МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

V Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 19–20 мая 2017 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Таблица3

Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при $\lambda = 0{,}9$, $\gamma = \mu = 1$

σ	0,1	0,05	0,03	0,01	0,005
Δ	0,041	0,026	0,025	0,018	0,011

В приведенных выше примерах качество оценивания становится приемлемым (расстояние Колмогорова меньше 0,05) уже при $\sigma = 0{,}01$. Также можно отметить, что расстояние Колмогорова уменьшается при увеличении загрузки системы.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель двухфазной RQ-системы M|M|1 и с помощью метода асимптотического анализа получено асимптотическое распределение числа на орбите в условии большой задержки заявок на орбите, а также приведено сравнение полученных результатов с имитационной моделью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
2. Choudhury G.A single server queueing system with two-phases of service and vacations // QTQM. – 2008. – Vol. 5(1). – P. 33–49.
3. Doshi B.T. Analysis of a two phase queueing system with general service times // Operations Research Letters. – 1991. – Vol. 10. – P. 265–272.
4. Falin G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London: Chapman & Hall, 1997. – 320 p.
5. Krishna C.M. A study of two-phase service / C.M. Krishna, Y.H. Lee // Operations Research Letters. – 1990. – Vol. 9. – P. 91–97.
6. Krishnakumar B. An M/G/1 retrial queueing system with two phases of services and preemptive resume / B. Krishnakumar, D. Arivudainambi // Annals of Operations Research. – 2002. – Vol. 113. – P. 61–79.
7. Nazarov A.A. Method of asymptotic semiinvariants for studying a mathematical model of a random access network / A.A. Nazarov, E.A. Sudyko // Problems of information transmission. – 2010. – Vol. 46. – № 1. – P. 86–102.
8. Анисимова А.А. Имитационное моделирование двухфазной RQ-системы // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика: материалы XX Всероссийской научно-практической конференции (28–29 апреля 2016 г.) / сост. Ю.А. Наумкина. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. – Ч. 1. – С. 81–85.
9. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд., перераб. и доп. / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 336 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M|M|2 С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ В УСЛОВИИ ДОЛГОЙ ТЕРПЕЛИВОСТИ

О.А. Осипович, Е.А. Фёдорова, С.П. Моисеева

Томский государственный университет

osipovich.olga@bk.ru, moiskate@mail.ru, smoiseeva@mail.ru

Введение

Теория массового обслуживания различает несколько классов исследуемых математических моделей (систем массового обслуживания), которые отличаются конфигурацией: числом обслуживающих приборов, типами входящих потоков и дисциплиной обслуживания, наличием или отсутствием очереди [1] и др. Система массового обслуживания с повторными вызовами или RQ-системой (Retrial Queueing System) [2,3] – это модель, в которой заявка не встает в очередь, а находится на орбите, где осуществляет случайную задержку.

Рассматриваемые модели широко применяются для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров [4,5] и др. Это связано, в первую очередь, с тем, что информационные технологии внедряются во все сферы человеческой деятельности.

Характерной чертой RQ-систем является наличие повторных обращений заявок к обслуживающему прибору спустя некоторое случайное время после неудачной попытки обслуживания. Такие ситуации могут быть вызваны не только отсутствием свободных серверов в моменты поступления заявок, но некоторыми техническими причинами. Детальное описание RQ-систем и результатов их исследований представлены в монографиях Г.И. Фалина, Дж. Арталехо [2,3].

Существует достаточно большое число работ, посвященное и RQ-системам с нетерпеливыми заявками. Однако в большинстве из них нетерпеливость понимается в том смысле, что заявка с определенной вероятностью уходит из источника повторных вызовов (ИПВ) после неудачной попытки обслуживания [3,6]. В данной работе предполагается, что терпеливость заявки описывается по экспоненциальному закону.

1. Описание модели

Рассмотрим RQ-систему, т.е. систему массового обслуживания с повторными вызовами с двумя обслуживающими приборами, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ, время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Если поступившая заявка застает хотя бы один из приборов свободным, то она занимает его для обслуживания. Если оба прибора заняты, то заявка переходит в ИПВ (или на орбиту), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к приборам с повторной попыткой обслуживания. Заявки в ИПВ являются нетерпеливыми, т.е. после случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром α, заявка покидает систему. Схематичное представление модели показано на рис. 1.

