вероятностей многомерного Марковского процесса

$$P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t)=P\{k(t)=k,n_1(t)=n_1,W_1(t)<w_1,n_2(t)=n_2,W_2(t)<w_2\},$$

где $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова. Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем:

$$\begin{aligned}&P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t+\Delta t)=P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t)+\\&+P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t)\lambda_k\Delta t(1-S_1(t)-S_2(t))+\lambda_k\Delta tS_1(t)\int_0^{w_1}P(k,n_1-1,w_1-y,n_2,w_2,t)dG(y)+\\&+\lambda_k\Delta tS_2(t)\int_0^{w_2}P(k,n_1,w_1,n_2-1,w_2-y,t)dG(y)+\sum_{\nu\neq k}q_{\nu k}\Delta tP(\nu,n_1,w_1,n_2,w_2,t)+o(\Delta t).\end{aligned} \tag{2}$$

Из (2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t)}{\partial t}=-\lambda_k(S_1(t)+S_2(t))P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t)+\\&+\lambda_kS_1(t)\int_0^{w_1}P(k,n_1-1,w_1-y,n_2,w_2,t)dG(y)+\lambda_kS_2(t)\int_0^{w_2}P(k,n_1,w_1,n_2-1,w_2-y,t)dG(y)+\\&+\sum_{\nu}q_{\nu k}P(\nu,n_1,w_1,n_2,w_2,t),\end{aligned} \tag{3}$$

$k=\overline{1,K}$; $n_1,n_2=0,1,2,\ldots$; $w_1,w_2>0$.

Начальное условие для решения $P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t)$ (3) в момент времени t_0 определим в виде

$$P(k,n_1,w_1,n_2,w_2,t_0)=\begin{cases} r(k), & n_1=w_1=n_2=w_2=0,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

$r(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояния цепи Маркова $k(t)$.

Введем характеристические функции вида

$$h(k,u_1,v_1,u_2,v_2,t)=\sum_{n_1=0}^{\infty}e^{ju_1n_1}\int_0^{\infty}e^{jv_1w_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}e^{ju_2n_2}\int_0^{\infty}e^{jv_2w_2}P(k,n_1,dw_1,n_2,dw_2,t),$$

$j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда можем записать следующие уравнения:

$$\frac{\partial h(k,u_1,v_1,u_2,v_2,t)}{\partial t}=\sum_{\nu}q_{\nu k}h(\nu,u_1,v_1,u_2,v_2,t)+$$

$$+\lambda_k h(k,u_1,v_1,u_2,v_2,t)\left[S_1(t)\left(e^{ju_1}G^*(v_1)-1\right)+S_2(t)\left(e^{ju_2}G^*(v_2)-1\right)\right],\ k=\overline{1,K},$$

$$G^*(v)=\int_0^{\infty}e^{jvy}dG(y).$$

Перепишем эту систему в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t)\left[\mathbf{\Lambda}\left(S_1(t)\left(e^{ju_1}G^*(v_1)-1\right)+S_2(t)\left(e^{ju_2}G^*(v_2)-1\right)\right)+\mathbf{Q}\right]\quad(4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t_0)=\mathbf{r},$$

где

$$\mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t)=\left[h(1,u_1,v_1,u_2,v_2,t),\ldots,h(K,u_1,v_1,u_2,v_2,t)\right],$$

$\mathbf{r}=\left[r(1),\ldots,r(K)\right]$ – вектор стационарного распределения вероятностей управляющей цепи Маркова $k(t)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases}\mathbf{rQ}=\mathbf{0},\\ \mathbf{re}=1,\end{cases}\qquad(5)$$

и $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

3. Метод асимптотического анализа

Применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции рассматриваемого случайного процесса при определенных условиях. Для нашей системы мы будем рассматривать условие высокой интенсивности входящего потока [3,4,6,7].

Подставим в (4) $\mathbf{\Lambda}=N\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{Q}=N\mathbf{Q}_1$, где $N\to\infty$ – некоторый параметр, который используется для асимптотического анализа. Тогда можно записать:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t)}{\partial t}=$$
$$=\mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t)\left[\mathbf{\Lambda}\left(S_1(t)\left(e^{ju_1}G^*(v_1)-1\right)+S_2(t)\left(e^{ju_2}G^*(v_2)-1\right)\right)+\mathbf{Q}\right]\qquad(6)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,v_1,u_2,v_2,t_0)=\mathbf{r}.\qquad(7)$$

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция первого порядка четырехмерного случайного процесса $\{n_1(t), W_1(t), n_2(t), W_2(t)\}$ имеет вид

$$\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \mathbf{r}\exp\left\{N\kappa_1\left[\left(ju_1 + jv_1a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_1(\tau)d\tau + \left(ju_2 + jv_2a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_2(\tau)d\tau\right]\right\},$$

где $\kappa_1 = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{e}$ – средняя интенсивность входящего потока, a_1 – средний объем заявок.

