МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

V Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 19–20 мая 2017 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

СЕКЦИЯ III. ПРИКЛАДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХФАЗНОЙ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАДЕРЖКИ ЗАЯВОК НА ОРБИТЕ

А.А. Назаров, А.А. Анисимова
Томский государственный университет
nazarov.tsu@gmail.com, siberienne94@yandex.ru

Введение

Системы массового обслуживания с повторными вызовами или RQ-системы (Retrial queueing system) [1,4] представляют собой математические модели телекоммуникационных систем – компьютерных и телефонных сетей, систем передачи данных, радио, телевидения, мобильной связи и т.п. Модели таких систем подходят под определение систем массового обслуживания (СМО) [9]: они предназначены для удовлетворения массовых запросов на выполнение каких-либо услуг. Однако в отличие от классических систем массового обслуживания, для телекоммуникационных систем характерна ситуация, при которой заявка, заставшая обслуживающий прибор занятым, не встает в очередь, а уходит на орбиту, откуда через некоторые промежутки времени предпринимает попытки вновь обратиться за обслуживанием.

Одним из вариантов СМО являются многофазные системы, состоящие из нескольких СМО, которые последовательно обрабатывают поступающие заявки. В частности, двухфазные RQ-системы были впервые рассмотрены C.M. Krishna и Y.H. Lee [5]. Также их анализом занимались B.T. Doshi [3], B. Krishnakumar [6], G. Choudhury [2] и другие.

В данной работе исследуется система M|M|1 с двумя фазами, в которой вторая фаза является RQ-системой.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания, на вход которой поступает простейший поток интенсивности λ. Каждая заявка последовательно проходит 2 фазы, продолжительность обслуживания на которых имеет экспоненциальное распределение с параметрами γ и μ соответственно. Первая фаза содержит один обслуживающий прибор; заявки, застающие прибор занятым, покидают систему. Вторая фаза содержит один обслуживающий прибор и орбиту, куда отправляется заявка в том случае, если прибор занят. Находясь на орбите, заявка через случайные интервалы времени, имеющие экспоненциальное распределение с параметром σ, делает попытки вновь встать на обслуживание. После прохождения второй фазы заявка считается обработанной и покидает систему (рис. 1).

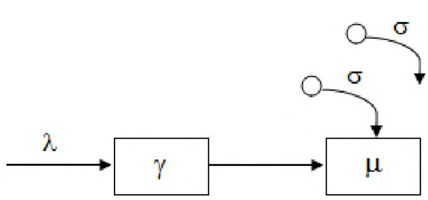

Рис. 1. Модель двухфазной RQ-системы

Обозначим через $i(t)$ число заявок на орбите в момент времени t.Этот процесс не является марковским, поэтому введем дополнительную переменную

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ оба прибора свободны,}\\ 1, \text{ прибор на 2-ой фазе занят,}\\ 2, \text{ прибор на 1-ой фазе занят,}\\ 3, \text{ оба прибора заняты.}\end{cases}$$

Пусть $P\{k(t)=k, i(t)=i\}=P_k(i,t)$ – вероятность того, что в системе в момент времени t на орбите содержится i заявок, в то время как приборы на обеих фазах находятся в состоянии k. В данной статье мы будем рассматривать систему в стационарном режиме, при котором $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(i,t)=P_k(i)$.

Процесс $\{i(t),\ k(t)\}$ является марковским, следовательно, для получения распределений вероятностей $P_k(i)$ можно составить систему уравнений Колмогорова

$$\begin{cases}-(\lambda+i\sigma)P_0(i)+\mu P_1(i)=0,\\ -(\lambda+\mu)P_1(i)+\gamma P_2(i)+\gamma P_3(i-1)+(i+1)\sigma P_0(i+1)=0,\\ -(\gamma+i\sigma)P_2(i)+\mu P_3(i)+\lambda P_0(i)=0,\\ -(\gamma+\mu)P_3(i)+(i+1)\sigma P_2(i+1)+\lambda P_1(i)=0.\end{cases} \tag{1}$$

