

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/41/2

**Д.В. Березин, Л.А. Нежелская****ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ**

Получены явные выражения для апостериорных вероятностей состояний обобщенного МАР-потока событий, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени. Разработан алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий при непродлевающемся мертвом времени. Проведены статистические эксперименты для установления качества оценивания, получены и проанализированы численные результаты.

**Ключевые слова:** обобщенный МАР-поток событий; оптимальное оценивание состояний; метод максимума апостериорной вероятности; непродлевающееся мертвое время.

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий послужило стимулом к созданию важной сферы приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей и т.п. Интенсивность входящих потоков событий в реальных системах и сетях меняется со временем, как правило, случайно, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; ко второму – потоки с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [3–5]. Отметим, что МАР-потоки событий [6] относятся ко второму классу дважды стохастических потоков и наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей [7].

Реальные телекоммуникационные сети работают в условиях полной либо частичной неопределенности, т.е. когда параметры входящего потока неизвестны либо частично известны. Состояния же МАР-потока неизвестны по определению.

В связи с этим при исследовании дважды стохастических потоков событий выделяют два класса задач: 1) оценивание состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) в произвольный момент времени по наблюдениям за моментами наступления событий [8, 9]; 2) оценивание параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [10–12].

Исследование систем массового обслуживания, как правило, осуществляется в условиях, когда все события входящего потока доступны наблюдению. Однако зарегистрированное событие может вызвать период так называемого мертвого времени, в течение которого другие события становятся ненаблюдаемыми для регистрирующего прибора (теряются) [13–15]. Таким образом, эффект мертвого времени приводит к потерям событий потока, что отрицательно сказывается на оценке его состояний. Задача оптимального оценивания состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени решена в [16].

В настоящей статье приведены аналитические и численные результаты оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений [17]. Сам критерий минимизирует полную вероятность ошибки вынесения решения. Для получения численных результатов оценивания построена имитационная модель потока, с помощью которой проведен ряд статистических экспериментов.

## 1. Математическая модель обобщенного МАР-потока событий

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями:  $\lambda(t) = \lambda_1$  и  $\lambda(t) = \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ). Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в  $i$ -м состоянии,  $i = 1, 2$ , является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону  $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2$ ; в момент окончания  $i$ -го состояния процесс  $\lambda(t)$  переходит с вероятностью  $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$  в  $j$ -е состояние ( $i \neq j$ ) с наступлением события; либо с вероятностью  $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$  переходит в  $j$ -е состояние ( $i \neq j$ ) без наступления события; либо с вероятностью  $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$  остается в  $i$ -м состоянии с наступлением события; либо с вероятностью  $P_0(\lambda_i | \lambda_i)$  остается в  $i$ -м состоянии без наступления события. ( $P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) + P_0(\lambda_i | \lambda_i) = 1$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ ). Отметим, что в сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – марковский процесс.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [18] процесса  $\lambda(t)$  при этом примет вид

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) + \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) & -\lambda_2 & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{array} \right\| = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|.$$

Элементами матрицы  $\mathbf{D}_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $\mathbf{D}_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{D}_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если  $P_0(\lambda_1 | \lambda_1) = P_0(\lambda_2 | \lambda_2) = 0$ , то имеет место обычный МАР-поток событий [18].

Пусть  $\pi_i(t | t^0)$  – априорная вероятность того, что процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  принимает значение  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , при условии, что функционирование обобщенного МАР-потока началось в момент времени  $t^0$ .

**Лемма 1.** Априорная вероятность  $\pi_1(t | t^0)$  первого состояния процесса  $\lambda(t)$  для обобщенного МАР-потока событий удовлетворяет линейному неоднородному [19] дифференциальному уравнению

$$\pi_1'(t | t^0) = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] - \pi_1(t | t^0) (\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]). \quad (1)$$

*Доказательство* осуществляется  $\Delta t$ -методом [20].

**Лемма 2.** Априорные вероятности состояний процесса  $\lambda(t)$  для обобщенного МАР-потока событий имеют вид

$$\pi_1(t | t^0) = \frac{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}{\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]} - \left( \frac{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}{\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]} - \pi \right) e^{-(\beta_1 + \beta_2)(t - t^0)},$$

$$\pi_2(t | t^0) = 1 - \pi_1(t | t^0)$$

с начальными условиями в момент  $t^0$  вида

$$\pi_1(t^0 | t^0) = \pi, \quad \pi_2(t^0 | t^0) = 1 - \pi,$$

$$\beta_1 = \lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)], \quad \beta_2 = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)].$$

*Доказательство* проводится интегрированием уравнения (1).

