МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Международная лаборатория статистики случайных
процессов и количественного финансового анализа

Международная научная конференция «Робастная статистика и финансовая математика – 2017»

(03–05 июля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора С.М. Пергаменщикова,
канд. физ.-мат. наук, доцента Е.А. Пчелинцева

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Об оценивании функции сноса в диффузионных процессах *

Макарова И. А., Пчелинцев Е. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: star_ irish@bk.ru

Аннотация

В настоящей работе рассматривается адаптивная задача непараметрического оценивания коэффициента сноса в диффузионных процессах. Предложена процедура выбора модели на основе улучшенных взвешенных оценках наименьших квадратов.

Ключевые слова: улучшенная оценка, стохастический диффузионный процесс , среднеквадратическая точность, выбор модели.

Введение. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ определено стохастическое дифференциальное уравнение

$$\mathrm{d}y_t = S(y_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}w_t\,, \quad 0 \leq t \leq T\,, \tag{1}$$

где $(w_t)_{t\geq 0}$ – стандартный винеровский процесс, начальное значение y_0 – некоторая известная постоянная, а $S(\cdot)$ – неизвестная функция. Задача заключается в том, чтобы оценить функцию $S(x)$, $x \in [a, b]$, по наблюдениям процесса $(y_t)_{0\leq t\leq T}$. Задача калибровки модели (1) является важной во многих приложениях. В частности, она возникает при построении оптимальных стратегий поведения инвесторов на диффузионных финансовых рынках. Известно, что оптимальная стратегия зависит от неизвестных параметров рынка, в том числе и от неизвестной функции сноса S. Поэтому в практических финансовых расчетах необходимо использовать статистические оценки для S, которые являются надежными на некотором фиксированном временном интервале $[0, T]$ [3]. Ранее, проблема неасимптотического оценивания параметров диффузионных процессов изучалась многими авторами (см., например, монографию [5] и ссылки в ней). Установлено также, что многие трудности неасимптотического оценивания параметров для одномерных

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект No 17-11-01049.

диффузионных процессов можно преодолеть, используя последовательный подход. Оказывается, что теоретический анализ последовательных оценок проще, чем анализ классических процедур. В частности, можно рассчитать неасимптотические оценки для квадратического риска.

В настоящей работе рассматривается задача оценивания неизвестной функции $S(x)$, $a \le x \le b$, в смысле среднеквадратического риска

$$\mathcal{R}(\widehat{S}_T, S) = \mathbf{E}_S \|\widehat{S}_T - S\|^2, \quad \|S\|^2 = \int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

где $\widehat{S}_T$ – оценка для S по наблюдениям $(y_t)_{0\le t\le T}$, $a < b$ – некоторые вещественные числа. Здесь $\mathbf{E}_S$ обозначает математическое ожидание относительно распределения $\mathbf{P}_S$ случайного процесса $(y_t)_{0\le t\le T}$ при заданной функции S.

Цель этой статьи – построить адаптивную оценку S^* коэффициента сноса S в (1) и показать, что квадратический риск этой оценки меньше, чем риск оценки, предложенной в [1], т.е. предлагается построить улучшенную оценку в смысле среднеквадратической точности. Для этого мы используем подход к улучшенному оцениванию, предложенный в [6] и [4] для параметрических моделей регрессии и развитый недавно в [7] для задач непараметрического оценивания. Более того, в статье рассматривается задача оценивания в адаптивной постановке, т.е. когда регулярность функции S неизвестна. Для этого используется метод выбора модели, предложенный в [7].

Далее, в разделе 2 статьи исходная задача сводится к задаче оценивания в непараметрической регрессионной модели с дискретным временем. В разделе 3 предлагаются улучшенные взвешенные оценки наименьших квадратов. В разделе 4 для оценивания функции S строится процедура выбора модели на основе улучшенных оценках МНК.

Неоднородная регрессионная модель с дискретным временем. Чтобы получить надежную оценку функции S, необходимо наложить на нее определенные условия, аналогичные периодичности детерминированного сигнала в модели белого шума [2]. Одним из условий, достаточного для этого, является предположение, что процесс $(y_t)_{t\ge 0}$ в (1) возвращается в любую окрестность каждой точки $x \in [a, b]$. Чтобы получить эргодичность процесса (1), предположим, что функция S принадлежит функциональному классу

$\Sigma_{L,N}$ ($L > 1$, $N > |a| + |b|$), определенному в [1]. Отметим, что если функция $S \in \Sigma_{L,N}$, то существует инвариантная плотность

$$q(x) = q_S(x) = \frac{\exp\{2\int_0^x S(z)\mathrm{d}z\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{2\int_0^y S(z)\mathrm{d}z\}\mathrm{d}y}. \qquad (3)$$