В (1) перейдем к частичным характеристическим функциям $H_k(u)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{jui}P_k(i)$, где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда (1) для характеристических функций перепишется в виде

$$\begin{cases}-\lambda H_0(u)\ +j\sigma\dfrac{dH_0(u)}{du}+\mu H_1(u)=0,\\ -(\lambda+\mu)H_1(u)+\gamma H_2(u)+\gamma e^{ju}H_3(u)-j\sigma e^{-ju}\dfrac{dH_0(u)}{du}=0,\\ -\gamma H_2(u)+j\sigma\dfrac{dH_2(u)}{du}+\mu H_3(u)+\lambda H_0(u)=0,\\ -(\gamma+\mu)H_3(u)-j\sigma e^{-ju}\dfrac{dH_2(u)}{du}+\lambda H_1(u)=0.\end{cases} \tag{2}$$

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа [0] в условии большой задержки заявок на орбите при $\sigma\to 0$.

2. Метод асимптотического анализа

В соответствии с условием большой задержки заявок на орбите, выполним в (2) замены

$$\sigma=\varepsilon,\ u=\varepsilon w,\ H_k(u)=F_k(w,\varepsilon). \tag{3}$$

Получим

$$\begin{cases}-\lambda F_0(w,\varepsilon)\ +j\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu F_1(w,\varepsilon)=0,\\ -(\lambda+\mu)F_1(w,\varepsilon)+\gamma F_2(w,\varepsilon)+\gamma e^{j\varepsilon w}F_3(w,\varepsilon)-je^{-j\varepsilon w}\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=0,\\ -\gamma F_2(w,\varepsilon)+j\dfrac{\partial F_2(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu F_3(w,\varepsilon)+\lambda F_0(w,\varepsilon)=0,\\ -(\gamma+\mu)F_3(w,\varepsilon)-je^{-j\varepsilon w}\dfrac{\partial F_2(w,\varepsilon)}{\partial w}+\lambda F_1(w,\varepsilon)=0.\end{cases} \tag{4}$$

Пусть $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_k(w,\varepsilon)=F_k(w)$. Запишем функцию $F_k(w)$ в виде

$$F_k(w)=R_k\Phi(w). \tag{5}$$

Тогда после предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ и деления уравнений системы на $\Phi(w)$ (4) перепишется в виде

$$\begin{cases} -\lambda R_0 + jR_0 \dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/\Phi(w)+\mu R_1=0,\\ -(\lambda+\mu)R_1+\gamma R_2+\gamma R_3 - jR_0\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/\Phi(w)=0,\\ -\gamma R_2 + jR_2\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/\Phi(w)+\mu R_3+\lambda R_0=0,\\ -(\gamma+\mu)R_3 - jR_2\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/\Phi(w)+\lambda R_1=0. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/\Phi(w)$ не зависит от w, поэтому

$$\Phi(w)=\exp\{jwx\}, \tag{7}$$

откуда $\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/\Phi(w)=jx$. Тогда после подстановки (7) в систему (6) получим

$$\begin{cases} -(\lambda+x)R_0+\mu R_1=0,\\ xR_0-(\lambda+\mu)R_1+\gamma R_2+\gamma R_3=0,\\ \lambda R_0-(\gamma+x)R_2+\mu R_3=0,\\ \lambda R_1+xR_2-(\gamma+\mu)R_3=0. \end{cases} \tag{8}$$

С учетом условия нормировки $R_0+R_1+R_2+R_3=1$, перепишем (8) в матричном виде:

$$\begin{cases} RQ=0,\\ RE=1. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $R=\begin{pmatrix}R_0 & R_1 & R_2 & R_3\end{pmatrix}$, E – единичный вектор-столбец, а матрица Q представима в виде:

$$Q=\begin{pmatrix} -(\lambda+x) & x & \lambda & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda\\ 0 & \gamma & -(\gamma+x) & x\\ 0 & \gamma & \mu & -(\gamma+\mu) \end{pmatrix}.$$