**Следствие леммы 2.** Априорные финальные вероятности [21] состояний процесса  $\lambda(t)$  для обобщенного МАР-потока событий при  $t \rightarrow \infty$  (или  $t^0 \rightarrow -\infty$ ) имеют вид

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}{\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}, \quad (2)$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1.$$

После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события наступает время фиксированной длительности  $T$  (мертвое время), в течение которого другие события исходного обобщенного МАР-

потока недоступны наблюдению [22]. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности  $T$  и т.д. Пример возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1 и 2 – состояния процесса  $\lambda(t)$ ,  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, жирной линией обозначены длительности мертвого времени, черными кружками – события обобщенного МАР-потока, недоступные наблюдению.

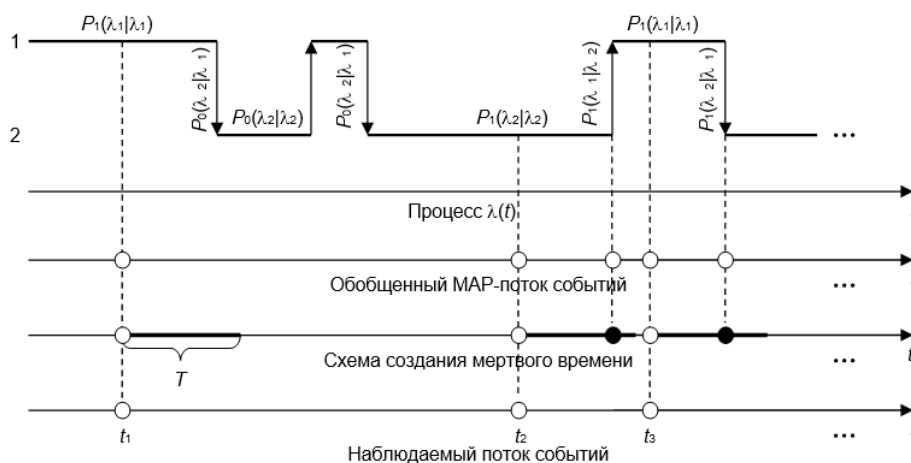


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс  $\lambda(t)$  принципиально ненаблюдаем (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots$ , поэтому необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса  $\lambda(t)$  (или обобщенного МАР-потока) в момент окончания наблюдения.

Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ , где  $t_0$  – момент начала наблюдений,  $t$  – момент вынесения решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$ , пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить  $t_0 = 0$ . Для вынесения решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  необходимо определить апостериорные вероятности  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$ ,  $i = 1, 2$ , того, что в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  – количество наблюдаемых событий за время  $t$ ), при этом  $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$ . Решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  выносится путем сравнения вероятностей: если  $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , то оценка состояния  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$ , иначе  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$ .

## 2. Алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий

Рассмотрим интервал  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , между соседними событиями рассматриваемого потока. Момент вынесения решения  $t$  будет принадлежать этому интервалу. При этом для начального интервала  $(t_0, t_1)$  момент  $t$  будет лежать между моментом начала наблюдения  $t_0$  и моментом наступления первого события потока. Значение длительности интервала  $(t_k, t_{k+1})$  есть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . С другой стороны, так как наблюдаемое в момент  $t_k$  событие порождает период мертвого времени длительностью  $T$ , то  $\tau_k = T + \eta_k$ , где  $\eta_k$  – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени  $t_k + T$  и моментом  $t_{k+1}$ , т.е. интервал  $(t_k, t_{k+1})$  разбивается на два смежных: первый полуинтервал  $(t_k, t_k + T]$ , второй – интервал  $(t_k + T, t_{k+1})$ . Подчеркнем, что условия нахождения апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$  и интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$  принципиально разные. Кроме того, для нахождения вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  необходимо точно знать значение  $T$  либо, по крайней мере, предварительно осуществить оценку  $T$ . В противном случае отсутствие такой информации делает попытку строгого нахождения вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  невозможной. Здесь предполагается, что значение  $T$  известно точно.

Рассмотрим ситуацию, когда  $T = 0$ , т.е. мертвое время отсутствует. Применим методику [24] получения рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей  $w(\lambda_i | t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени  $t = 0$  и время  $t$  изменяется дискретно с шагом  $\Delta t$ :  $t^{(k)} = k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Введем двумерный случайный процесс  $(\lambda^{(k)}, r_k)$ , где  $\lambda^{(k)}$  – значение процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $k\Delta t$ ,  $r_k$  – количество событий потока, наступивших на интервале времени  $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$  длительности  $\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ . Поскольку на интервале  $(-\Delta t, 0)$  наблюдение за потоком не производится, то положим  $r_0 = 0$ .