Также функции из класса $\Sigma_{L,N}$ являются равномерно ограниченными на $[a, b]$, т.е.

$$s^* = \sup_{a\le x\le b} \sup_{S\in\Sigma_{L,N}} S^2(x) < \infty .$$

Рассмотрим разбиение интервала $[a, b]$ точками $(x_k)_{1\le k\le n}$, определенными как

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) , \qquad (4)$$

где $n = n(T)$ – целочисленная функция от T такая, что

$$n(T) \le T \quad \text{and} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{n(T)}{T} = 1 . \qquad (5)$$

Теперь в каждой точке x_k оценим функцию S последовательными ядерными оценками. Пусть $0 < t_0 < T$ – некоторый фиксированный момент, тогда положим

$$\begin{cases} \tau_k & = \inf\{t \ge t_0 \,:\, \int_{t_0}^t Q\left(\frac{y_s - x_k}{h}\right) \mathrm{d}s \ge H_k\} ; \\ \\ \widetilde{S}_k & = \frac{1}{H_k} \int_{t_0}^{\tau_k} Q\left(\frac{y_s - x_k}{h}\right) \mathrm{d}y_s , \end{cases} \qquad (6)$$

где $Q(z) = \mathbf{1}_{\{|z|\le 1\}}$, $\mathbf{1}_A$ – индикатор множества A, $h = (b-a)/(2n)$ и H_k – положительные пороги, которые определены ниже. Из (1) нетрудно видеть, что

$$\widetilde{S}_k = S(x_k) + \zeta_k .$$

Здесь шум ζ_k является суммой аппроксимирующей и стохастической частей, т.е.

$$\zeta_k = B_k + \frac{1}{\sqrt{H_k}} \xi_k , \quad B_k = \frac{1}{H_k} \int_{t_0}^{\tau_k} Q\left(\frac{y_s - x_k}{h}\right) \Delta S(y_s, x_k)\mathrm{d}s ,$$

где $\Delta S(y, x) = S(y) - S(x)$ и

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{H_k}} \int_{t_0}^{\tau_k} Q\left(\frac{y_s - x_k}{h}\right) \mathrm{d}w_s$$

являются независимыми $\mathcal{N}(0, 1)$.

Далее необходимо оценить плотность (3) по наблюдениям $(y_t)_{0\le t\le t_0}$. Пусть

$$\widetilde{q}_T(x_k) = \max\{\widehat{q}(x_k) , \epsilon_T\} ,$$

где $0 < \epsilon_T < 1$,

$$\widehat{q}(x_k) = \frac{1}{2t_0 h} \int_0^{t_0} Q\left(\frac{y_s - x_k}{h}\right) \mathrm{d}s\,.$$

Тогда определим порог H_k в (6) следующим образом:

$$H_k = (T - t_0)(2\widetilde{q}_T(x_k) - \epsilon_T^2)h\,.$$

Предположим, что параметры $t_0 = t_0(T)$ и ϵ_T удовлетворяют следующим условиям:

$\mathbf{H}_1$) *Для всех* $T \geq 32$,

$$16 \leq t_0 \leq T/2 \quad \text{и} \quad \sqrt{2}/t_0^{1/8} \leq \epsilon_T \leq 1\,.$$

$\mathbf{H}_2$)

$$\lim_{T\to\infty} t_0(T) = \infty\,, \quad \lim_{T\to\infty} \epsilon_T = 0\,, \quad \lim_{T\to\infty} T\epsilon_T/t_0(T) = \infty\,.$$

$\mathbf{H}_3$) *Для всех* $\nu > 0$ *и* $m > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} T\epsilon_T^m = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{T\to\infty} T^m\, e^{-\nu\sqrt{t_0}} = 0\,.$$

Например, при $T \geq 32$,

$$t_0 = \max\{\min\{\ln^4 T\,,\, T/2\}\,,\, 16\} \quad \text{и} \quad \epsilon_T = \sqrt{2}\, t_0^{-1/8}\,.$$

Пусть

$$\Gamma = \{\max_{1\leq l\leq n} \tau_l \leq T\} \quad \text{и} \quad Y_k = \widetilde{S}_k\, \mathbf{1}_\Gamma\,. \tag{7}$$

Тогда на множестве Γ существует временная гетероскедастичная регрессионная модель

$$Y_k = S(x_k) + \zeta_k\,, \quad \zeta_k = \sigma_k\,\xi_k + \delta_k \tag{8}$$

с $\delta_k = B_k$ и

$$\sigma_k^2 = \frac{n}{(T - t_0)(\widetilde{q}_T(x_k) - \epsilon_T^2/2)(b-a)}\,.$$

Заметим, что из (5) и $\mathbf{H}_1$), находим верхнюю границу

$$\max_{1\leq k\leq n} \sigma_k^2 \leq \frac{4}{(b-a)\epsilon_T} = \sigma_* \tag{9}$$

для которой из условия $\mathbf{H}_3$) имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sigma_*}{T^m} = 0 \quad \text{для всех} \quad m > 0\,.$$

Чтобы оценить S по наблюдениям (8), необходимо изучить некоторые свойства множества Γ в (7).