Введя обозначения $M=augment\,(Q,E)$, $v=augment\,(E^T 0{,}1)$, перепишем систему (9) в виде:

$$RM=v,$$

откуда уравнение для стационарного распределения значений цепи Маркова $\{k(t)\}$ имеет вид:

$$R=\left(vM^T\right)\left(MM^T\right)^{-1}.$$

Здесь $R=R(x)$. Для нахождения x просуммируем уравнения системы (4) и после сокращений получим:

$$\gamma\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)F_3(w,\varepsilon)-j\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)\frac{dF_0(w,\varepsilon)}{dw}-j\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)\frac{dF_2(w,\varepsilon)}{dw}=0. \tag{10}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\pm j\varepsilon w}-1\right)=\pm jw$, поделим уравнение (10) на ε при $\varepsilon\to 0$. После подстановки выражения (5) и сокращений получим уравнение для определения x:

$$\gamma R_3(x)-xR_0(x)-xR_2(x)=0 .$$

Решение x этого уравнения обозначим $x=\kappa_1$. В силу замены (3) и равенства (5) можно записать:

$$H_k(u)=F_k(w,\varepsilon)\approx R_k\exp\left\{\frac{j}{\varepsilon}\kappa_1 u\right\}.$$

Отсюда характеристическая функция Me^{jui} процесса $\{i(t)\}$ имеет вид:

$$Me^{jui}=\sum_k H_k(u)\approx\exp\left\{\frac{j}{\sigma}\kappa_1 u\right\}.$$

Для более детально исследования характеристической функции рассмотрим асимптотику второго порядка. Для этого решение $H_k(u)$ системы (2) будем искать в виде:

$$H_k(u)=\exp\left\{\frac{j}{\sigma}\kappa_1 u\right\}H_k^{(2)}(u). \tag{11}$$

После подстановки (11) в систему (2) получим:

$$\begin{cases}-\lambda H_0^{(2)}(u)+j\sigma\left(\frac{j}{\sigma}\kappa_1 H_0^{(2)}(u)+\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}\right)+\mu H_1^{(2)}(u)=0,\\ -(\lambda+\mu)H_1^{(2)}(u)+\gamma H_2^{(2)}(u)+\gamma e^{ju}H_3^{(2)}(u)+\\ \qquad -j\sigma e^{-ju}\left(\frac{j}{\sigma}\kappa_1 H_0^{(2)}(u)+\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}\right)=0,\\ -\gamma H_2^{(2)}(u)+j\sigma\left(\frac{j}{\sigma}\kappa_1 H_2^{(2)}(u)+\frac{dH_2^{(2)}(u)}{du}\right)+\mu H_3^{(2)}(u)+\lambda H_0^{(2)}(u)=0,\\ -(\mu+\gamma)H_3^{(2)}(u)-j\sigma e^{-ju}\left(\frac{j}{\sigma}\kappa_1 H_2^{(2)}(u)+\frac{dH_2^{(2)}(u)}{du}\right)+\lambda H_1^{(2)}(u)=0.\end{cases} \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$\sigma=\varepsilon^2,\ u=\varepsilon w,\ H_k^{(2)}(u)=F_k^{(2)}(w,\varepsilon). \tag{13}$$

