

М.А. Пономарева, В.А. Якутенок

**НЕПРЯМОЙ МЕТОД
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Учебно-методическое пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-технический факультет

М.А. Пономарева, В.А. Якутенок

**НЕПРЯМОЙ МЕТОД
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

РАССМОТРЕНО И РЕКОМЕНДОВАНО К ПЕЧАТИ Советом физико-технического факультета Томского государственного университета
Протокол № 8 от «17» октября 2017 г.
Председатель Совета ФТФ Э.Р. Шрагер

В данном учебно-методическом пособии представлены физико-математическая постановка задачи о двумерном ползущем течении вязкой жидкости со свободной поверхностью и численная реализация непрямого метода граничных элементов для данного случая. В качестве примера рассмотрено течение в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре.

Пособие составлено в соответствии с программой курса «Моделирование гидроаэродинамических процессов методом граничных элементов» для студентов физико-технического факультета направления подготовки 16.04.01 – Техническая физика.

Для преподавателей, аспирантов, студентов и магистрантов, слушателей ФПК.

АВТОРЫ: М.А. Пономарева, В.А. Якутенок

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	4
2. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ	11
3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ	15
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	20

1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Сформулируем физико-математическую постановку задачи.

При $Re \ll 1$, в присутствии силы тяжести, течение вязкой жидкости описывается уравнениями Стокса, которые можно записать в виде [1]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.1)$$

где $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \dot{e}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, p – давление, μ – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность, g_i – компоненты вектора ускорения силы тяжести \vec{g} , $\dot{e}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ – компоненты тензора скоростей деформаций, u_i – компоненты вектора скорости, x_i – декартовы координаты.

К уравнению (1.1) следует присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.2)$$

Будем считать, что на границе S области, занятой ньютоновской жидкостью, могут быть заданы граничные условия двух типов: либо скорости (на твердых стенках – условия прилипания, на входной границе – соответствующий профиль скорости), либо в случае свободной границы, равенство нулю силы, действующей со стороны газа на жидкость (постоянное давление в газе можно не учитывать, т. к. оно дает постоянную добавку в величину давления). Таким образом, граничные условия имеют вид

$$u_i(x) = U_i(x), \quad x \in S_1; \quad t_i(x) = \sigma_{ij} n_j = 0, \quad x \in S_2, \quad (1.3)$$

где S_2 – свободная поверхность, $S_1 = S \cap S_2$, n_j – компоненты внешней нормали к S_2 . При необходимости, задание конкретной величины внешнего давления не представляет затруднений.

Следует отметить, что может рассматриваться ситуация, когда на всей границе S заданы условия первого рода (свободная граница отсутствует) или второго (вся граница области течения – свободная). Также

возможно рассмотрение течения в многосвязной области. Такого вида варианты задания граничных условий практически не изменяют алгоритма построения метода решения.

Дополнительно свободная граница подчиняется кинематическому условию, которое записывается в эйлеровой или лагранжевой формах соответственно, в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} f = 0, \quad (1.4, a)$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (1.4, б)$$

где $f(x, t)$ – функция, задающая S_2 .

Условия (1.4) используются для нахождения формы свободной границы. Для перехода к безразмерным переменным введем следующие масштабы: для координат – R (характерный размер области, занятой жидкостью), для скорости – U , для напряжений – $\mu U/R$. Тогда уравнение (1.1) примет вид (сохраняя прежние обозначения для безразмерных переменных)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.5)$$

где $W_i = W \cdot (\vec{g} \cdot \vec{e}_i) / |\vec{g}|$, $W = \rho |\vec{g}| R^2 / (\mu U)$, \vec{e}_i – орты декартовой системы координат.

Следовательно, кроме геометрических, имеется всего один определяющий параметр – число W , которое, являясь отношением чисел Рейнольдса и Фруда, характеризует соотношение гравитационных и вязких сил в потоке жидкости. Данный параметр принято называть числом Стокса.