Предложение 1. *Пусть параметры* t_0 *и* ϵ_T *удовлетворяют условиям* $\mathbf{H}_1$) – $\mathbf{H}_3$). *Тогда*

$$\sup_{S\in\Sigma_{L,N}} \mathbf{P}_S(\Gamma^c) \leq \Pi_T\,,$$

где $\lim_{T\to\infty} T^m\,\Pi_T = 0$ *для всех* $m > 0$.

Основной результат. В этом параграфе мы рассмотрим задачу оценивания для модели (8). В ней $S(\cdot)$ – неизвестная функция, которую требуется оценить по наблюдениям $Y_1, \ldots, Y_n$.

Точность оценивания будем измерять эмпирическим среднеквадратическим риском вида

$$\|\widehat{S} - S\|_n^2 = (\widehat{S} - S, \widehat{S} - S)_n = \frac{b-a}{n} \sum_{l=1}^n (\widehat{S}(x_l) - S(x_l))^2 \,.$$

Пусть $(\phi_j)_{1 \le j \le n}$ – ортонормированный базис в смысле эмпирического скалярного произведения:

$$(\phi_i\,,\,\phi_j)_n = \frac{b-a}{n} \sum_{l=1}^n \phi_i(x_l)\phi_j(x_l) = \mathbf{Kr}_{ij}\,,$$

где $\mathbf{Kr}_{ij}$ – символ Кронекера. Воспользовавшись этим, применим дискретное преобразование Фурье к (8) и получим коэффициенты Фурье

$$\widehat{\theta}_{j,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{l=1}^n Y_l \phi_j(x_l)\,, \quad \theta_{j,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{l=1}^n S(x_l)\,\phi_j(x_l)\,.$$

Из (8) следует, что

$$\widehat{\theta}_{j,n} \;=\; \theta_{j,n} \,+\, \zeta_{j,n} \quad \text{с} \quad \zeta_{j,n} = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \xi_{j,n} + \delta_{j,n}\,,$$

где

$$\xi_{j,n} = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{l=1}^n \sigma_l \xi_l \phi_j(x_l) \quad \text{и} \quad \delta_{j,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{l=1}^n \delta_l\,\phi_j(x_l)\,.$$

Введем класс взвешенных оценок МНК для S в (8) на сетке (4):

$$\widehat{S}_\lambda(x_l) \;=\; \sum_{j=1}^n \lambda(j)\,\widehat{\theta}_{j,n}\,\phi_j(x_l)\,\mathbf{1}_\Gamma\,, \quad 1 \le l \le n\,,$$

где весовой вектор $\lambda = (\lambda(1), \ldots, \lambda(n))$ принадлежит некоторому конечному множеству $\Lambda \subset [0,1]^n$. Тогда для каждого $a \le x \le b$

$$\widehat{S}_\lambda(x) = \widehat{S}_\lambda(x_1)\mathbf{1}_{\{a \le x \le x_1\}} + \sum_{l=2}^n \widehat{S}_\lambda(x_l)\mathbf{1}_{\{x_{l-1} < x \le x_l\}}\,. \tag{10}$$

Далее предположим, что первые $d \le n$ координат вектора λ равны 1, т.е. $\lambda(j) = 1$ для всех $1 \le j \le d$.

Определим новый класс оценок для S в (8):

$$S^*_\lambda(x_l) \;=\; \sum_{j=1}^n \lambda(j)\,\theta^*_{j,n}\,\phi_j(x_l)\,\mathbf{1}_\Gamma\,, \quad 1 \le l \le n\,,$$

где

$$\theta^*_{j,n} = \left(1 - \frac{c(d)}{\|\widetilde{\theta}_n\|}\mathbf{1}_{\{1 \le j \le d\}}\right)\widehat{\theta}_{j,n},$$

и

$$c(d)=\frac{(d-1)\sigma_*^2 L(b-a)^{1/2}}{n(s^*+\sqrt{d\sigma_*/n})}\,,\quad \|\widetilde{\theta}_n\|^2=\sum_{j=1}^{d}\widehat{\theta}^2_{j,n}.$$