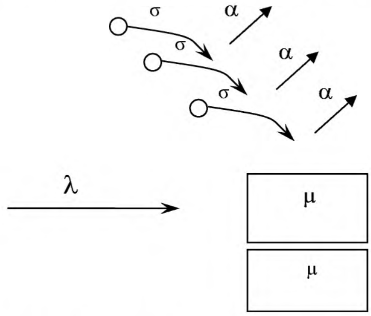

Рис. 1. RQ-система M|M|2 с нетерпеливыми заявками

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Определим двумерный марковский процесс $\{k(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{ прибор свободен,} \\ 1, \text{ один прибор занят,} \\ 2, \text{ оба прибора заняты.} \end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k,i,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок. Для распределения вероятностей $P(k,i,t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_0(0,t)}{\partial t}=\mu P_1(0,t)-\lambda P_0(0,t)+\alpha P_0(1,t),\\ \dfrac{\partial P_1(0,t)}{\partial t}=-(\mu+\lambda)P_1(0,t)+\lambda P_0(0,t)+\sigma P_0(1,t)+\alpha P_1(1,t)+2\mu P_2(0,t),\\ \dfrac{\partial P_2(0,t)}{\partial t}=-(2\mu+\lambda)P_2(0,t)+\lambda P_1(0,t)+\sigma P_1(1,t)+\alpha P_2(1,t),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_0(i,t)}{\partial t}=-(i\sigma+\lambda+i\alpha)P_0(i,t)+\mu P_1(i,t)+\alpha(i+1)P_0(i+1,t),\\ \dfrac{\partial P_1(i,t)}{\partial t}=-(i\sigma+\lambda+i\alpha+\mu)P_1(i,t)+\lambda P_0(i,t)+\sigma(i+1)P_0(i+1,t)+\\ +\alpha(i+1)P_1(i+1,t)+2\mu P_2(i,t),\\ \dfrac{\partial P_2(i,t)}{\partial t}=-(\lambda+i\alpha+2\mu)P_2(i,t)+\lambda P_1(i,t)+\sigma(i+1)P_1(i+1,t)+\alpha(i+1)P_2(i+1,t)+\\ +\lambda P_2(i-1,t),\end{cases}\quad,\ i\geq 1.$$

Для стационарного режима система примет вид:

$$\begin{cases}0=-(i\sigma+\lambda+i\alpha)\Pi_0(i)+\mu\Pi_1(i)+\alpha(i+1)\Pi_0(i+1),\\ 0=-(i\sigma+\lambda+i\alpha+\mu)\Pi_1(i)+\lambda\Pi_0(i)+\sigma(i+1)\Pi_0(i+1)+\alpha(i+1)\Pi_1(i+1)+2\mu\Pi_2(i),\\ 0=-(\lambda+i\alpha+2\mu)\Pi_2(i)+\lambda\Pi_1(i)+\sigma(i+1)\Pi_1(i+1)+\alpha(i+1)\Pi_2(i+1)+\lambda\Pi_2(i-1),\end{cases}\tag{1}$$

$\Pi_k(i)=\lim\limits_{t\to\infty}P_k(i,t)$.

Перейдем к частичным характеристическим функциям $H_k(u)=\sum\limits_i e^{jui}\Pi_k(i)$, $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Учитывая, что $\dfrac{\partial H_k(u)}{\partial u}=j\sum\limits_i ie^{jui}P_k(i)$, (1) перепишется в виде:

$$\begin{cases}0=\left(j\sigma+j\alpha-j\alpha e^{-ju}\right)H_0'(u)+\mu H_1(u)-\lambda H_0(u),\\ 0=\left(j\sigma+j\alpha-j\alpha e^{-ju}\right)H_1'(u)-\lambda H_1(u)-\mu H_1(u)+\lambda H_0(u)-j\sigma e^{-ju}H_0'(u)+2\mu H_2(u),\\ 0=\left(j\alpha-j\alpha e^{-ju}\right)H_2'(u)-\left(2\mu+\lambda-\lambda e^{ju}\right)H_2(u)+\lambda H_1(u)-j\sigma e^{-ju}H_1'(u),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}0=j(\sigma+\alpha(1-e^{-ju}))H_0'(u)+\mu H_1(u)-\lambda H_0(u),\\ 0=j(\sigma+\alpha(1-e^{-ju}))H_1'(u)-\lambda H_1(u)-\mu H_1(u)+\lambda H_0(u)-j\sigma e^{-ju}H_0'(u)+2\mu H_2(u),\\ 0=j\alpha(1-e^{-ju})H_2'(u)-(2\mu+\lambda(1-e^{ju}))H_2(u)+\lambda H_1(u)-j\sigma e^{-ju}H_1'(u).\end{cases}\tag{2}$$