В уравнении (1.5) можно избавиться от постоянного слагаемого, вводя потенциал для массовой силы: $\varphi = W_j x_j$. Тогда, сохраняя прежние обозначения, будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.6)$$

но теперь $\sigma_{ij} = -(p - \varphi)\delta_{ij} + 2\mu \dot{e}_{ij}$. Далее под величиной давления будем понимать его модифицированное значение $p - \varphi$. Соответственно видоизменится граничное условие на свободной поверхности, которое следует использовать в виде

$$t_i(x) = W_j x_j n_i, \quad x \in S_2. \quad (1.7)$$

Таким образом, математическая формулировка задачи включает уравнения (1.2), (1.6) с граничными условиями (1.3), (1.4) (с учетом (1.7)). В качестве начального условия необходимо задавать форму свободной границы в начальный момент времени.

Осуществим переход к гранично-интегральным уравнениям [2].

Линеаризованная система уравнений Навье-Стокса (1.2), (1.6) для случая единичной сосредоточенной силы, действующей вдоль координатной оси "j" и приложенной в точке "ξ" имеет вид

$$\Delta \vec{u}_j - \text{grad } p_j = \delta(x - \xi) \vec{e}_j, \quad \text{div } \vec{u}_j = 0, \quad (1.8)$$

где $\delta(x - \xi)$ – дельта-функция Дирака. Дифференцирование проводится по переменной x ; ξ рассматривается как параметр.

Сингулярное решение системы (1.8) записывается следующим образом [3]:

$$u_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left[\delta_{ij} \ln \frac{1}{|x - \xi|} + \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|x - \xi|^2} \right], \quad (1.9)$$

$$p_j = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \frac{1}{|x - \xi|}.$$

Далее будем использовать обозначения: $r = |x - \xi|$, $y_i = x_i - \xi_i$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Подставляя (1.9) в выражение для напряжений, можно получить

$$\sigma_{ikj} = \frac{y_i y_k y_j}{\pi r^4}. \quad (1.10)$$

Следовательно, для усилий в точке x поверхности с нормалью $n_k(x)$ имеем

$$t_{ij} = \sigma_{ikj} n_k = \frac{y_i y_j y_k n_k}{\pi r^4}. \quad (1.11)$$

Соотношения (1.9), (1.11) позволяют перейти к интегральной формулировке нашей задачи. Для этого реальную область течения заменим фиктивной, отличающейся тем, что она считается помещенной в неограниченную двумерную область, заполненную ньютоновской жидкостью. На границе фиктивной области будем считать распределенными сосредоточенные силы неизвестной интенсивности $\phi_j(\xi)$, таким образом, чтобы были выполнены граничные условия (1.3), (1.7). Скорости u_i и усилия t_i в любой внутренней точке x можно найти сверткой фундаментальных сингулярных решений (1.9), (1.11) с функциями $\phi_j(\xi)$ по следующим формулам

$$u_i(x) = \int_S u_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi), \quad (1.12)$$

$$t_i(x) = \int_S t_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi). \quad (1.13)$$

Очевидно, что уравнения (1.12), (1.13) удовлетворяют дифференциальным уравнениям нашей задачи в любой внутренней точке и определяют решение при выполнении граничных условий.

Последний шаг в получении интегральных граничных уравнений состоит в помещении точек наблюдения на границу S ($x \rightarrow x_0$, $x_0 \in S$). В этом случае интегральные уравнения (1.12), (1.13) становятся сингулярными, т.к. фундаментальные решения неограниченны в точках $x = \xi$. Первый интеграл, имея в ядре логарифмическую особенность, может быть вычислен в обычном смысле. Второй интеграл имеет в подынтегральном выражении особенность $1/r$, поэтому его следует понимать в смысле главного значения по Коши. Свободный член вычисляется стандартным методом теории потенциала и в точке x_0 , в которой существует единственная касательная к границе, можно записать

$$t_i(x) = \frac{1}{2} \phi_i(x_0) + \int_S t_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi). \quad (1.14)$$

Граничные интегральные уравнения (1.12) (при $x \rightarrow x_0$) и (1.14) при заданных в соответствии с (1.3), (1.7) $u_i(x_0)$ и $t_i(x_0)$ позволяют получить значения неизвестных граничных сил $\phi_j(\xi)$ и, таким образом, решить задачу, т.к. сверткой с соответствующим фундаментальным решением можно найти внутри границы S и на ней значения любых переменных.