Обозначим  $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$  – последовательность значений количества наблюдаемых событий за время от 0 до  $m\Delta t$  на интервалах  $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$  длительности  $\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ;  $p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$  – вероятность перехода процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  за один шаг  $\Delta t$  из состояния  $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$  в состояние  $(\lambda^{(k)}, r_k)$ ;  $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m)$  – условная вероятность значения  $\lambda^{(m)}$  при условии, что наблюдалась реализация  $\mathbf{r}_m$ . Случайный процесс  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  является марковским. Тогда для дважды стохастических потоков событий с двумя состояниями справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей [23]:

$$w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}, \quad (3)$$

где  $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)} | t)$ ,  $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$ . В связи с тем, что для обобщенного МАР-потока  $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$ , рекуррентное соотношение (3) принимает вид

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (4)$$

**Замечание 1.** Компонента  $r_k$  вектора наблюдений  $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$  может принимать значения  $r_k = 0$  или  $r_k = 1$ . Случаи  $r_k = 2, 3, \dots$  в силу определения обобщенного МАР-потока событий имеют вероятность  $o(\Delta t)$ .

Пусть в (4)  $r_{m+1} = 0$ , т.е. на интервале  $(t, t + \Delta t)$ , где  $t = m\Delta t$ ,  $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$ , нет событий потока. Кроме того, в (4) положим  $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$ . Переходные вероятности для обобщенного МАР-потока событий в (4) имеют вид

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = \\ &= 1 - \lambda_1(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = \\ &= \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = \\ &= \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = \\ &= 1 - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** На временных интервалах  $(t_0, t_1)$  и  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , апостериорная вероятность  $w(\lambda_i | t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w'(\lambda_1 | t) = [\lambda_2(P_0(\lambda_2 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - 1) - \lambda_1(P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - 1)]w^2(\lambda_1 | t) + [\lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) - 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - \lambda_1 + \lambda_2]w(\lambda_1 | t) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2); \quad (6)$$

$$t_0 < t < t_1, t_k < t < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Подставляя (5) в (4), выполняя необходимые преобразования и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем дифференциальное уравнение Риккати (6). Лемма доказана.

Пусть в (4)  $r_{m+1} = 1$ , что соответствует случаю наблюдения одного события потока на интервале времени  $(t, t + \Delta t)$ , допустим, в момент времени  $t_k$ . Для определенности в (4) положим  $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$ .

Рассмотрим два смежных интервала  $(t, t_k)$  и  $(t_k, t + \Delta t)$ , длительности которых есть  $\Delta t' = t_k - t$  и  $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$  соответственно. Тогда с учетом сделанных обозначений (4) принимает вид

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (7)$$

В этой ситуации переходные вероятности для обобщенного МАР-потока событий в (7) выпишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (8)$$

Для обобщенного МАР-потока событий имеет место следующая лемма.

**Лемма 4.** Апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  в момент  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , наступления события модулированного МАР-потока определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) w(\lambda_1 | t_k - 0) + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) w(\lambda_2 | t_k - 0)}{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)] w(\lambda_2 | t_k - 0) + \lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad (9)$$

где  $w(\lambda_2 | t_k - 0) = 1 - w(\lambda_1 | t_k - 0)$ .

**Доказательство.** Подставляя (8) в (7), учитывая при этом, что  $w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')$ , и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\Delta t' \rightarrow 0$  и  $\Delta t'' \rightarrow 0$  одновременно), получим утверждение леммы. Лемма доказана.

**Замечание 2.** В точке  $t_k$  вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок). Вероятность  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  зависит от значения  $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ , где  $w(\lambda_1 | t_k - 0)$  – значение вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  в момент времени  $t_k$ , когда  $w(\lambda_1 | t)$ , определяемая в уравнении (6), изменяется на интервале  $(t_{k-1}, t_k)$ , соседнем с интервалом  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Таким образом, в значении  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  «сосредоточена» вся предыстория наблюдений за обобщенным МАР-потоком, начиная от момента  $t_0 = 0$  до момента  $t_k$ . В качестве начального значения  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$  на полуинтервале  $[t_0, t_1)$  выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса  $\lambda(t)$ , представленная в (2).

Леммы 3, 4 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема.** Поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  на временных интервалах  $(t_0, t_1)$  и  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется явными формулами

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_k)}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (10)$$

$$w_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad w_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$A = \lambda_2(P_0(\lambda_2 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - 1) - \lambda_1(P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - 1) \neq 0,$$

$$B = \lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) - 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$C = \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2);$$

для  $A = 0$

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{(C + B \cdot w(\lambda_1 | t_k)) e^{B(t-t_k)} - C}{B}, \quad (11)$$

$t_0 < t < t_1$ ,  $t_k < t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  определена формулой (9),  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$ , где  $\pi_1$  определена в (2).