Преобразуем (2) путем прибавления к третьему уравнению системы первых двух:

$$\begin{cases}0=j(\sigma+\alpha(1-e^{-ju}))H_0'(u)+\mu H_1(u)-\lambda H_0(u),\\ 0=j(\sigma+\alpha(1-e^{-ju}))H_1'(u)-\lambda H_1(u)-\mu H_1(u)+\lambda H_0(u)-j\sigma e^{-ju}H_0'(u)+2\mu H_2(u),\\ 0=j\alpha(1-e^{-ju})\sum\limits_{k=0}^{2}H_k'(u)-\lambda(1-e^{ju})H_2(u)+j\sigma(1-e^{-ju})\sum\limits_{k=0}^{1}H_k'(u).\end{cases}\tag{3}$$

Решим (3) методом асимптотического анализа [7] в условии долгой терпеливости (long time of patience), т.е. при $\alpha\to 0$ или при $\varepsilon\downarrow 0$.

2. Первая асимптотика

Введем обозначения: $\alpha=\varepsilon$, $u=\varepsilon w$, $H_0(u)=\varepsilon^2 F_0(w,\varepsilon)$, $H_1(u)=\varepsilon F_1(w,\varepsilon)$, $H_2(u)=F_2(w,\varepsilon)$ где $\varepsilon\downarrow 0$ − бесконечно малая величина. Учитывая, что

$$H_0'(u)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial w}F_0(\omega,\varepsilon),\ H_1'(u)=\frac{\partial}{\partial w}F_1(\omega,\varepsilon),\ H_2'(u)=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial w}F_0(\omega,\varepsilon),$$

система (2) перепишется в виде:

$$\begin{cases}0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))\varepsilon F_0'(w,\varepsilon)+\mu\varepsilon F_1(w,\varepsilon)-\lambda\varepsilon^2F_0(w,\varepsilon),\\ 0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))F_1'(w,\varepsilon)-\varepsilon(\lambda+\mu)F_1(w,\varepsilon)+\lambda\varepsilon F_0(w,\varepsilon)-\\ \quad -j\sigma e^{-j\varepsilon w}\varepsilon F_0'(w,\varepsilon)+2\mu F_2(w,\varepsilon),\\ 0=j\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon\omega})\sum\limits_{k=0}^{2}\varepsilon^{2-k-1}F_k'(w,\varepsilon)+\lambda e^{j\varepsilon w}(1-e^{-j\varepsilon w})F_2(u)+\\ \quad +j\sigma(1-e^{-j\varepsilon w})\sum\limits_{k=0}^{1}\varepsilon^{2-k-1}F_k'(w,\varepsilon).\end{cases}\qquad(4)$$

В третьем уравнении системы (4) сократим на $1-e^{-j\varepsilon\omega}$:

$$\begin{cases}0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))\varepsilon F_0'(w,\varepsilon)+\mu\varepsilon F_1(w,\varepsilon)-\lambda\varepsilon^2F_0(w,\varepsilon),\\ 0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))F_1'(w,\varepsilon)-\varepsilon(\lambda+\mu)F_1(w,\varepsilon)+\lambda\varepsilon F_0(w,\varepsilon)-\\ \quad -j\sigma e^{-j\varepsilon w}\varepsilon F_0'(w,\varepsilon)+2\mu F_2(w,\varepsilon),\\ 0=j\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^{2-k}F_k'(w,\varepsilon)+\lambda e^{j\varepsilon w}F_2(w,\varepsilon)+j\sigma\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{2-k-1}F_k'(w,\varepsilon).\end{cases}$$