Перейдем к разработке метода решения, основываясь на полученных гранично-интегральных уравнениях (1.12), (1.14).

Найти аналитическое решение системы (1.12), (1.14) не представляется возможным даже для областей простой формы, поэтому она решается численно. Разобьем границу области, занятой жидкостью, на N прямолинейных отрезков (элементов) и будем считать функцию $\phi_j(\xi)$ постоянной в пределах элемента. Тогда (1.12), (1.14) в дискретизированной форме приобретут вид

$$u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^n \phi_j(\xi^q) \int_{\Delta S^q} u_{ij}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) \quad (1.15)$$

$$t_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^n \phi_j(\xi^q) \int_{\Delta S^q} t_{ij}(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) \quad (1.16)$$

Здесь x_0^p – некоторая точка элемента с номером p , которую будем называть узлом. В качестве узлов будем выбирать середины граничных элементов. Из системы линейных алгебраических уравнений (1.15), (1.16) берутся N уравнений, причем уравнения (1.16) соответствуют элементам на свободной поверхности; на всех других элементах заданы скорости, поэтому для них используется уравнения (1.15).

Интегралы в уравнениях (1.15), (1.16), являющиеся коэффициентами системы линейных уравнений, можно вычислить аналитически. Для этого вводится декартова система координат y_i ($i = 1, 2$), нормально связанная с элементом q (не путать с ранее введенным обозначением

$y_i = x_i - \xi_i$). Причем ось y_1 направлена по внешней нормали к элементу, ось y_2 – в положительном направлении касательной (против часовой стрелки). Начало системы координат y_i находится в точке p , т.е.

$y_i = e_{ij}(x_j - x_j^p)$. Здесь e_{ij} – направляющие косинусы осей. В этом случае, если к тому же использовать полярные координаты (рисунок 1.1) r, Θ , интегралы в уравнениях (1.15), (1.16) будут иметь вид

$$\int_{\Delta S^q} u_{ij}^{pq} dS(\xi^q) = \frac{1}{4\pi} [\delta_{ij} (\ln r - 1) y_2 - y_1 (e_{1j} e_{2i} + e_{2j} e_{1i}) \ln r - e_{2i} e_{2j} (y_2 - 2y_1 \Theta)]_q^{q+1}, \quad (1.17)$$

$$\int_{\Delta S^q} t_{ij}^{pq} dS(\xi^q) = \frac{1}{2\pi} \left\{ e_{1i} e_{1j} [\bar{n}_1 (\Theta + \sin \Theta \cos \Theta) + \bar{n}_2 \sin^2 \Theta] + (e_{1i} e_{2j} + e_{2i} e_{1j}) [\bar{n}_1 \sin^2 \Theta + \bar{n}_2 (\Theta - \sin \Theta \cos \Theta)] + e_{2i} e_{2j} [\bar{n}_1 (\Theta - \sin \Theta \cos \Theta) - \bar{n}_2 (\sin^2 \Theta - 2 \ln r)] \right\}_q^{q+1},$$

где $\bar{n}_i = e_{ij} n_j$.

Уравнения (1.17) верны для всех узлов x_0^p , за исключением случая $q = p$, т.е. совпадения точек наблюдения и приложения нагрузки. В этом случае:

$$\Theta_q \rightarrow -\pi/2, \quad \Theta_{q+1} \rightarrow \pi/2; \quad \bar{n}_1 = 1, \quad \bar{n}_2 = 0;$$

$$r_q = r_{q+1} \rightarrow \Delta S_q / 2, \quad y_1^q = y_1^{q+1} \rightarrow 0.$$

Тогда получаем

$$\int_{\Delta S^q} u_{ij}^{qq} dS(\xi^q) = \frac{\Delta S_q}{4\pi} \left\{ \delta_{ij} [(\ln(\Delta S_q / 2) - 1)] - e_{2i} e_{2j} \right\}, \quad (1.18)$$

$$\int_{\Delta S^q} t_{ij}^{qq} dS(\xi^q) = \frac{1}{2\pi} \delta_{ij},$$

где ΔS_q – длина элемента ”q”.