После подстановки (13) в (12) получим:

$$\begin{cases}-\lambda F_0^{(2)}(w,\varepsilon)-\kappa_1 F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{dF_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{dw}+\mu F_1^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\\ -(\lambda+\mu)F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\gamma F_2^{(2)}(w,\varepsilon)+\gamma e^{j\varepsilon w}F_3^{(2)}(w,\varepsilon)+\\ \qquad +\kappa_1 e^{-j\varepsilon w}F_0^{(2)}(w,\varepsilon)-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{dF_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{dw}=0,\\ -\gamma F_2^{(2)}(w,\varepsilon)-\kappa_1 F_2^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{dF_2^{(2)}(w,\varepsilon)}{dw}+\mu F_3^{(2)}(w,\varepsilon)+\lambda F_0^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\\ -(\mu+\gamma)F_3^{(2)}(w,\varepsilon)+\kappa_1 e^{-j\varepsilon w}F_2^{(2)}(w,\varepsilon)-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{dF_2^{(2)}(w,\varepsilon)}{dw}+\lambda F_1^{(2)}(w,\varepsilon)=0.\end{cases} \tag{14}$$

В системе (14) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим:

$$
\begin{cases}
-\lambda F_0^{(2)}(w) - \kappa_1 F_0^{(2)}(w) + \mu F_1^{(2)}(w) = 0, \\
-(\lambda+\mu) F_1^{(2)}(w) + \gamma F_2^{(2)}(w) + \gamma F_3^{(2)}(w) + \kappa_1 F_0^{(2)}(w) = 0, \\
-\gamma F_2^{(2)}(w) - \kappa_1 F_2^{(2)}(w) + \mu F_3^{(2)}(w) + \lambda F_0^{(2)}(w) = 0, \\
-(\mu+\gamma) F_3^{(2)}(w) + \kappa_1 F_2^{(2)}(w) + \lambda F_1^{(2)}(w) = 0.
\end{cases}
\tag{15}
$$

После подстановки разложений (5) и (7) в (15) получим систему

$$
\begin{cases}
-\left(\lambda+\kappa_1\right) R_0 + \mu R_1 = 0, \\
\kappa_1 R_0 - (\lambda+\mu) R_1 + \gamma R_2 + \gamma R_3 = 0, \\
\lambda R_0 - \left(\gamma+\kappa_1\right) R_2 + \mu R_3 = 0, \\
\lambda R_1 + \kappa_1 R_2 - (\gamma+\mu) R_3 = 0.
\end{cases}
\tag{16}
$$

Система (16) совпадает с системой (8), полученной при рассмотрении первой асимптотики.

Запишем функцию $F_k^{(2)}(w)$ в виде разложения:

$$
F_k^{(2)}(w) = \Phi(w)\left\{R_k + j\varepsilon f_k\right\} + O\left(\varepsilon^2\right).
\tag{17}
$$

Тогда после подстановки разложения (17) система (14) примет вид:

$$
\begin{cases}
-\lambda\Phi(w)\left(R_0 + j\varepsilon w f_0\right) - \kappa_1\Phi(w)\left(R_0 + j\varepsilon w f_0\right) + j\varepsilon\left(\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\left(R_0 + j\varepsilon w f_0\right) + \right. \\
\qquad \left. + j\varepsilon f_0 \Phi(w)\right) + \mu\Phi(w)\left(R_1 + j\varepsilon w f_1\right) = O\left(\varepsilon^2\right), \\
-(\lambda+\mu)\Phi(w)\left(R_1 + j\varepsilon w f_1\right) + \gamma\Phi(w)\left(R_2 + j\varepsilon w f_2\right) + \gamma e^{j\varepsilon w}\Phi(w)\left(R_3 + j\varepsilon w f_3\right) + \\
+\kappa_1 e^{-j\varepsilon w}\Phi(w)\left(R_0 + j\varepsilon w f_0\right) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\left(\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\left(R_0 + j\varepsilon w f_0\right) + j\varepsilon f_0\Phi(w)\right) = O\left(\varepsilon^2\right), \\
-\gamma\Phi(w)\left(R_2 + j\varepsilon w f_2\right) - \kappa_1\Phi(w)\left(R_2 + j\varepsilon w f_2\right) + j\varepsilon\left(\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\left(R_2 + j\varepsilon w f_2\right) + \right. \\
\qquad \left. + j\varepsilon f_2\Phi(w)\right) + \mu\Phi(w)\left(R_3 + j\varepsilon w f_3\right) + \lambda\Phi(w)\left(R_0 + j\varepsilon w f_0\right) = O\left(\varepsilon^2\right), \\
-(\mu+\gamma)\Phi(w)\left(R_3 + j\varepsilon w f_3\right) + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w}\Phi(w)\left(R_2 + j\varepsilon w f_2\right) + \\
- j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\left(\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\left(R_2 + j\varepsilon w f_2\right) + j\varepsilon f_2\Phi(w)\right) + \lambda\Phi(w)\left(R_1 + j\varepsilon w f_1\right) = O\left(\varepsilon^2\right).
\end{cases}
$$