Разделим каждое уравнение на ε в минимальной степени:

$$\begin{cases}0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))F_0'(w,\varepsilon)+\mu F_1(w,\varepsilon)-\lambda\varepsilon F_0(w,\varepsilon),\\ 0=j(\sigma+\varepsilon(1-e^{-j\varepsilon w}))F_1'(w,\varepsilon)-(\lambda+\mu)\varepsilon F_1(w,\varepsilon)+\lambda\varepsilon F_0(w,\varepsilon)-\\ \quad -j\sigma e^{-j\varepsilon w}\varepsilon F_0'(w,\varepsilon)+2\mu F_2(w,\varepsilon),\\ 0=j\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^{2-k}F_k'(w,\varepsilon)+\lambda e^{j\varepsilon w}F_2(w,\varepsilon)+j\sigma\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{2-k-1}F_k'(w,\varepsilon).\end{cases}$$

Совершив предельный переход при $\varepsilon\downarrow 0$ и обозначив $F_k(w)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_k(w,\varepsilon)$, получим:

$$\begin{cases}0=j\sigma F_0'(w)+\mu F_1(w),\\ 0=j\sigma F_1'(w)+2\mu F_2(w),\\ 0=jF_2'(w)+\lambda F_2(w)+j\sigma F_1'(w),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}j\sigma F_0'(w)=-\mu F_1(w),\\ j\sigma F_1'(w)=-2\mu F_2(w),\\ -j\sigma F_1'(w)=jF_2'(w)+\lambda F_2(w).\end{cases}\qquad(5)$$

Сложим два последних уравнения системы (5):

$$0=jF_2'(w)+\lambda F_2(w)-2\mu F_2(w).$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$F_2'(w)=j(\lambda-2\mu)F_2(w),\ F_2(w)=R_2e^{jw(\lambda-2\mu)}.$$

Так как допредельная характеристическая функция приближенно равна

$$h(u)=\sum_{k=0}^{2}H_k(u)=F_2\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)\approx F_1\left(\frac{u}{\varepsilon}\right),$$

имеем асимптотику первого порядка

$$h^{(1)}(u)=R_2\exp\left\{ju\frac{\lambda-2\mu}{\alpha}\right\},\ R_2=h^{(1)}(0).$$

Таким образом, был получен вид асимптотической характеристической функции первого порядка с математическим ожиданием $\frac{\lambda-2\mu}{\alpha}$.

Заключение

В настоящей работе была исследована математическая модель RQ-системы M|M|2 с нетерпеливыми заявками и был найден вид асимптотики первого порядка характеристической функции числа заявок в источнике повторных вызовов в условии долгой терпеливости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А. Теория массового обслуживания / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
2. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral. – Springer, 2008.
3. Falin G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – Chapman & Hall, London, 1997.
4. Roszik J. Retrial queues in the performance modelling of cellular mobile networks using MOSEL / J. Roszik, J. Sztrik, C. Kim // International Journal of Simulation. – 6. – 2005. – P. 38–47.
5. Kuznetsov D. Analysis of non-Markovian models of communication networks with adaptive protocols of multiple random access / D. Kuznetsov, A. Nazarov // Automation and Remote Control. – 2001.– № 5. – P. 124–146.
6. Martin M. Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units / M. Martin, J. Artalejo // Advances in Applied Probability. – 1995. – № 27. – P. 840–861.
7. Назаров А.А Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ММРР ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА

А.А. Галилейская, Е.Ю. Лисовская
Томский государственный университет
lusta.nastya@mail.ru, ekaterina_lisovs@mail.ru

Введение

Задача исследования систем массового обслуживания (СМО), в которых каждая поступающая в систему заявка имеет случайный объем [1,2], играет важную роль при моделировании работы самых разнообразных технических устройств, в частности, современных информационно-вычислительных систем.

В настоящее время известны работы по математическому моделированию и исследованию таких систем, однако аналитические результаты удалось получить лишь в предположении, что входящий поток пуассоновский или обслуживание имеет экспоненциальное распределение. Тем временем, пуассоновский поток не всегда верно описывает реальные потоки, и «обслуживание» не всегда соответствует экспоненциальному закону. Поэтому актуальными являются исследования систем с непуассоновскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания [3,4].