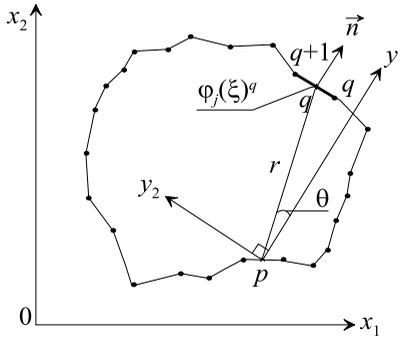


Рисунок 1.1 – Общий вид области течения.

Второе уравнение (1.18) показывает, что вклад в интеграл при $q = p$ дает лишь свободный член, главное же значение по Коши на элементе $q = p$ равно нулю. Используя формулы (1.17), (1.18) можно получить систему уравнений, которая в матричной форме будет иметь вид

$$\left\{ \begin{matrix} u^p \\ t^p \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{\Delta S} u^{pq} dS \\ \int_{\Delta S} t^{pq} dS \end{matrix} \right\} \left\{ \phi^q \right\}. \quad (1.19)$$

$$2N \times 1 \quad 2N \times 2N \quad 2N \times 1$$

Система (1.19) решается стандартным методом Гаусса с выбором главного элемента и в результате определяется вектор-столбец $\left\{ \phi^q \right\}$.

Скорости, давление и напряжения можно вычислить в любой точке области с помощью численного интегрирования по дискретным аналогам соотношений, подобных уравнениям (1.12), (1.13).

После нахождения значений скоростей в узлах, принадлежащих свободной границе рассчитывается её новое положение с помощью кинематического условия, записанного в виде (1.4). Как показывает численная практика для реализации условия (1.4, a) лучше всего использовать разностную схему с разностями против потока, которая в случае использования декартовых координат имеет вид

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = u_{2_i}^n - u_{1_i}^n \frac{\Delta f_i^n}{\Delta x_1}, \quad (1.20, a)$$

$$\Delta f_i = \begin{cases} f_{i+1} - f_i, & u_{1_i} < 0, \\ f_i - f_{i-1}, & u_{1_i} > 0, \end{cases}$$

где n – номер шага по времени; Δx_1 – шаг разностной сетки по координате x_1 ; i – номер узла на свободной поверхности, Δt – шаг по времени. Условие устойчивости данной схемы представляется как

$$\Delta t \leq \min_i \left| \frac{\Delta x_i}{u_i} \right|.$$

Граничное условие (1.4, б) дает следующие разностные формулы для вычисления новой формы свободной границы

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t \cdot u_i^n, \quad i = 1, 2. \quad (1.20, б)$$

В соответствии с выписанными выражениями находятся новые координаты узлов, принадлежащих свободной границе. Использование данных вариантов определяется спецификой задачи. Таким образом, данную задачу можно характеризовать как квазистационарную, т.к. для заданной формы границы находится решение, используемое для нахождения новой формы.

2. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

В настоящем пособии в качестве примера применения вышеизложенного метода решения к исследованию конкретных течений рассматривается задача о расчете движения вязкой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре. Постановка задачи и метод решения в целом совпадает с изложенным в п. 1. Конкретизации требуют: область решения, граничные условия и способ выбора характерных масштабов для обезразмеривания.

Область течения в начальный момент времени и ее геометрические характеристики представлены на рисунке 2.1. Начальная форма области, занятой жидкостью задана в виде окружности с центром на оси вращения цилиндра (рисунок 2.1), что соответствует распределению жидкости слоем равномерной толщины на боковой поверхности цилиндра.

На твердой стенке используются условия прилипания

$$u_1 = \omega(R - x_2), \quad u_2 = \omega(x_1 - R), \quad (2.1)$$

где ω – угловая скорость вращения цилиндра, R – радиус цилиндра.