В полученной системе выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, учитывая, что $e^{\pm j\varepsilon w} = 1 \pm j\varepsilon w + O\left(\varepsilon^2\right)$. Поделив уравнения получившейся системы на $jw\Phi(w)$ и учитывая систему (17) получим:

$$
\begin{cases}
-\lambda f_0 - \kappa_1 f_0 + R_0 \dfrac{d\Phi(w)}{dw} \Big/ w\Phi(w) + \mu f_1 = 0, \\
-(\lambda+\mu) f_1 + \gamma f_2 + \gamma f_3 + \gamma R_3 + \kappa_1 f_0 - \kappa_1 R_0 - R_0 \dfrac{d\Phi(w)}{dw} \Big/ w\Phi(w) = 0, \\
-\gamma f_2 - \kappa_1 f_2 + R_2 \dfrac{d\Phi(w)}{dw} \Big/ w\Phi(w) + \mu f_3 + \lambda f_0 = 0, \\
-(\mu+\gamma) f_3 + \kappa_1 f_2 - \kappa_1 R_2 - R_2 \dfrac{d\Phi(w)}{dw} \Big/ w\Phi(w) + \lambda f_1 = 0.
\end{cases}
\tag{18}
$$

Суммируя уравнения системы (18), получим:

$$
\gamma R_3 - \kappa_1 R_0 - \kappa_1 R_2 = 0.
\tag{19}
$$

Из системы (18) следует, что $\dfrac{d\Phi(w)}{dw} \Big/ w\Phi(w)$ не зависит от w, поэтому:

$$\Phi(w)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}, \tag{20}$$

откуда $\dfrac{d\Phi(w)}{dw}\Big/ w\Phi(w)=-\kappa_2$.

Подставив разложение (20) в систему (18), получим систему уравнений для функций f:

$$\begin{cases}-(\lambda+\kappa_1)f_0+\mu f_1=\kappa_2 R_0,\\ \kappa_1 f_0-(\lambda+\mu)f_1+\gamma f_2+\gamma f_3=\kappa_1 R_0-\kappa_2 R_0-\gamma R_3,\\ \lambda f_0-(\gamma+\kappa_1)f_2+\mu f_3=\kappa_2 R_2,\\ \lambda f_1+\kappa_1 f_2-(\mu+\gamma)f_3=\kappa_1 R_2-\kappa_2 R_2.\end{cases} \tag{21}$$

Решение системы (21) можно записать в виде:

$$f=C\cdot R+g, \tag{22}$$

где g – частное решение неоднородной системы, удовлетворяющее некоторому дополнительному условию.

Просуммируем уравнения системы (14):

$$\begin{gathered}\kappa_1\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+\kappa_1\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)F_2^{(2)}(w,\varepsilon)+\gamma\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)F_3^{(2)}(w,\varepsilon)-\\ -j\varepsilon\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}-j\varepsilon\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)\frac{\partial F_2^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Подставив в уравнение (23) разложение $e^{\pm j\varepsilon w}=1\pm j\varepsilon w+\dfrac{(j\varepsilon w)^2}{2}+O\left(\varepsilon^3\right)$ и разложения (17) и (20), получим:

$$\begin{gathered}\kappa_1\left(-j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\left(R_0+j\varepsilon w f_0\right)+\kappa_1\left(-j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\left(R_2+j\varepsilon w f_2\right)+\\ +\gamma\left(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\left(R_3+j\varepsilon w f_3\right)-j\varepsilon\left(-j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\left(j^2\kappa_2 w\left(R_0+j\varepsilon w f_0\right)+\right.\\ \left.+j\varepsilon f_0\right)-j\varepsilon\left(-j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\left(j^2\kappa_2 w\left(R_2+j\varepsilon w f_2\right)+j\varepsilon f_2\right)=0.\end{gathered} \tag{24}$$