Возвратимся к ситуации, когда длительность мертвого времени  $T \neq 0$  (см. рис. 1). Тогда вычисление вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  по формуле (10) справедливо на интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$ . При этом начальное условие для  $w(\lambda_1 | t)$  привязывается к моменту времени  $t_k + T$ , т.е. в формуле (10) нужно заменить  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  на  $w(\lambda_1 | t_k + T)$  и  $t_k + T \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Формула (9) остается без изменения, так как предназначена для вычисления  $w(\lambda_1 | t)$  в момент  $t_k$  наступления события, которое порождает мертвое время. Рассмотрим полуинтервал  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . На этом полуинтервале событие имеет место в граничной точке  $t_k$ , на самом полуинтервале события отсутствуют.

**Утверждение.** Поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  на временных полуинтервалах  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1] e^{-(\beta_1 + \beta_2)(t-t_k)}, \quad (12)$$

$$\beta_1 = \lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)], \quad \beta_2 = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)],$$

$t_k < t \leq t_k + T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  определена формулой (9);  $\pi_1$  определена в (2).

**Доказательство.** В течение периода мертвого времени  $T$ , т.е. на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , обобщенный МАР-поток событий является ненаблюдаемым. В этой связи поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  на  $(t_k, t_k + T]$  аналогично поведению априорной вероятности  $\pi_1(t | t^0)$  первого состояния процесса  $\lambda(t)$  для обобщенного МАР-потока событий (лемма 2); разница лишь в задании начального значения  $w(\lambda_1 | t)$  в момент времени  $t_k$  наступления события наблюдаемого потока. Нетрудно показать (лемма 1), что вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется уравнением

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} + (\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]) w(\lambda_1 | t) = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]$$

с начальным условием  $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Интегрируя выписанное дифференциальное уравнение, находим (12). Утверждение доказано.

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  и алгоритм принятия решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  в любой момент времени  $t$  (алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока):

1) вычисляется априорная вероятность  $\pi_1$  нахождения процесса в состоянии  $\lambda_1$  в момент начала наблюдения  $t_0$  по формуле (2);

2) на промежутке  $(t_0, t_1)$  по формуле (10) или (11) в зависимости от значения коэффициента  $A$  вычисляется апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени  $t$ , где в качестве  $w(\lambda_1 | t_0 + 0)$ ,  $t_0$  – момент начала наблюдения, используется значение  $\pi_1$ ;

3) в момент наступления события  $t_k$  апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  рассчитывается по формуле (9). Здесь в качестве  $w(\lambda_1 | t_k - 0)$  используется значение, вычисленное по формуле (10) или (11) в момент времени  $t = t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , при этом  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  заменяется на  $w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0)$ , а  $t_k$  – на  $t_{k-1}$ ;

4) на промежутке  $(t_k, t_k + T]$  апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  вычисляется по формуле (12), где  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  – значение, вычисленное на предыдущем шаге алгоритма по формуле (9);

5) на интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , значение  $w(\lambda_1 | t)$  рассчитывается по формуле (10) или (11), где в качестве  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  используется значение  $w(\lambda_1 | t_k + T)$ , вычисленное на шаге 4. Далее осуществляется переход на шаг 3. Шаги 3–5 повторяются до момента  $t$  окончания наблюдения за потоком.

Параллельно по ходу вычисления  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени выносится решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$ : если  $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$ , то оценка состояния  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , иначе  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

### 3. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями и проведен статистический эксперимент. Основой для построения имитационной модели являются датчики случайных чисел и метод обратных функций [25]. На первом этапе работы программы строится реализация потока. На втором этапе на основании полученной выборки  $t_1, t_2, \dots, t_n$  моментов наступления событий в наблюдаемом потоке происходит оценивание состояний потока методом максимума апостериорной вероятности. На рис. 2 изображена реализация потока для  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, T_m = 5, T = 1, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,5, P_0(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,1, P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,4, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,2$ .

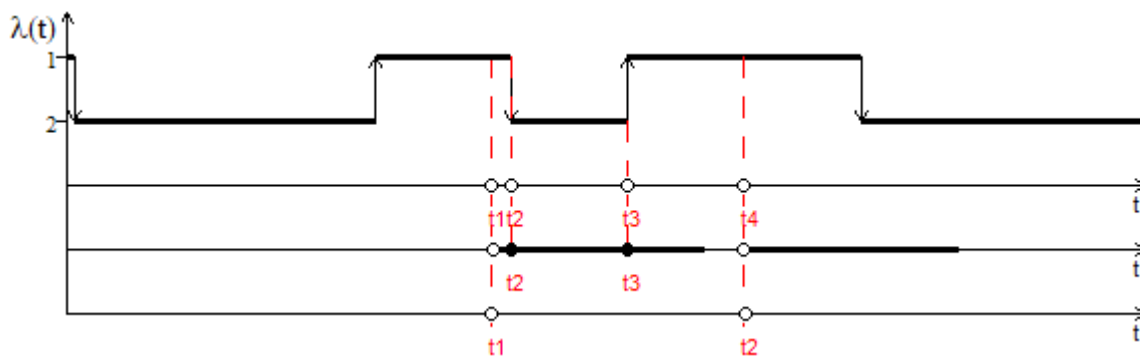


Рис. 2. Реализация обобщенного МАР-потока событий

На рис. 3 приведено поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  для тех же значений параметров.