Граничные условия на свободной поверхности заключаются в отсутствии касательных напряжений и равенстве нормального напряжения давлению внутри цилиндра p_0

$$t_i(x) = \sigma_{ij}n_j = -p_0n_i. \quad (2.2)$$

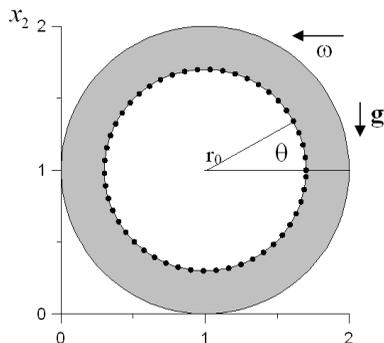


Рисунок 2.1 – Область течения в начальный момент времени.

Стационарная форма свободной поверхности находилась двумя способами, основанными на соотношениях (1.4, а) (1.4, б). В первом случае применялся метод последовательных приближений с использованием полярных координат (r, θ)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u_r - \frac{u_\theta}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (2.3)$$

где $f(r, \theta)$ – функция, описывающая свободную поверхность, u_r, u_θ – компоненты вектора скорости в полярных координатах. На стационарной свободной поверхности должно быть $\partial f / \partial t = 0$. При определении но-

вого положения поверхности использовалась разностная схема аналогичная схеме (1.20, *a*).

Нетрудно заметить, что эйлерова форма записи кинематического условия (1.4, *a*) подразумевает однозначность функции формы границы $f(r, \theta)$. В результате, образующийся на свободной поверхности наплыв (при наличии вихревой зоны в области течения), представляет собой просто разрыв первого рода функции $f(r, \theta)$ в окрестности точки стекания (см. п.3). Более естественное лагранжевое представление (1.4, *b*) не было ранее реализовано по причине значительных вычислительных проблем. Данные проблемы носят алгоритмический и аппаратный характер. Создание эффективного алгоритма движения точек свободной границы (с перераспределением и добавлением узлов на свободной поверхности), использование параллельной реализации высокопроизводительной математической библиотеки для решения СЛАУ задачи (модуль линейной алгебры LAPACK из библиотеки Intel Math Kernel Library, входящей в Intel® Visual Fortran Composer XE 2011) и проведение расчетов на базе вычислительного центра Томского госуниверситета (суперкомпьютер СКИФ Siberia) позволило в целом решить эти проблемы.

В остальном метод решения полностью совпадает с изложенным в п. 1 алгоритмом.

Задача рассматривается в безразмерных переменных. Для перехода к безразмерным переменным введем следующие масштабы: для координат – R , для скорости – ωR , для напряжений – $\mu \omega$. Тогда система уравнений (1.5) с сохранением прежних обозначений для безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.4)$$

где $W_i = W \cdot (\vec{g} \cdot \vec{e}_i) / |\vec{g}|$, $W = \rho |\vec{g}| R / (\mu \omega)$, \vec{e}_i – орты декартовой системы координат.

Следовательно, кроме геометрических, имеется всего один определяющий параметр – число Стокса W , которое, являясь отношением чисел Рейнольдса и Фруда, характеризует соотношение гравитационных и вязких сил в потоке жидкости.

В уравнении (2.4), как было показано в п. 1, можно избавиться от постоянного слагаемого, вводя потенциал для массовой силы $\varphi = W_j x_j$. Тогда, сохраняя прежние обозначения, будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.5)$$

но теперь $\sigma_{ij} = -(p - \varphi)\delta_{ij} + 2\mu \dot{e}_{ij}$. Далее под величиной давления будем понимать его модифицированное значение $p - \varphi$. Соответственно переписывается граничное условие на свободной поверхности, которое следует использовать в виде

$$t_i(x) = (-p_0 + W_j x_j) n_i, \quad (2.6)$$

где под внешним давлением p_0 понимается его безразмерное значение $p_0/(\mu\omega)$. Условие прилипания на твердой стенке примет вид

$$u_1 = 1 - x_2, \quad u_2 = x_1 - 1. \quad (2.7)$$

Таким образом, математическая формулировка задачи включает уравнения (2.5), (1.2) с граничными условиями (2.6), (2.7).