Поделив систему (24) на $(j\varepsilon w)^2$ и учтя условие (19) получим уравнение для нахождения κ_2:

$$\left(R_0+R_2\right)x=-\kappa_1\left(f_0+f_2\right)+\gamma f_3+\frac{1}{2}\kappa_1 R_0+\frac{1}{2}\kappa_1 R_2+\frac{1}{2}\gamma R_3. \tag{25}$$

Учитывая (22), можно записать:

$$-\kappa_1\left(f_0+f_2\right)+\gamma f_3=C\left\{-\kappa_1\left(R_0+R_2\right)+\gamma R_3\right\}-\kappa_1\left(g_0+g_2\right)+\gamma g_3,$$

а учитывая (19), получаем, что $C\left\{-\kappa_1\left(R_0+R_2\right)+\gamma R_3\right\}=0$, то есть для нахождения κ_2 достаточно получить частное решение системы (21). Отсюда решение уравнения (25) запишется в виде:

$$\kappa_2 = \left(\frac{\lambda+\kappa_1}{2}\right)\left(\frac{2\gamma\kappa_1 R_3 + 2\gamma^2 R_2 + 2\gamma^2\kappa_1 R_3 - \gamma\kappa_1 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) -}{\gamma\kappa_1 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) + \kappa_1 R_0\left(\lambda+\kappa_1\right)\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) +}\right.$$

$$\frac{-\gamma\kappa_1 R_2\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - \gamma^2 R_3\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - 2\kappa_1^2 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - 2\gamma\kappa_1^2 R_2\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) -}{+\gamma\kappa_1 R_2\left(\lambda+\kappa_1\right)\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - \kappa_1^2 R_0\left(\lambda+\kappa_1\right)\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) +}$$

$$\frac{-\gamma^2 R_3\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - 2\kappa_1^2 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - 2\gamma\kappa_1^2 R_2\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) -}{+\kappa_1^3 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - \kappa_1^2 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) + \gamma^2 R_2\left(\lambda+\kappa_1\right) -}$$

$$\left.\frac{-2\kappa_1^3 R_0\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - 2\gamma\kappa_1 R_3\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - 2\gamma\kappa_1^2 R_0}{-\kappa_1\gamma R_0\left(\lambda+\kappa_1\right) + \gamma\kappa_1^2 R_0 - \gamma R_0\left(\lambda+\kappa_1\right)\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right) - \gamma R_2\left(\lambda+\kappa_1\right)\left(\kappa_1+\gamma+\mu\right)}\right).$$

Окончательно характеристическая функция числа заявок в ИПВ имеет вид:

$$H(u) = \exp\left\{ ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma} \right\}. \qquad (26)$$

3. Сравнение с результатами имитационного моделирования

В данном разделе проводится сравнение полученных асимптотических семиинвариант первого порядка с результатами имитационного моделирования при $\sigma \to 0$. Описание имитационной модели приводится в [8]. Моделирование проводилось при числе заявок во входящем потоке равным 1 миллиону.

В результате работы имитационной модели получим ряд распределения, следовательно, для сравнения с асимптотическими результатами необходимо дискретизировать полученное ранее распределение.