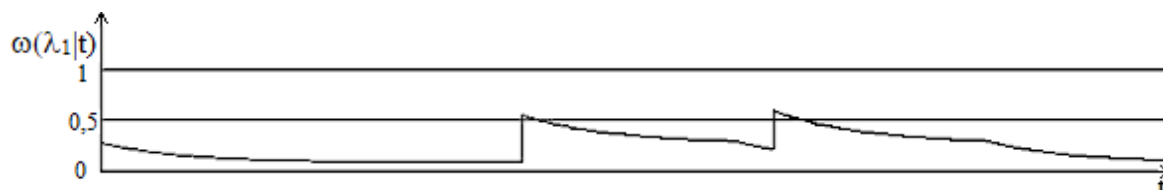


Рис. 3. Поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$

На рис. 4 изображено поведение оценки  $\hat{\lambda}(t)$  процесса  $\lambda(t)$ . Тонкая прямая линия проведена на тех временных участках, где поведение  $\lambda(t)$  и  $\hat{\lambda}(t)$  не совпадает.

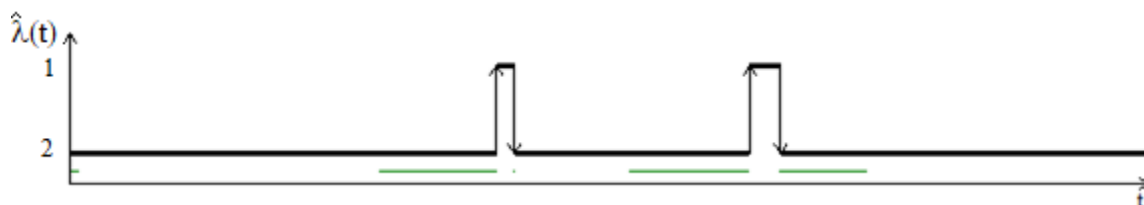


Рис. 4. Поведение оценки  $\hat{\lambda}(t)$

Чтобы установить частоту ошибочных решений о состоянии процесса  $\lambda(t)$ , проведены статистические эксперименты, состоящие из следующих этапов:

- 1) для определенного набора параметров осуществляется моделирование потока ( $i$ -й опыт);
- 2) по формулам (2), (9), (10), (12) рассчитывается апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  и по методу максимума апостериорной вероятности выносится решение о значении процесса  $\lambda(t)$  в любой момент времени  $t$ ;
- 3) определяется значение  $d_i$  – суммарная протяженность интервалов времени, на которых поведение  $\lambda(t)$  и  $\hat{\lambda}(t)$  не совпадает;

4) вычисляется доля ошибочных решений  $\hat{p}_i = \frac{d_i}{T_m}$ , где  $T_m$  – время моделирования;

5) шаги 1–4 повторяются  $N$  раз.

Результатом описанного алгоритма является выборка  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$  долей ошибочных решений в  $N$  испытаниях, на основании которой вычисляются выборочное среднее  $\hat{P}_o = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$  – оценка полной вероятности ошибки принятия решения  $P_o$ , и выборочная дисперсия  $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_o)^2$ .

В первом эксперименте устанавливается зависимость оценки  $\hat{P}_o$  от длительности мертвого времени  $T$ . Данные для эксперимента приведены в табл. 1. Количество экспериментов  $N = 100$ .

Таблица 1

Данные для первого эксперимента

$T_m = 100$	$\lambda_1 = 5; 10; 15$	$P_1(\lambda_1   \lambda_1) = 0,5$	$P_0(\lambda_1   \lambda_1) = 0,1$	$P_1(\lambda_2   \lambda_1) = 0,3$	$P_0(\lambda_2   \lambda_1) = 0,1$
$T = 0; 1; \dots; 10$	$\lambda_2 = 1$	$P_1(\lambda_2   \lambda_2) = 0,1$	$P_0(\lambda_2   \lambda_2) = 0,1$	$P_1(\lambda_1   \lambda_2) = 0,7$	$P_0(\lambda_1   \lambda_2) = 0,1$

Результаты продемонстрированы в табл. 2 и на рис. 5.