Решение поставленной задачи осуществлялось непрямым методом граничных элементов. Подробное изложение техники построения и реализации метода применительно к моделированию ползущих течений вязкой жидкости со свободной поверхностью подробно изложено в п. 1 настоящего пособия.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Вначале приведем результаты численного моделирования с использованием кинематического условия в эйлеровой форме (2.3).

Рассматриваемое течение наряду с параметром $W = \rho g R / (\mu \omega)$ определяется коэффициентом заполнения λ (отношение объемов жидкости и цилиндра). При $W = 0$ реализуется случай квазитвердого течения и свободная поверхность имеет вид окружности. При возрастании W (например, при уменьшении угловой скорости вращения ω при прочих равных условиях) увеличивается толщина слоя жидкости на поднимающейся стороне цилиндра и уменьшается на опускающейся. Далее при достижении

некоторого критического значения $W = W^*$ происходит образование наплыва на поднимающейся стороне цилиндра и образование в месте наплыва вихревой зоны. Такая эволюция свободной поверхности при изменении числа W показана на рисунке 3.1 (а – $W = 350$, б – $W = 100$, в – $W = 76$, $\lambda = 0.19$). При достаточно больших значениях числа W (в данном случае $W \approx 350$) свободная поверхность почти горизонтальна и поверхность цилиндра, находящаяся выше уровня жидкости, покрыта тонкой пленкой.

Таким образом, существуют два режима течения вязкой жидкости во вращающемся цилиндре: с зоной возвратного течения и без нее. В случае существования зоны возвратного течения на свободной поверхности появляются две точки, в которых окружная составляющая скорости меняет знак (они показаны на рисунках): точка стекания (слева) и точка растекания (справа), т.е. зона возвратного течения представляет собой один вихрь. Характерные профили скорости в зоне возвратного течения показаны на рисунке 3.2 при $\lambda = 0.36$ (кривая 1 – $W = 30$, 2 – $W = 100$). В данном случае $W^* = 18$.

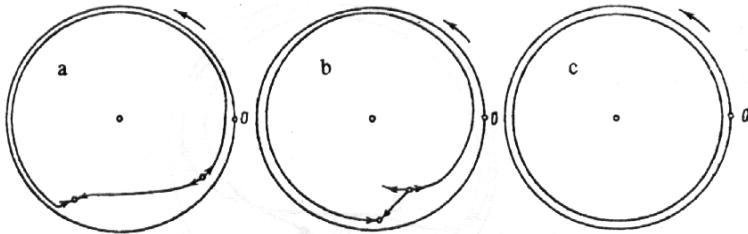


Рисунок 3.1 – Стационарные формы свободной поверхности при $\lambda=0.19$: $a - W = 350$; $b - W = 100$; $c - W = 76$.

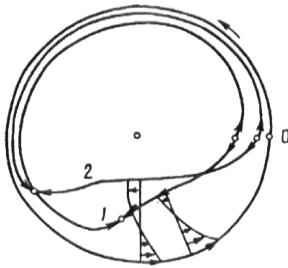


Рисунок 3.2 – Профили скорости в циркуляционной зоне при $\lambda = 0.36$: кривая 1 – $W = 30$, 2 – $W = 100$.

Метод граничных элементов позволяет непрерывным образом вычислять значения необходимых функций в области решения, используя дискретизированные формулы (1.12), (1.13) или им подобные, записанные относительно точек $x \in \Omega$. Вследствие этого, используя множество внутренних точек произвольной структуры и соответствующие графические программные средства, становится возможным визуализация рассчитанных полей.