Тогда для каждого $a\le x\le b$ положим

$$S^*_\lambda(x)=S^*_\lambda(x_1)\mathbf{1}_{\{a\le x\le x_1\}}+\sum_{l=2}^{n}S^*_\lambda(x_l)\mathbf{1}_{\{x_{l-1}<x\le x_l\}}\,. \qquad (11)$$

Обозначим разность рисков оценок (11) и (10), как

$$\Delta_n(S):=\mathbf{E}_S\|S^*_\lambda-S\|^2_n-\mathbf{E}_S\|\widehat{S}_\lambda-S\|^2_n.$$

Оценки (11) позволяют контролировать точность.

Теорема 1. *Оценка* (11) *превосходит по среднеквадратической точности оценку* (10), *т.е.*

$$\sup_{S\in\Sigma_{L,N}}\Delta_n(S)<-c^2(d).$$

Улучшенная процедура выбора модели. Чтобы получить достаточно хорошую оценку, необходимо описать правило выбора весового вектора $\lambda\in\Lambda$ в (11). Ясно, что наилучшим способом является минимизация эмпирической среднеквадратической ошибки относительно λ:

$$\mathrm{Err}_n(\lambda)=\|S^*_\lambda-S\|^2_n\to\min\,.$$

Используя (11) и преобразование Фурье для S, имеем

$$\mathrm{Err}_n(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\lambda^2(j)\theta^{*2}_{j,n}\,-2\sum_{j=1}^{n}\lambda(j)\theta^*_{j,n}\,\theta_{j,n}\,+\sum_{j=1}^{n}\theta^2_{j,n}\,.$$

Поскольку коэффициент $\theta_{j,n}$ неизвестен, необходимо заменить величины $\theta^*_{j,n}\,\theta_{j,n}$ их некоторыми оценками. Положим

$$\widetilde{\theta}_{j,n}=\widehat{\theta}_{j,n}\theta^*_{j,n}-\frac{b-a}{n}s_{j,n}\quad \text{с}\quad s_{j,n}=\frac{b-a}{n}\,\sum_{l=1}^{n}\sigma^2_l\,\phi^2_j(x_l)\,.$$

Нужно заплатить штраф за эту замену в эмпирической среднеквадратической ошибке. Поэтому определим платежную функцию

$$J_n(\lambda)\,=\sum_{j=1}^{n}\lambda^2(j)\theta^{*2}_{j,n}\,-2\sum_{j=1}^{n}\lambda(j)\,\widetilde{\theta}_{j,n}\,+\,\rho P_n(\lambda)\,,$$

где "штрафное" слагаемое

$$P_n(\lambda)=\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda^2(j)s_{j,n}$$

и $0<\rho<1$ – некоторое положительное число. Пусть

$$\widehat{\lambda}=\mathrm{argmin}_{\lambda\in\Lambda}\,J_n(\lambda),$$

тогда выбирается следующая улучшенная оценка для S из класса (10):

$$S^*(x) = S^*_{\hat{\lambda}}(x) \quad \text{для} \quad a \le x \le b\,.$$

Литература

1. Galtchouk L.I., Pergamenshchikov S.M. Asymptotically efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2006. No 9. P. 1-16.

2. Ibragimov I.A., Hasminskii R.Z. Statistical Estimation: Asymptotic Theory. Springer, New York. 1979.

3. Karatzas I., Shreve S.E. Methods of Mathematical Finance. Springer, New York. 1998.

4. Konev V., Pergamenshchikov S., Pchelintsev E. Estimation of a regression with the pulse type noise from discrete data // Theory Probab. Appl. 2014. V. 58. No 3. P. 442–457.

5. Kutoyants Yu. Statistical inference for ergodic diffusion processes. Springer-Verlag, London. 2004.

6. Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Stat. Inference Stoch. Process. V. 16. No 1. P. 15 – 28.

7. Pchelintsev E., Pchelintsev V. and Pergamenshchikov S. Improved robust model selection methods for the Lévy nonparametric regression in continuous time // Preprint http://arxiv.org/abs/1710.03111. P. 1 – 32.

Makarova I.A., Pchelintsev E.A. (Tomsk State University, Tomsk, 2017) **On the estimation of a drift function in diffusion processes.**

Abstract. In this paper, we consider the robust adaptive nonparametric estimation problem for the drift coefficient in diffusion processes. An adaptive model selection procedure, based on the improved weighted least square estimates, is proposed.

Key words: Improved estimation, stochastic diffusion process, mean-square accuracy, model selection.