Таблица 2

Результаты первого эксперимента

$T$	$\lambda_1 = 5$		$\lambda_1 = 10$		$\lambda_1 = 15$	
	$\hat{P}_o$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_o$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_o$	$S^2 \times 10^3$
0	0,22	1,0	0,13	1,0	0,09	1,3
1	0,25	2,2	0,15	1,1	0,11	1,4
2	0,26	2,3	0,16	1,4	0,11	1,3
3	0,27	2,3	0,16	1,5	0,11	1,3
4	0,27	2,1	0,16	1,0	0,12	1,2
5	0,27	2,2	0,16	1,3	0,12	1,0
6	0,27	2,5	0,16	1,2	0,12	1,1
7	0,27	2,4	0,16	1,1	0,12	1,1
8	0,28	2,1	0,16	1,2	0,12	1,6
9	0,28	2,2	0,16	1,4	0,12	1,5
10	0,27	2,4	0,16	1,3	0,12	1,5

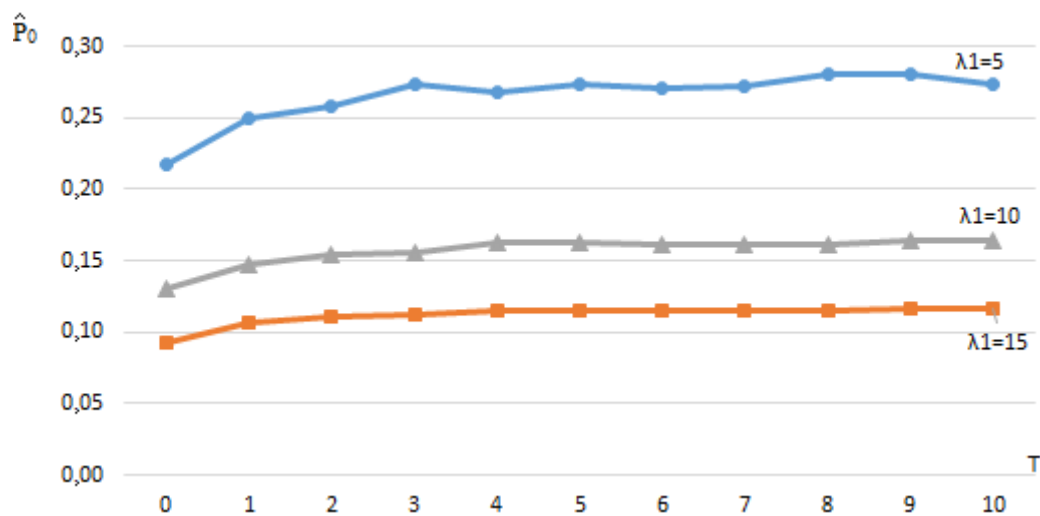


Рис. 5. Зависимость  $\hat{P}_o$  от длительности мертвого времени

Результаты свидетельствуют о том, что оценка  $\hat{P}_o$  растет с увеличением значения  $T$ , так как событий в наблюдаемом потоке наступает меньше, в результате чего уменьшается количество информа-



ции для алгоритма принятия решения о значении процесса  $\lambda(t)$ . Также чем больше соотношение  $\lambda_1/\lambda_2$ , тем точнее оценивание, так как в этом случае состояния потока для алгоритма различимы лучше.

Во втором эксперименте устанавливается зависимость оценки  $\hat{P}_0$  от длительности времени моделирования  $T_m$ . Данные для эксперимента приведены в табл. 3. Количество экспериментов  $N = 100$ .

Результаты продемонстрированы в табл. 4 и на рис. 6, 7.

Таблица 3

Данные для второго эксперимента

$T_m = 5; 10; \dots; 100$	$\lambda_1 = 5$	$P_1(\lambda_1   \lambda_1) = 0,3$	$P_0(\lambda_1   \lambda_1) = 0,1$	$P_1(\lambda_2   \lambda_1) = 0,6$	$P_0(\lambda_2   \lambda_1) = 0$
$T = 1$	$\lambda_2 = 1$	$P_1(\lambda_2   \lambda_2) = 0$	$P_0(\lambda_2   \lambda_2) = 0,1$	$P_1(\lambda_1   \lambda_2) = 0,8$	$P_0(\lambda_1   \lambda_2) = 0,1$

Таблица 4

Результаты второго эксперимента

$T_m$	$\lambda_1 = 5$		$\lambda_1 = 7$		$\lambda_1 = 10$	
	$\hat{P}_0$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_0$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_0$	$S^2 \times 10^3$
10	0,22	10,0	0,18	6,4	0,12	4,4
15	0,22	6,3	0,16	4,1	0,11	2,0
20	0,22	7,3	0,16	3,4	0,12	2,3
25	0,23	3,2	0,15	3,2	0,12	2,1
30	0,20	3,4	0,15	3,3	0,11	2,2
40	0,21	3,2	0,16	2,1	0,12	1,5
50	0,21	2,0	0,16	1,6	0,12	1,1
70	0,20	2,3	0,15	1,1	0,12	1,4
100	0,20	1,4	0,15	1,1	0,12	1,2