Поля скорости для различных коэффициентов заполнения λ и чисел W показаны на рисунке 3.3. Подтверждается возможность реализации двух различных типов течения под стационарной свободной поверхностью. Первый тип течения (рисунок 3.3 (а), (г)) характерен тем, что вектора скорости во всей области течения направлены в одну сторону – по

ходу вращения твердой стенки. Значения скоростей почти такие же, как и при вращении твердого тела, т.е. во вращающейся с угловой скоростью ω системе координат наблюдается весьма слабое окружное течение жидкости. Тем не менее, свободная поверхность отличается от окружности: на поднимающейся стенке слой толще, чем на опускающейся. Это обусловлено действием силы тяжести, которая или затрудняет или способствует увлечению жидкости твердой стенкой.

Для второго типа течения (рисунок 3.3 (б), (в), (д), (е)) характерны окружные составляющие скорости различных знаков. В нижней части емкости появляется зона возвратного течения.

На свободной поверхности, как указывалось ранее, появляются точки стекания и растекания, в которых окружная скорость меняет знак. С увеличением числа W , что эквивалентно уменьшению скорости вращения при прочих равных условиях, увеличивается размер вихревой зоны и уменьшается толщина уносимого слоя. С другой стороны скорость возвратного течения уменьшается.

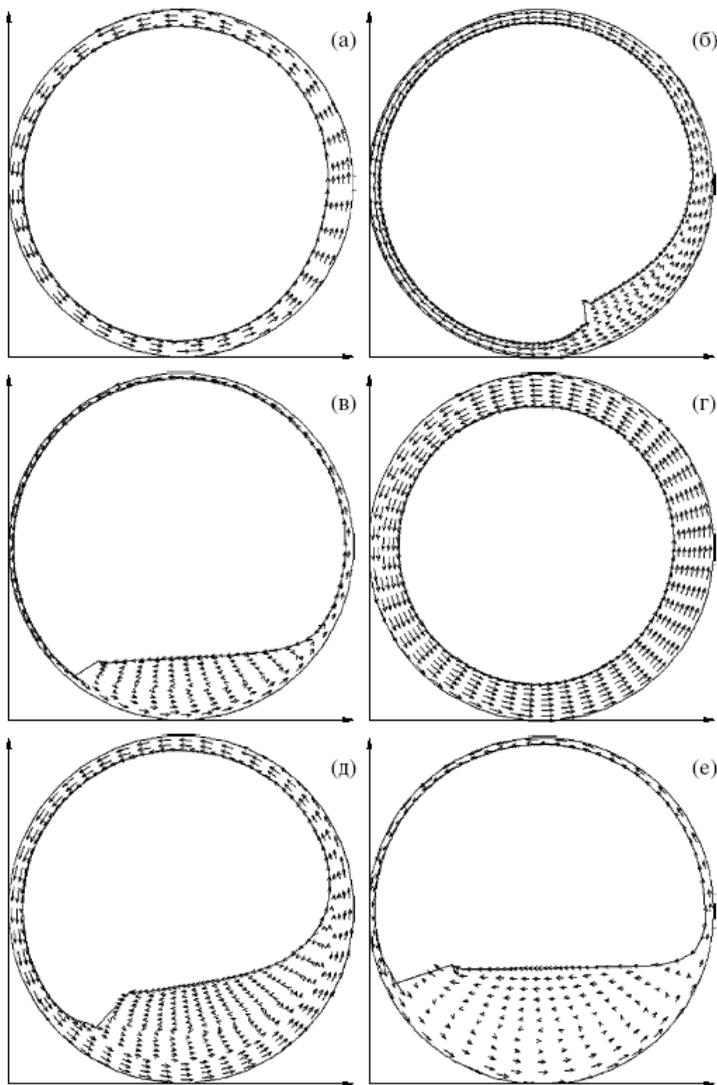


Рисунок 3.3 – Формы свободной поверхности при $\lambda=0.19$ (а, б, в) и 0.36 (г, д, е): $W=10$ (г), 50 (а), 70 (д), 80 (б) и 500 (в, е).

Как нетрудно заметить из приведенных рисунков имеет место некоторое искажение свободной границы в области точек стекания и растекания. Это является следствием использования кинематического условия в эйлеровой форме (2.3). Для устранения данного эффекта следует применять для расчета эволюции свободной границы кинематическое условие в лагранжевом виде (1.4, б), что существенно сложнее, прежде всего из-за наличия точки стекания. Маркерами, отслеживающими движение границы, являются края граничных элементов. Созданный алгоритм позволяет добавлять элементы, а также удалять элементы слишком малой длины.