Функция (26) является характеристической функцией гауссовской случайной величины, следовательно, можно записать функцию распределения:

$$F(x) = N\left(x, \frac{\kappa_1}{\sigma}, \sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}\right) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi\kappa_2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ \frac{-\sigma\left(t - \frac{\kappa_1}{\sigma}\right)^2}{2\kappa_2} \right\} dt .$$

Отсюда вероятности $P\{i(t) = i\} = P(i)$ выражаются в виде:

$$P_{ac}(i) = \left(F(i+0{,}5) - F(i-0{,}5)\right)\left(1 - F(-0{,}5)\right)^{-1}.$$

Для определения качества оценивая рассчитаем расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max_{0 \le i \le \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} \left(P_{им}(n) - P_{ac}(n)\right) \right| .$$

Таблица 1

Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при $\lambda = 0{,}5$, $\gamma = \mu = 1$

σ	0,1	0,05	0,03	0,01	0,005
Δ	0,104	0,067	0,041	0,017	0,015

Таблица 2

Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при $\lambda = 0{,}7$, $\gamma = \mu = 1$

σ	0,1	0,05	0,03	0,01	0,005
Δ	0,067	0,032	0,022	0,021	0,015

Таблица3

Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при $\lambda = 0,9$, $\gamma = \mu = 1$

σ	0,1	0,05	0,03	0,01	0,005
Δ	0,041	0,026	0,025	0,018	0,011

В приведенных выше примерах качество оценивания становится приемлемым (расстояние Колмогорова меньше 0,05) уже при $\sigma = 0,01$. Также можно отметить, что расстояние Колмогорова уменьшается при увеличении загрузки системы.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель двухфазной RQ-системы M|M|1 и с помощью метода асимптотического анализа получено асимптотическое распределение числа на орбите в условии большой задержки заявок на орбите, а также приведено сравнение полученных результатов с имитационной моделью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
2. Choudhury G.A single server queueing system with two-phases of service and vacations // QTQM. – 2008. – Vol. 5(1). – P. 33–49.
3. Doshi B.T. Analysis of a two phase queueing system with general service times // Operations Research Letters. – 1991. – Vol. 10. – P. 265–272.
4. Falin G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London: Chapman & Hall, 1997. – 320 p.
5. Krishna C.M. A study of two-phase service / C.M. Krishna, Y.H. Lee // Operations Research Letters. – 1990. – Vol. 9. – P. 91–97.
6. Krishnakumar B. An M/G/1 retrial queueing system with two phases of services and preemptive resume / B. Krishnakumar, D. Arivudainambi // Annals of Operations Research. – 2002. – Vol. 113. – P. 61–79.
7. Nazarov A.A. Method of asymptotic semiinvariants for studying a mathematical model of a random access network / A.A. Nazarov, E.A. Sudyko // Problems of information transmission. – 2010. – Vol. 46. – № 1. – P. 86–102.
8. Анисимова А.А. Имитационное моделирование двухфазной RQ-системы // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика: материалы XX Всероссийской научно-практической конференции (28–29 апреля 2016 г.) / сост. Ю.А. Наумкина. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2016. – Ч. 1. – С. 81–85.
9. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд., перераб. и доп. / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 336 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M|M|2 С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ В УСЛОВИИ ДОЛГОЙ ТЕРПЕЛИВОСТИ

О.А. Осипович, Е.А. Фёдорова, С.П. Моисеева

Томский государственный университет

osipovich.olga@bk.ru, moiskate@mail.ru, smoiseeva@mail.ru

Введение

Теория массового обслуживания различает несколько классов исследуемых математических моделей (систем массового обслуживания), которые отличаются конфигурацией: числом обслуживающих приборов, типами входящих потоков и дисциплиной обслуживания, наличием или отсутствием очереди [1] и др. Система массового обслуживания с повторными вызовами или RQ-системой (Retrial Queueing System) [2,3] – это модель, в которой заявка не встает в очередь, а находится на орбите, где осуществляет случайную задержку.

Рассматриваемые модели широко применяются для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров [4,5] и др. Это связано, в первую очередь, с тем, что информационные технологии внедряются во все сферы человеческой деятельности.