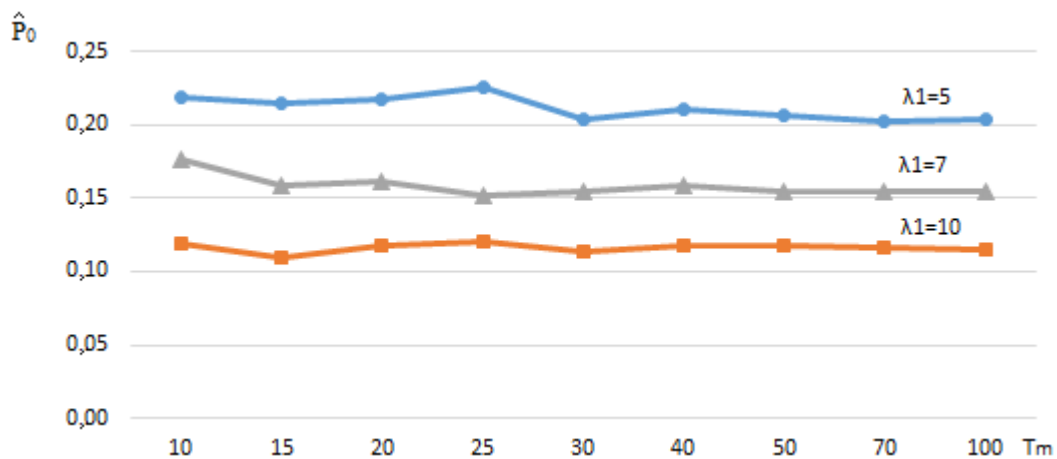


Рис. 6. Зависимость  $\hat{P}_0$  от времени моделирования

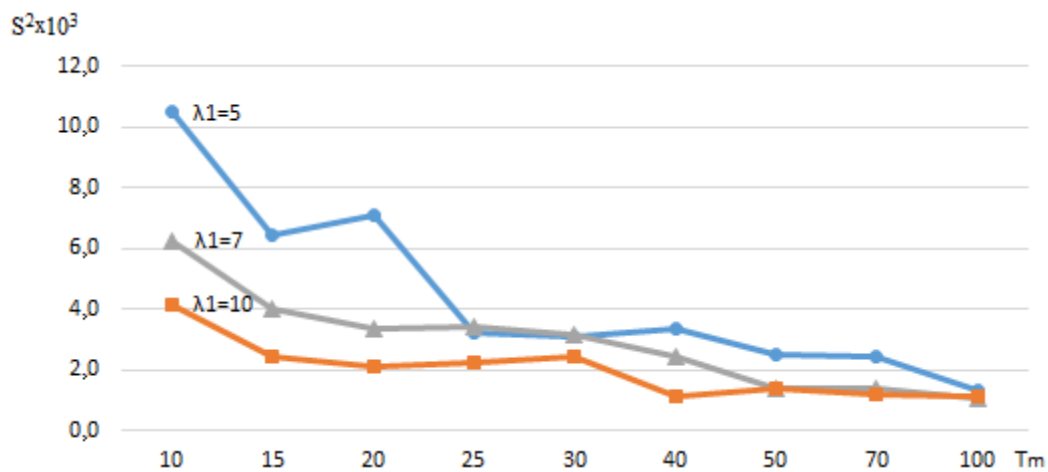


Рис. 7. Зависимость  $S^2 \times 10^3$  от времени моделирования

Согласно результатам оценка  $\hat{P}_o$  с ростом времени моделирования практически не изменяется. Однако с ростом времени моделирования выборочная дисперсия значительно убывает и при  $T_m \approx 100$  приближается к значению 0,001. Это означает, что отклонение доли ошибочных решений  $\hat{p}_i$  в  $i$ -м эксперименте от выборочного среднего  $\hat{P}_o$  достаточно мало и составляет  $\sqrt{S^2} \approx 0,03$ . Таким образом, с ростом времени моделирования  $\hat{P}_o$  сходится к истинной вероятности ошибки принятия решения  $P_o$ . Также результаты показывают, что чем больше  $\lambda_1$ , тем быстрее убывает  $S^2$  с ростом времени моделирования.