Доказательство. Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon,\ u_1 = \varepsilon x_1,\ v_1 = \varepsilon y_1,\ u_2 = \varepsilon x_2,\ v_2 = \varepsilon y_2,\ \mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon).$$

Перепишем задачу (6)–(7) с учетом введенных обозначений

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon)\times$$
$$\times\left\{\mathbf{Q}_1 + \mathbf{\Lambda}_1\left[S_1(t)\left(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon y_1) - 1\right) + S_2(t)\left(e^{j\varepsilon x_2}G^*(\varepsilon y_2) - 1\right)\right]\right\} \tag{8}$$

с начальным условием

$$\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \tag{9}$$

Найдем асимптотическое решение задачи (8)–(9) в два этапа.

Этап 1. Подставляя в (8) $\varepsilon = 0$, получим $\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$. Сравнивая это уравнение с первым в системе (5), можно сделать вывод, что его можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \mathbf{r}\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t), \tag{10}$$

где $\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t_0) = 1. \tag{11}$$

Этап 2. Умножим (8) на вектор **e**, подставим (10), разделим результаты на ε и произведем асимптотический переход $\varepsilon \to 0$. Тогда, учитывая, что $\mathbf{Q}_1\mathbf{e} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$, для функции $\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t)\kappa_1\left[S_1(t)\left(jx_1 + jy_1a_1\right) + S_2(t)\left(jx_2 + jy_2a_1\right)\right]. \tag{12}$$

Проинтегрировав уравнение (12) от t_0 до t, учитывая начальное условие (11), получим

$$\Phi_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \exp\left\{\kappa_1\left[\left(jx_1 + jy_1a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_1(\tau)d\tau + \left(jx_2 + jy_2a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_2(\tau)d\tau\right]\right\}.$$

Подставляя это выражение в (10) и делая обратные замены, получим

$$\mathbf{H}(u_1, v_1, u_2, v_2, t) = \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) =$$
$$= \mathbf{r}\exp\left\{\kappa_1\left[\left(jx_1 + jy_1a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_1(\tau)d\tau + \left(jx_2 + jy_2a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_2(\tau)d\tau\right]\right\} = \tag{13}$$
$$= \mathbf{r}\exp\left\{N\kappa_1\left[\left(ju_1 + jv_1a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_1(\tau)d\tau + \left(ju_2 + jv_2a_1\right)\int_{t_0}^{t} S_2(\tau)d\tau\right]\right\}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Умножив (13) на вектор-столбец **e**, полагая $t = T$ и $t_0 \to -\infty$, используя (1), получим асимптотическую характеристическую функцию первого порядка для случайного процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ в стационарном режиме

$$h(u_1, v_1, u_2, v_2) = \exp\left\{N\kappa_1\left[(ju_1 + jv_1a_1)b_1 + (ju_2 + jv_2a_1)b_2\right]\right\},$$

$$b_1 = \int_0^\infty (1 - B_1(\tau))d\tau,\ b_2 = \int_0^\infty \left(B_1(\tau) - \int_0^\tau B_2(\tau - y)dB_1(y)\right)d\tau.$$

Из (13) очевидно, что $M\{i_1(t)\} = N\kappa_1 b_1$, $M\{i_2(t)\} = N\kappa_1 b_2$, $M\{V_1(t)\} = N\kappa_1 a_1 b_1$, $M\{V_2(t)\} = N\kappa_1 a_1 b_2$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель системы MMPP|(GI|∞)2, с помощью метода асимптотического анализа получено асимптотическое приближение моментов первого порядка числа заявок на фазах системы и их суммарного объема в условии высокой интенсивности входящего потока. Дальнейшие исследования заключаются в получении асимптотического приближения моментов второго порядка и определении области применимости полученных результатов.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихоненко О.М. Системы обслуживаний требований случайной длины с ограничениями // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 10. С. 126–134.

2. Тихоненко О.М. Модели обслуживания неоднородных требований и их применение для расчета объема памяти систем обработки информации : автореферат дис. ... доктора технических наук : 05.13.16 / Томск. ун-т. - Томск, 1991. 38 с.

3. Lisovskaya E. The total capacity of customers in the MMPP/GI/∞ queueing system / E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах. Под общей редакцией В. М. Вишневского и К. Е. Самуйлова. – 2016. – С. 313-325.

4. Кононов И.А., Лисовская Е.Ю. Исследование бесконечнолинейной СМО MAP|GI|∞ с заявками случайного объема / И.А. Кононов, Е.Ю. Лисовская // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016): материалы XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (12–16 сентября 2016 г.). Часть 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. – С. 67–71.

5. Галилейская А.А. Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в двухфазной системе массового обслуживания с простейшим входящим потоком // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции МНСК–2017: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. – С. 105.

6. Moiseev A. Queueing network MAP/(GI/∞)K with high-rate arrivals / A. Moiseev, A. Nazarov // European Journal of Operational Research. – 2016. – Т. 254. – № 1. – С. 161–168.

7. Моисеев А.Н. Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP/GI/∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 56-65.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л.А. Нежельская, Д.А. Тумашкина

Томский государственный университет

ludne@mail.ru, diana1323@mail.ru

Введение

В настоящее время в глобальных компьютерных сетях функционируют информационные потоки сообщений, математической моделью которых являются дважды сто-