На рисунках 3.4, 3.5 показаны результаты расчетов с применением условия (1.4, б). Все формы свободной поверхности, приведенные на данных рисунках получены при вычислениях на количестве узлов, равном 1000 (для получения предыдущих результатов количество расчетных узлов, как правило, не превышало 100). Наплыв явно формируется, что лучше соответствует физической реальности по сравнению с предыдущими результатами. Однако проведение подобных расчетов возможно при условии использования возможностей суперкомпьютера СКИФ Cyberia Томского государственного университета.

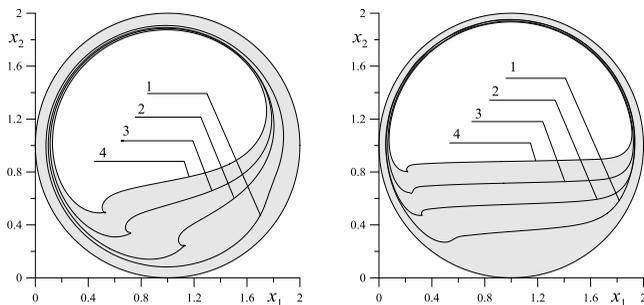


Рисунок 3.4 – Стационарные формы свободной поверхности при $\lambda=0.2$ (1), $\lambda=0.3$ (2), $\lambda=0.4$ (3), $\lambda=0.5$ (4): левый рисунок – $W = 40$; правый рисунок – $W = 350$.

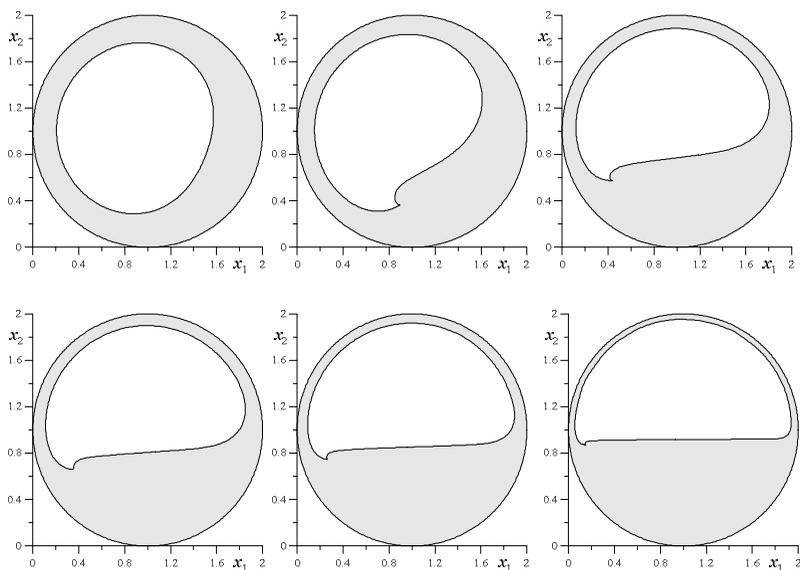


Рисунок 3.5 – Стационарные формы свободной поверхности при $\lambda=0.5$: верхний ряд слева - направо $W = 10$; $W = 20$; $W = 60$; нижний ряд слева - направо $W = 100$; $W = 200$; $W = 1000$.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа : учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Баттерфилд Р., Бенерджи П. Методы граничных элементов: пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
3. Ладыженская О.В. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Учебное издание

**ПОНОМАРЕВА Мария Андреевна
ЯКУТЕНОК Владимир Альбертович**

**НЕПРЯМОЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Учебно-методическое пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Подписано к печати 01.11.2017 г. Формат 60×84¹/₁₆
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 1,4
Тираж 16 экз. Заказ № 2774.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел.8 (382-2)531-528
Сайт: <http://publish.tsu.ru>
E-mail: rio.tsu@mail.ru