### Заключение

В статье предложен алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного MAP-потока при наличии непродлевающегося мертвого времени, приведены численные результаты ряда экспериментов по выявлению зависимости оценки  $\hat{P}_o$  от изменения различных параметров потока. Результаты экспериментов показывают, что оценка  $\hat{P}_o$  возрастает с увеличением длительности мертвого времени, а с увеличением отношения  $\lambda_1$  к  $\lambda_2$  оценивание состояний процесса  $\lambda(t)$  происходит значительно лучше. С ростом времени моделирования оценка  $\hat{P}_o$  сходится к истинной вероятности ошибки принятия решения  $P_o$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proc. Camb. Phil. Soc. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, Issue. 4. P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. No. 16. P. 764–779.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics. Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
9. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
10. Centanni S. Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultra-high-frequency financial data // Stat. Model. 2006. No. 6. P. 97–118.
11. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. V. 17, No. 4. P. 1326–1339.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
13. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
14. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
15. Normey-Rico J.E. Control of dead-time process. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
16. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
17. Левин А.А. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Советское радио, 1968. 504 с.
18. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976. 576 с.
20. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Физматлит, 1961. 311 с.
21. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматлит, 1963. 236 с.

22. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
23. Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendible dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
24. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Советское радио, 1968. 256 с.
25. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

**Березин Дмитрий Владимирович.** E-mail: berezin14@mail.ru

**Нежелская Людмила Алексеевна,** д-р физ.-мат. наук, доцент. E-mail: ludne@mail.tsu.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 3 сентября 2017 г.

*Berezin Dmitriy V., Nezhel'skaya Lyudmila A.* (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

**Optimal state estimation of Generalized MAP under conditions of non-extendable dead time.**

**Keywords:** generalized MAP; optimal state estimation; method of a posteriori probability maximum; non-extendable dead time.

DOI: 10.17223/19988605/41/2

The paper deals with Generalized MAP (GMAP) with intensity being piecewise constant stationary process  $\lambda(t)$  with two states:  $\lambda(t) = \lambda_1$  and  $\lambda(t) = \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ). The duration of state  $i$  ( $i = 1, 2$ ) is an exponentially distributed random variable with distribution function  $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2$ . When the state  $i$  ends the process switches to state  $j$  with probability  $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$  at an event, and switches to state  $j$  with probability  $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\sum_{j=1}^2 (P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i)) = 1$  without an event. Each registered event at time instant  $t_k$  generates dead time period of duration  $T$  when the other occurring events of GMAP are not observable. After ending of dead time the first occurring event again generates dead time  $T$ . The process  $\lambda(t)$  is not observable, only time instants of events  $t_1, t_2 \dots$  are observable. It is necessary to estimate states of  $\lambda(t)$  (or GMAP) by only these time instants  $t_1, t_2 \dots$ .

It is assumed that  $\lambda(t)$  is stationary. The observation of the process is performed over the period  $(t_0, t)$ , where  $t_0$  is the beginning of observation, and  $t$  is the end of observation. To estimate states of  $\lambda(t)$  it is necessary to calculate a posteriori probabilities  $w(\lambda_i | t)$  that at time instant  $t$  the process' state  $\lambda(t) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . If  $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , then  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$ , otherwise  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$ .

The explicit formula for a posteriori probability  $w(\lambda_i | t)$  ( $w(\lambda_1 | t) = 1 - w(\lambda_2 | t)$ ) at time intervals is derived when GMAP is observable. The recalculation formula of a posteriori probability at time instants  $t_k$  of occurring an event is derived as well as explicit formula for  $w(\lambda_1 | t)$  at time intervals, where the GMAP is not observable, i.e. during dead time  $T$ .

The described numerical results demonstrate high quality of estimation.

## REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes. *Proc. of Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proc. of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya Akademii Nauk USSR. Tekhn. Kibern.* 17(6). pp. 92–99.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya Akademii Nauk USSR. Tekhn. Kibern.* 1. pp. 55–61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Marcovian arrival process. *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 7. P. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: Belarusian State University.
8. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 1153–1167. DOI: 10.1007/BF00559693
9. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101. (In Russian).
10. Centanni, S. (2006) Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultra-high-frequency financial data. *Statistical Modelling*. 6. pp. 97–118. DOI: 10.1191/1471082X06st1120a
11. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750

12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. Issue. 1. pp. 18–23.
13. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density function of interval duration of generic asynchronous event flow in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25. (In Russian).
14. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29. (In Russian).
15. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time process*. London: Springer-Verlag.
16. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Soloviev, A.A. (2012) Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316–1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
17. Levin, A.A. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Soviet Radio. 504 p. (In Russian).
18. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probabilities and Random Processes]. Tomsk: NTL.
19. Kamke, E. (1976) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Differential Equations]. Translated from German by S. Fomin. Moscow: Nauka.
20. Pontryagin, L.S. (1961) *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow: Fizmatlit.
21. Khinchin, A.Y. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Mathematical Queuing Theory]. Moscow: Fizmatlit.
22. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
23. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350.
24. Hazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions]. Moscow: Soviet Radio.
25. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical Methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.